ИЗВѢСТІЯ

Кіевскаго Коммерческаго

ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга XI.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Б.-Житомірская № 20 с. д.
1911.

Від професора КНЕУ
В.М. Фещенко

ИЗВѢСТІЯ

Кіевскаго Коммерческаго

ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга XI.

КІЕВЪ.
Типографія П. П. Чоколова, Б.-Житомирская № 20 с. д.
1911.

ИЗВѢСТІЯ

Кіевскаго Коммерческаго

ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга XI.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Б.-Житоміроская № 20 с. д.
1911.

Печатано по опредѣленію Учебнаго Комитета Кіев. Коммерч. Института
Директоръ **М. Довнаръ-Запольскій.**

Содержаніе.

ОБОЗРѢНІЕ

ПРЕПОДАВАНІЯ НА 1911—12 АКАДЕМИЧЕСКІЙ ГОДЪ.

I. НАУКИ ЭКОНОМИЧЕСКІЯ.

Профессоръ Бажаевъ В. Г.

а) Экономическая географія по 3 ч. въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

б) Сельско-хозяйственная экономія по 3 ч. въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Главныя пособія къ *курсу экономической географіи*: Фортунатовъ. Сельско-хозяйственная статистика Е. Россіи. М. 1893.—Денъ. Очерки по экономической географіи. Ч. I. Сельское хозяйство. Спб. 1908 г.—Денъ. Каменноугольная и желѣзодѣлательная промышленность. Спб. 1907 г.—Бажаевъ. Краткій конспектъ курса с.-х. статистики. К. 1910 г.—Моревъ. Очерки коммерческой географіи и хозяйственной статистики Россіи, по сравненію съ другими государствами. Спб. 1906 г.—E. Friedrich. Allgemeine und specielle Wirtschaftsgeographie. L. 1907 г.

Пособія къ *курсу сельско-хозяйственной экономіи:* Вернеръ. Сельско-хозяйственная экономія. М. 1901 г. Скворцовъ. Основы экономики земледѣлія. Ч. I. и 2. Спб. 1900—1902.—Бажаевъ. Конспектъ курса с.-х. экономіи. Кіевъ 1909. G. Krafft. Die Betriebslehre. B. 1908.

Конрадъ. Сельское хозяйство и аграрная политика. М. 1910.—Бухенбергеръ. Основные вопросы с.-х. экономіи и политики.—Якушкинъ. Русская поземельная политика въ XVIII и XIX в.в. М. 1890.—Каблуковъ. Объ условіяхъ развитія крестьянскаго хозяйства въ Россіи. М. 1908.—Кауфманъ. Аграрный вопросъ въ Россіи. Ч. I. Земельныя отношенія и земельная политика. Ч. II. Въ чемъ вопросъ и гдѣ его рѣшеніе? (Лекціи, читанныя въ Московскомъ народномъ университетѣ въ 1907 г). М. 1908.—Бажаевъ. Подъемъ производительности сельскаго хозяйства, какъ самостоятельная задача аграрной политики. (Брошюра). М. 1905.

Примѣчаніе. Минимальный подборъ пособій:

I. Бажаевъ. „Конспектъ".—II. Конрадъ „Сельское хозяйство" etc.—III. Кауфманъ. „Аграрный вопросъ въ Россіи".

Профессоръ Довнаръ-Запольскій М. В.

а) Экономическая исторія Россіи по I ч. въ оба полугодія (для комм. отдѣленія).

б) Семинарій по экономической Исторіи Россіи по I часу въ осен. полугодіи (для экон. отдѣленія).

Пособія: Довнаръ-Запольскій. Русская исторія (соотвѣтств. статьи), очерки по исторіи эконом. быта Россіи, в. I. Его же, или Милюкова. Очерки по исторіи русской культуры.

Профессоръ Косинскій В. А.

а) Экономія промышленности по 3 часа въ осеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

б) Банки, кредитъ, деньги по 3 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

в) Введеніе въ экономическую политику по 3 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣл.).

г) Исторія политической экономіи по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

д) Практическія занятія по теоріи политической экономіи по 2 часа въ оба полугодія (для слуш. экон. отдѣл.).

е) Практическія занятія по прикладной экономіи по 2 часа въ оба полугодія (для слуш. коммерч. отдѣл.).

Профессоръ Воблый К. Г.

а) Политическая экономія по 4 часа въ осеннемъ полугодіи (для обоихъ отд.).

б) Семинарій по политической экономіи по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣл.).

Намѣчена разработка темъ въ области внѣшней торговли Россіи.

Въ началѣ и въ концѣ учебнаго года будетъ сдѣлано нѣсколько экскурсій на фабрики и заводы.

в) Практическія занятія по политической экономіи по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для эконом. отдѣленія).

Преподаватель Русовъ А. А.

а) Статистика по 4 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

б) Земское хозяйство по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для эк. отдѣленія).

в) Городское хозяйство по 3 часа въ весеннемъ полугодіи (для экономическаго отдѣленія).

г) Практическія занятія по оцѣночной статистикѣ по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для экономическаго отдѣленія).

д) Практическія занятія по общей статистикѣ по 2 часа въ оба полугодія по группамъ; 4 часа (для обоихъ отдѣленій).

Главныя пособія по статистикѣ: Кэтлэ. Соціальная физика. К. 1911.—Анцыферовъ А. Н. Курсъ элементарной статистики. 1908. Харьковъ.—Воблый К. Г. Статистика. 1909. Кіевъ.—Кауфманъ А. А. Теорія статистики. 1909. Спб.—Льессъ Андре. Статистика. Спб. 1905.—Лапласъ. Опытъ философіи теоріи вѣроятностей. М. 1908.—Майо Смитъ. Статистика и соціологія. М. 1901.—Некрасовъ. Философія и логика науки о массовыхъ проявленіяхъ человѣческой дѣятельности. М. 1902.—Майръ Георгъ. Закономѣрность въ общественной жизни (Перев. Н. Н. Романова). М. 1899.—Рейхесбергъ Н. Статистика и наука объ обществѣ. 1898. Спб.—Бертильонъ Ж. Курсъ административной статистики. М. 1897.—Фортунатовъ А. Ѳ. О статистикѣ. Учебное пособіе. М. 1907.—Чупровъ. А. И. Статистика. Кіевъ. 1907.—Чупровъ А. А. Очерки по теоріи статистики. Спб. 1909.—Швитау Г. Г. Профессіи и занятія населенія Спб. 1909.—Воблый К. Г. Третья промысловая перепись въ Германіи. К. 1911 г.

Преподаватель Сташевскій Е. Д.

Исторія хозяйственнаго быта Западной Европы по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Преподаватель Ярошевичъ А. И.

а) Экономическая географія Юго-Западнаго края по 1 часу въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

б) Практическія занятія по экономической географіи по 1 часу въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Приватъ-доцентъ Яснопольскій Л. Н.

а) Финансовое право по 4 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

б) Мѣстные финансы по 2 часа въ оба полугодія (для слушателей оцѣночно-податного подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи).

в) Практическія занятія по финансовому праву по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

г) Финансовый семинарій по 2 часа въ оба полугодія (для экономическаго отдѣленія).

д) Практическія занятія по политической экономіи по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Пособія будутъ указаны при началѣ чтенія курса.

II. НАУКИ ЮРИДИЧЕСКІЯ.

Профессоръ Егіазаровъ С. А.

История русскаго государственнаго права по 2 часа въ оба полугодія (для эконом. отдѣленія).

Пособія будутъ указаны при началѣ чтенія курса.

Профессоръ Довнаръ-Запольскій М. В.

Исторія русскаго государственнаго права по 4 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

Рекомендуемыя пособія:—А. М. Филипповъ. Учебникъ Исторіи Русскаго права, часть 1-ая (обнимаетъ исторію государств. права).—М. Ф. Владимірскій-Будановъ. Обзоръ исторіи Русскаго права. Русская исторія въ очеркахъ и статьяхъ подъ редакціей проф. М. В. Довнаръ-Запольскаго въ 3-хъ томахъ (томъ 1-й и 2-й).—М. Дьяконовъ.—Очерки общественнаго государственнаго строя древней Руси.

При выборѣ пособій надо имѣть въ виду, что книга Дьяконова обхватываетъ только древній періодъ и часть Московскаго.

Профессоръ Катковъ М. М.

а) Торговое право (общій курсъ) по 4 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

б) Вексельное право по 1 часу въ осеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

в) Конкурсное право по 1 часу въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

г) Морское право по 1 часу въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

д) Практическія занятія по торговому праву по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Профессоръ Митюковъ А. К.

а) Гражданское право (общій курсъ) по 4 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

б) Гражданское право (семейное и наслѣдственное) по 2 часа въ оба полугодія (для экономическаго отдѣленія).

в) Гражданскій и торговый процессъ по 2 часа въ оба полугодія (для экономическаго отдѣленія).

г) Практическія занятія по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Пособія будутъ указаны при началѣ чтенія курса.

Приватъ-доцентъ Самофаловъ Н. В.

а) Уголовное право по 3 часа въ оба полугодія (для экономическаго отдѣленія).

б) Практическія занятія по законовѣдѣнію по 1 часу въ оба полугодія (для слушателей педагогическаго подъотдѣленія) на экон. отд.

Профессоръ Соколовъ П. П.

Энциклопедія права по 3 часа въ осеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

Профессоръ Эйхельманъ О. О.

а) Административное право по 4 часа въ осеннемъ полугодіи (для экономическаго отдѣленія).

б) Международное право по 3 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

в) Общее ученіе о государствѣ по 3 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

г) Организація мѣстнаго управленія и самоуправленія по 3 часа въ осеннемъ полуг. (для слушателей оцѣночно-податного подъотдѣла по экономическому отдѣленію).

III. НАУКИ КОММЕРЧЕСКІЯ.

Профессоръ Чеховичъ П. С.

Водное транспортное дѣло по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Преподаватель Барацъ Л. Г.

Банковое дѣло по 1 часу въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

Преподаватель Лозинскій Н. В.

а) Техника торговаго дѣла по 1 часу въ осеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

5) Организація торговыхъ и промышленныхъ предпріятій по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій)

Преподаватель Синопійскій-Трофимовъ Н. Т.

а) Коммерческая ариѳметика по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

б) Финансовыя вычисленія по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для слушателей 1-го курса коммерческаго отдѣленія и 1 часъ въ осеннемъ полугодіи и 3 часа въ весеннемъ полугодіи для слушателей экономическаго отдѣленія по банковому подъотдѣлу).

Тоже по часу въ оба полугодія для второго и третьяго курса коммерческаго отдѣленія.

в) Политическая ариѳметика по 2 часа въ оба полугодія (для обоихъ отдѣленій).

г) Практическія занятія по финансовому вычисленію 1 часъ въ осеннемъ полугодіи (для слушателей обоихъ отдѣленій).

д) Практическія занятія по политической ариѳметикѣ 1 часъ въ весеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

Онъ-же: Финансовыя вычисленія для продолжающихъ по 1 часу въ оба полугодія (для слушателей экономическаго отдѣленія).

— — — — —

а) Фабрично-заводское счетоводство по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для обоихъ отдѣленій).

б) Сельско-хозяйственное счетоводство по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для слушателей коммерческаго отдѣленія и для слушателей экономическаго отдѣленія по банковому подъотдѣлу).

в) Банковое счетоводство по 3 часа въ осеннемъ и по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для слушателей экономическаго отдѣленія по банковому подъотдѣлу).

г) Коммерческая корреспонденція на нѣмецкомъ языкѣ по 1 часу въ оба полугодія (для слушателей коммерческаго отдѣленія и для слушателей экономическаго отдѣленія по банковому подъотдѣлу).

д) Банковое счетоводство по 3 часа въ осеннемъ и по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для слушателей банковаго подъотдѣла экономическаго отдѣленія).

— — — — —

Спеціальныя занятія по банковому и биржевому дѣлу по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для слушателей банковаго подъотдѣла по экономическому отдѣленію).

Профессоръ Воблый К. Г.

Экономія страхованія по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для слушателей страхового подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи).

Профессоръ Граве Д. А.

Математическій анализъ страховыхъ величинъ по 3 часа въ весеннемъ полугодіи (для страхового подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи).

Профессоръ Катковъ М. М.

Страховое право по 1 часу въ весеннемъ полугодіи (для слушателей страхового подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи).

Преподаватель Полторацкій И. Н.

Практическія занятія по страхованію жизни по 1 часу въ оба полугодія (для слушателей страхового подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи).

Преподаватель Ярошевичъ А. И.

Практическія занятія по огневому страхованію по 1 часу въ оба полугодія (для слушателей страхового подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи).

Преподаватель Плескачевскій М. Д.

а) Общее счетовѣдѣніе по 3 часа въ осеннемъ и по 1 часу въ весеннемъ полугодіи (для коммерческаго отдѣленія).

б) Практическія занятія по общему счетоводству по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для коммерческаго отдѣленія).

в) Практическія занятія (по группамъ) по спеціальному счетоводству по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для коммерческаго отдѣленія).

IV. НАУКИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКІЯ И ЕСТЕСТВЕННЫЯ.

Профессоръ Граве Д. А

а) Энциклопедія математики по 3 часа въ оба полугодія (обязательна для слушателей страхового подъотдѣла по экономическому отдѣленію и не обязательна для слушателей коммерческаго отдѣленія).

б) Теорія вѣроятностей по 1 ч. въ вес. полугодіи (для слуш. эк. отд. страхового подъотдѣла).

Профессоръ Делоне Н. Б.

а) Физика по 4 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

б) Практическія занятія по физикѣ по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для коммерческаго отдѣленія).

Профессоръ Егоровъ И. В.

а) Химія неограническая по 4 часа въ осеннемъ и по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для коммерческаго отдѣленія).

Профессоръ Красусскій К. А.

Химія органическая по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

Профессоръ Пуріевичъ К. А.

а) Введеніе въ біологію по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

б) Практическія занятія по микробіологіи по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для слушателей педагогическаго подъотдѣла по товаровѣдѣнію на коммерческомъ отдѣленіи).

Преподаватель Голгофскій А. А.

Аналитическая химія по 12 часовъ въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

V. НАУКИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКІЯ И ТОВАРОВѢДѢНІЕ.

Профессоръ Дементьевъ К. Г.

Технологія минеральныхъ веществъ по 1 часу въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

Профессоръ Егоровъ И. В

а) Химическая технологія по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

б) Техническій анализъ по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

Профессоръ Ерченко П. Ф.

а) Товаровѣдѣніе волокнистыхъ веществъ по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

б) Практическія занятія по 2 часа въ оба полугодія (для слушателей коммерческаго отдѣленія).

Профессоръ Слезкинъ П. Р.

а) Описательное товаровѣдѣніе по 2 часа въ оба полугодія (для экономическаго отдѣленія).

б) Товаровѣдѣніе сельско-хозяйственное по 2 часа въ оба полугодія (для слушателей коммерческаго отдѣленія).

Преподаватель Кобецкій І. Р.

а) Практическая геологія съ технической минералогіей по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

б) Горнозаводское дѣло по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія)

в) Практическія занятія по горнозаводскому дѣлу по 2 часа въ оба полугодія (для коммерческаго отдѣленія).

Преподаватель Фармаковскій В. В.

Машиновѣдѣніе по 2 часа въ весеннемъ полугодіи (для слушателей коммерческаго отдѣленія).

— — — — —

Электротехника по 1 часу въ осеннемъ полугодіи (для слушателей коммерческаго отдѣленія).

VI. НАУКИ ГУМАНИТАРНЫЯ: ИСТОРІЯ, ФИЛОСОФІЯ, ПЕДАГОГИКА.

Проф. Довнаръ-Запольскій М. В.

Новая русская исторія по 4 часа въ осеннемъ полугодіи (для слушателей экономическаго отдѣленія).

Проф. Бубновъ Н. А.

Средняя исторія по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для слушателей экономическаго отдѣленія).

Профессоръ Новодворскій В. В.

Всеобщая исторія (новая) по 3 часа въ оба полугодія (для слушателей экономическаго отдѣленія).

Приватъ-доцентъ Володкевичъ Н. Н.

Исторія педагогическихъ идей по 1 часу въ оба полугодія (для слушателей педагогическаго подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи и для слушателей коммерческаго отдѣленія).

Приватъ-доцентъ Корчакъ-Чепурковскій А. В.

а) Общественная гигіена по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для слушателей экономическаго отдѣленія).

б) Школьная гигіена (со включеніемъ общей) по 2 часа въ оба полугодія (для слушателей педагогическаго подъотдѣла на экономическомъ отдѣленіи).

VII. НАУКИ ПРИКЛАДНЫЯ.

Желѣзнодорожное дѣло.

Профессоръ Рышковъ П. Н.

Техническая эксплоатація по службѣ пути по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для слушателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла на коммерческомъ отдѣленіи).

Главныя пособія по технической эксплоатаціи ж. дорогъ по службѣ пути.—Я. Гордѣенко. Курсъ желѣзныхъ дорогъ (для техниковъ М-ва П. С.) 1905.—П. Афросимовъ. Начала строительнаго искусства и курсъ желѣзнодорожнаго дѣла. 1908.—Н. Крюковъ. Желѣзнодорожное дѣло. 1907 г.—А. Васютинскій. Желѣзныя дороги. (Литограф. изд.). 1905-1906 г.—Цеглинскій. Курсъ желѣзныхъ дорогъ (литограф. изд.). 1909 г.—Ф. Валуевъ. Практическое руководство желѣзнодорожнаго дѣла. Устройство и ремонтъ пути и зданій.

Преподаватель Ботяновскій Г. П.

Практическія занятія по телеграфіи по 1 часу въ оба полугодія (для слушателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла на коммерческомъ отдѣленіи).

Преподаватель Старжинскій Н. Н.

а) Вагонное хозяйство по 1 часу въ осеннемъ полугодіи (для слушателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла на коммерческомъ отдѣленіи).

б) Практическія занятія по службѣ движенія по 2 часа въ оба полугодія (для слушателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла на коммерческомъ отдѣленіи).

Преподаватель Зимелевъ В. Б.

Коммерческая эксплоатація по службѣ движенія по 2 часа въ осеннемъ полугодіи (для слушателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла на коммерческомъ отдѣленіи).

— — — — —

а) Желѣзнодорожное счетоводство по 2 часа въ оба полугодія (для слушателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла на коммерческомъ отдѣленіи).

б) Практическія занятія по желѣзнодорожному счетоводству (для слушателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла на коммерческомъ отдѣленіи).

Примѣчаніе. Обезпеченіе недостающихъ предметовъ преподаванія, согласно планамъ, указаннымъ въ Запискѣ о состояніи Кіевскаго Коммерческаго Института, будетъ сдѣлано, по скольку это необходимо для наступающаго учебнаго года, въ началѣ учебнаго года.

VIII. НОВЫЕ ЯЗЫКИ.

Обязательные для обоихъ отдѣленій.

1. Итальянскій языкъ.

Бартоломучи: I-ая старшая группа по 2 ч. еженедѣльно. II-ая группа (для начинающихъ) по 3 часа.

2. Англійскій языкъ.

Фербернъ: I группа (старшая, прошлогодняя 2-ая), II группа (средняя, прошлогодняя I-ая), III группа для начинающихъ.

3. Нѣмецкій языкъ.

Габерманъ. I группа старшая, II группа а (прошлогодняя 2-ая), II группа b (прошлогодняя 3-ья), II группа с (прошлогодняя 4-ая).

Берзинъ. III группа (прошлогодняя 5-ая), III группа в (прошлогодняя 6-ая), IV группа а (бывшая 7-ая), IV группа б (бывшая 8 и 9).

4. Французскій языкъ.

Озолинъ. V группа а и б (для начинающихъ).

Турнье. V группа A, B, и C (для начинающихъ).

Шовенъ. I группа (старшая), II группа А (прошлогодняя 2-ая), III группа А (прошлогодняя 4-ая), IV группа А (прошлогодняя 8-ая).

Кайя: II группа Б (прошлогодняя 3-ья), III группа Б (прошлогодняя 5-ая), IV группа Б (прошлогодняя 7-ая), II группа С (для средне-знающихъ французскій языкъ, вновь поступившихъ).

Пособія для прохожденія курса по новымъ языкамъ будутъ указаны при началѣ прохожденія курса.

КРАТКІЯ СВѢДѢНІЯ
о
КІЕВСКОМЪ КОММЕРЧЕСКОМЪ ИНСТИТУТѢ.

I. Экскурсіи, организуемыя Учебнымъ Комитетомъ Кіевскаго Коммерческаго Института.

Сознаніе высокаго значенія высшаго коммерческаго образованія и той отвѣтственности, какую несетъ Совѣтъ Кіевскаго Коммерческаго Института передъ государствомъ и обществомъ, побуждаетъ его принять всѣ мѣры, могущія дать государству и родинѣ по возможности основательно подготовленныхъ работниковъ; поэтому Совѣтъ Института, не ограничиваясь теоретической подготовкой учащихся и экскурсіями ихъ внутри Россіи, для практическаго ознакомленія съ разными видами предпріятій и промышленностью, рѣшилъ ежегодно посылать на средства Института 15—20 студентовъ за границу, въ цѣляхъ изученія ими различныхъ отраслей торговли, консульскаго, страхового дѣла и т. п.

а) Заграничныя экскурсіи.

Опытъ прошлыхъ лѣтъ, заключавшійся въ единичныхъ командировкахъ, далъ блестящій результатъ, почему въ 1910 - 11 учебномъ году Институтъ расширилъ этотъ опытъ, пославъ на собственныя средства уже 17 студентовъ.

Для выбора кандидатовъ и отправки командируемыхъ Учебнымъ Комитетомъ Института избирается комиссія изъ числа профессоровъ и преподавателей Кіевскаго Коммерческаго Института.

Цѣль командировки двоякая: 1) Въ странахъ съ развитой торговлей и промышленностью командируемые ознакомятся съ улучшенными способами торговой техники, страхового дѣла и т. д., въ цѣляхъ примѣненія опытовъ другихъ странъ къ веденію дѣла въ Россіи.

2) Въ странахъ съ мало развитой торговлей, командируемые будутъ изучать условія импорта русскихъ товаровъ.

Совѣтомъ Института избрана особая комиссія, для предварительнаго разсмотрѣнія заявленій слушателей, для опредѣленія программъ ихъ занятій, предварительнаго выбора кандидатовъ и затѣмъ для ознакомленія съ результатами занятій командированныхъ. Избирая кандидатовъ, комиссія предъявляетъ къ студентамъ слѣдующія требованія: 1) обязательное и основательное знакомство съ языкомъ той страны, куда ѣдетъ командируемый, 2) представленіе детальной программы намѣченнаго для изученія вопроса и 3) командируемый подвергается спеціальному коллоквіуму для выясненія вопроса о томъ, обладаетъ ли онъ достаточными предварительными данными для изученія намѣченнаго имъ вопроса.

Само собою разумѣется, что комиссія предоставляетъ командировки только наиболѣе успѣвающимъ по всѣмъ предметамъ и вообще доказавшимъ свое умѣнье работать въ научномъ или практическомъ отношеніи.

Командируемый обязанъ доставить письменный подробный отчетъ о своихъ занятіяхъ. По мѣрѣ возможности Институтъ принимаетъ мѣры къ тому, чтобы командируемые студенты получали еще какое-нибудь, чисто практическое, порученіе отъ русскихъ торговыхъ фирмъ и учрежденій.

Лѣтомъ 1910—11 учебнаго года было послано 17 студентовъ а именно: (см. таб. на 13—14 стр.)

б) Экскурсіи внутри Россіи.

Въ теченіе будущаго академическаго года (1911-12 г) – подъ руководствомъ соотвѣтствующихъ преподавателей Институтомъ будутъ организованы экскурсіи на фабрики и заводы, для практическаго ознакомленія съ различными отраслями промышленности.

Въ предѣлахъ Юго-Западнаго края предполагаются слѣдующія экскурсіи:

I. Типографіи, обработка бумаги и проч.

Осмотръ типографій и фабрикъ въ г. Кіевѣ и его уѣздѣ.

II. Обработка дерева.

Въ Кіевѣ: мебельныя и паркетныя фабрики, днѣпровскіе заводы по механической обработкѣ дерева, лѣсопильные заводы и шпалопропиточный заводъ въ Фастовѣ.

Мѣсто назначенія.	Фамилія	Цѣль командировокъ.	Особыя примѣчанія.
Въ Гамбургъ.	**Баскинъ.**	Ознакомленіе съ торговлей Гамбурга, какъ крупнѣйшаго центра Германіи.	Имѣетъ поступившее черезъ Институтъ порученіе выяснить возможность экспорта огурцовъ черезъ Гамбургъ въ Зап. Европу.
Въ Гамбургъ, Бременъ и Любекъ.	**Бусевъ.**	Изученіе портоваго дѣла.	
Въ Гамбургъ.	**Марголинъ.**	Изученіе сахарнаго рынка	
Черезъ Гамбургъ въ Лейпцигъ и Франкфуртъ на Майнѣ	**Израильсонъ.**	Изученіе кожевенной промышленности и торговли мѣхами.	Работалъ въ крупномъ кожевенномъ дѣлѣ до поступленія въ Институтъ.
Въ Геттингенъ	**Франкфуртъ.**	Изученіе страхового дѣла въ семинаріи проф Лексиса.	Работалъ больше года въ страховой конторѣ.
Въ Берлинъ.	**Александровъ.**	Изученіе страхового дѣла въ страховыхъ учрежденіяхъ	Имѣетъ печатные труды по статистикѣ.
Въ Вюртембергъ.	**Новинскій.**	Ознакомленіе съ постановкой оцѣночной статистики и мелкаго кредита въ области сельскаго хозяйства.	Представилъ рефератъ предположенный къ печатанію.
Въ различные города Германіи и Швеціи.	**Либерманъ.**	Изученіе лѣсоторговаго дѣла.	Работалъ въ крупномъ лѣсоторговомъ дѣлѣ въ Кіевѣ.
Въ Лондонъ.	**Котелянскій.**	Прослушаніе курса международныхъ коммерческихъ знаній и изученіе лѣсоторговаго дѣла.	

Мѣсто назначенія.	Фамилія.	Цѣль командировокъ.	Особыя примѣчанія.
Въ Лондонъ.	**Нижняя.**	Прослушаніе курса международныхъ коммерческихъ знаній и изученіе банковаго дѣла	
Въ Лондонъ.	**Панасѣвичъ.**	Прослушаніе курса международныхъ коммерческихъ знаній и изученіе торговой техники.	
Въ различные города Швейцаріи.	**Драгомановъ.**	Изученіе бюджетной стороны городского благоустройства и хозяйства.	
Въ Женеву и Лозанну.	**Красницкая.**	Изученіе развитія кооперативныхъ учрежденій.	
Въ Марсель.	**Шерстюкъ.**	Изученіе портоваго дѣла.	
Въ Турцію (Въ Яффу, Бейрутъ и Дамаскъ).	**Шейновъ.**	Изученіе Турецкаго рынка преимущественно германскаго импорта	Снабженъ поступившими въ Институтъ отъ Алек. Екатерин Т-ва свеклосах зав. и отъ А. Л. Лева предложеніями поручить изученіе импорта сахара и нефти
Въ Турцію. (Въ Яффу, Бейрутъ и Дамаскъ).	**Рабичевъ.**	Изученіе турецкаго рынка русскаго вообще и въ частности импорта сахара и нефти.	
Въ Сирію	**Кассисъ.**	Изученіе рынковъ для русскихъ товаровъ и конкуренціи съ другими товарами, шелковое дѣло.	Жилъ въ разныхъ городахъ Сиріи и хорошо знакомъ съ ея жизнью.
Въ Персію.	**Никифоровъ.**	Изученіе консульской службы.	
Въ Болгарію и Румынію.	**Гуревичъ.**	Изученіе импорта и экспорта русскихъ товаровъ.	
Въ Японію.	**Новаковскій.**	Изученіе торговли	

III. Обработка минеральныхъ веществъ.

Осмотръ кафельныхъ и кирпичныхъ заводовъ въ Кіевѣ.

IV. Обработка шерсти.

Суконныя фабрики Кіевск. губ.

V. Обработка металловъ и произв. машинъ.

Осмотръ завода подковныхъ гвоздей, машиностроительнаго завода, Кіевское Т-во Кабельныхъ заводовъ въ Кіевѣ.

VI. Обработка питательныхъ веществъ.

Осмотръ паровыхъ мельницъ.

VII. Химическія произв., фабрики красокъ и проч.

Осмотръ соотвѣтствующихъ фабрикъ въ Кіевѣ.

VIII. Обработка животныхъ продуктовъ

Осмотръ соотвѣтствующихъ заводовъ въ г. Кіевѣ и заводъ Шленкера въ Бердичевѣ. Кіев. губ.

IX. Производства, обложенныя акцизомъ.

Осмотръ дрожжевыхъ, винокуренныхъ и пивоваренныхъ заводовъ и табачныхъ фабрикъ въ Кіевѣ.

Осмотръ фарфоровыхъ заводовъ въ Волынской губ.

Въ Екатеринославской губерніи.

Донецкіе стекольные заводы (ст. Константиновка Юго-Зап. жел. дорогъ).

Для ознакомленія съ заводами, рудниками и горными промыслами предполагаются слѣдующія экскурсіи:

1. Донецкій бассейнъ.
2. Домбровскій бассейнъ Царства Польскаго.
3. Кавказскія марганцевыя и серебряно-свинцовыя руды.

Для ознакомленія съ мануфактурной промышленностью предполагаются экскурсіи:

1. въ г. Лодзь—ситценабивныя и хлопчатобумажныя фабрики.
2. въ г. Бѣлостокъ—суконныя фабрики и одѣяла.

3. въ г. Москву, ситценабивныя фабрики.

Для ознакомленія съ хлѣбной торговлей:

1. Въ г. Одессу (биржа, гавань).

Въ экскурсіи, организуемыя Институтомъ, допускаются только слушатели, которые выдержали испытаніе по тому предмету, который составляетъ главную цѣль экскурсіи. Число экскурсантовъ ограничено.

Подъ руководствомъ преподавателей желѣзнодорожнаго подъотдѣла будутъ организованы экскурсіи на станціи желѣзныхъ дорогъ въ городѣ Кіевѣ, съ цѣлью практическаго ознакомленія проходимыхъ въ Институтѣ предметовъ.

2. Аналитическая камера и товаро-испытательная станція.

Съ начала 1911—12 уч. года при Музеѣ Товаровѣдѣнія открывается аналитическая камера и товаро-испытательная станція, въ которой предполагается производить изслѣдованіе главныхъ продуктовъ потребленія въ г. Кіевѣ. Образцы продуктовъ будутъ покупаться въ лавкахъ, на базарахъ и вообще пунктахъ, гдѣ товаръ переходитъ въ руки розничнаго потребителя.

3. Правила о преміяхъ.

1. За сочиненія, представленныя слушателями на объявленную тему, Совѣтомъ Института учреждены двѣ преміи въ 100 рублей каждая. Половинная премія въ 50 рублей. Болѣе слабо написанныя сочиненія, удовлетворяющія однако требованіямъ, поставленнымъ Учебнымъ Комитетомъ, получаютъ похвальный отзывъ.

2. Срокъ представленія сочиненій назначается 1-го апрѣля года, слѣдующаго за объявленіемъ преміи.

3. Получившіе премію или похвальный отзывъ, пріобрѣтаютъ право на зачетъ представленныхъ ими работъ и занесеніе заглавій ихъ сочиненій въ дипломъ.

На срокъ по апрѣль 1911 г. назначены слѣдующія темы:

I Персидскій рынокъ и его значеніе для Россіи.

II. Развитіе грузооборота Юго-Западныхъ желѣзныхъ дорогъ съ момента перехода ихъ въ казну.

4. Правила объ экзаменахъ.

§ 1. Въ отношеніи сдачи экзаменовъ, предметы преподаванія въ Институтѣ подраздѣляются на два разряда: по однимъ изъ предметовъ слушатели обязаны выдержать экзаменъ въ теченіи прохожденія ими курса ученія *(курсовые экзамены,)*, по другимъ—въ испытательной комиссіи, при окончаніи курса ученія *(выпускныя испытанія)*.

§ 2. Для экзаменовъ по предметамъ первой категоріи (курсовыхъ) устанавливаются слѣдующіе два срока: съ 10-го по 31-е мая и съ 10-го по 20-е января.

Примѣчаніе. По постановленію Учебнаго Комитета, могутъ быть въ случаѣ надобности, назначены курсовые экзамены и въ декабрѣ мѣсяцѣ, по отдѣльнымъ группамъ предметовъ. Въ особо уважительныхъ случаяхъ, Учебный Комитетъ можетъ назначить отдѣльнымъ слушателямъ экзамены въ срокъ съ 25 августа по 1-е сентября.

§ 3. Предметы, по коимъ слушатели *обязаны выдержать экзамены въ теченіи прохожденія ими курса*, слѣдующіе а) для обоихъ отдѣленій: энциклопедія права, общее государственное право, гражданское право и процессъ, международное право, статистика, теорія и исторія политической экономіи, исторія экономическаго строя Россіи и Зап. Европы; б) для коммерческаго отдѣленія: химія органическая и неорганическая, физика (при чемъ экзамены по физикѣ производятся по двумъ ея отдѣламъ вмѣстѣ, или отдѣльно по каждому), финансовое право и сельско-хозяйственная экономія; в) для экономическаго отдѣленія: по административному праву, исторіи русскаго госуд. права и по новымъ языкамъ. Сверхъ того, учащіеся должны, *сдать коллоквіумы*: а) на эконом. отдѣл. по коммерч, ариѳм., водному транспортному дѣлу, русской и всеобщ. исторіи. б) на коммерч. отдѣленіи: по коммерч. ариѳметикѣ и спеціальнымъ курсамъ финансовыхъ вычисленій, общему товаровѣдѣнію, общему счетоводству и спеціальнымъ его отдѣламъ, практической геологіи и водному транспортному дѣлу.

Примѣчаніе. По спеціальнымъ курсамъ, а также по другимъ предметамъ, не обозначеннымъ въ § 3, Учебнымъ Комитетомъ *могутъ быть установлены коллоквіумы.*

§ 4. По отношенію къ курсовымъ экзаменамъ по нѣкоторымъ предметамъ устанавливается особый порядокъ, а именно: 1) экзамены *по теоріи политической экономіи, по статистикѣ* должны быть сданы въ концѣ перваго года пребыванія учащихся въ учебномъ заведеніи; 2) экзамены *по органической химіи, энциклопедіи* и *общему курсу государственнаго права* могутъ быть отложены учащимися не болѣе, чѣмъ на одинъ семестръ, по прослушаніи ими каждаго изъ этихъ предметовъ; 3) экзамены по остальнымъ предметамъ, не упомянутымъ въ этомъ §, могутъ быть сданы учащимися въ срокъ по ихъ усмотрѣнію.

§ 5. По всѣмъ предметамъ успѣхи опредѣляются пятибальной системой.

5. Правила о выпускныхъ испытаніяхъ слушателей Кіевскаго Коммерческаго Института *).

I. О составѣ комиссіи.

1. Для производства окончательныхъ испытаній, прослушавшимъ курсъ ученія въ Коммерческомъ Институтѣ составляется особая испытательная комиссія (§ 17 устава Кіевскаго Коммерческаго Института), въ которую входятъ: а) Директоръ Института; б) 5 членовъ, по избранію Совѣта Института, изъ его состава, или изъ лицъ, извѣстныхъ своими познаніями; в) депутаты, по назначенію Министра Торговли и Промышленности.

Примѣчаніе. Составъ членовъ, избираемыхъ Совѣтомъ, каждый разъ сообщается Министру Торговли и Промышленности.

2. Предсѣдатель испытательной комиссіи каждый разъ избирается Совѣтомъ изъ числа членовъ комиссіи.

Примѣчаніе. Секретарь комиссіи (§ 20 устава) приглашается Предсѣдателемъ изъ числа ея членовъ.

3. Сверхъ названныхъ членовъ, для экзаменовъ по предметамъ, по которымъ не имѣется спеціалистовъ въ составѣ комиссіи,

*) Утверждены г. Министромъ Торг. и Пром 31 марта 1910 г.

предсѣдателемъ ея приглашаются для производства экзаменовъ преподаватели соотвѣтственныхъ предметовъ (§ 17 устава).

4. Для экзаменовъ по предметамъ подъотдѣленій, могутъ быть приглашаемы Совѣтомъ въ составъ комиссіи представители тѣхъ вѣдомствъ и учрежденій, которыя предоставляютъ окончившимъ или оканчивающимъ слушателямъ Института право прохожденія извѣстнаго практическаго стажа въ своихъ учрежденіяхъ.

5. Въ комиссіи всѣ вопросы рѣшаются большинствомъ голосовъ. Голосъ предсѣдателя, въ случаѣ равенства голосовъ, даетъ перевѣсъ.

6. По окончаніи испытаній предсѣдатель комиссіи немедленно представляетъ отчетъ о производствѣ испытаній въ Учебный Отдѣлъ Министерства Торговли и Промышленности.

II. О предметахъ испытаній и о способахъ производства ихъ.

7. Предметы, изъ коихъ производятся испытанія, раздѣляются на: а) предметы общаго курса обоихъ отдѣленій; б) предметы, исключительно относящіеся къ коммерческому или экономическому отдѣленію; в) предметы подъотдѣленій.

8. Упомянутые въ ст. 7 предметы суть слѣдующіе:

А. Предметы, общіе для обоихъ отдѣленій:

а) прикладная экономія со всѣми ея подъотдѣлами; б) экономическая географія; в) торговое право съ его подъотдѣлами.

Б. Предметы коммерческаго отдѣленія:

а) коммерческія вычисленія (общій курсъ и спеціальные отдѣлы); б) товаровѣдѣніе (общій курсъ и спеціальные отдѣлы); в) счетовѣдѣніе (общее и спеціальное) съ банковымъ дѣломъ и организаціей торговыхъ и промышленныхъ предпріятій; г) коммерческая кореспонденція (русская и на иностранныхъ языкахъ); д) новые языки.

В. Предметы экономическаго отдѣленія:

а) финансовое право; б) городское и земское дѣло (съ подлежащими отдѣлами изъ административнаго права) и оцѣночная статистика; в) описательное товаровѣдѣніе; г) счетовѣдѣніе; д) дополнительные отдѣлы международнаго права.

Г. Предметы подъотдѣленій:

1. По желѣзнодорожному подъотдѣленію: а) техническая эксплоатація по службамъ: пути и сооруженій, движенія, подвижнаго состава и тяги; б) телеграфія и сигнализація, в) желѣзнодорожное товаровѣдѣніе со статистикой; г) желѣзнодорожное счетоводство и дѣлопроизводство; д) желѣзнодорожныя право и экономія.

2. По страховому подъотдѣленію: а) страховое право; б) экономика и статистика страхованія; в) техника страховыхъ оцѣнокъ.

3. По оцѣночно-податному подъотдѣленію: а) спеціальные отдѣлы финансоваго права; б) мѣстное управленіе, городское и земское дѣло (съ подлежащими отдѣлами изъ административнаго права) и оцѣночная статистика (для коммерческаго отдѣленія); в) теорія и техника мелкаго кредита.

4. По банковому подъотдѣленію: а) спеціальныя задачи по банковой бухгалтеріи и по техникѣ банковаго и биржевого дѣла; б) коммерческая корреспонденція на русскомъ и иностранныхъ языкахъ.

9. Познанія по всѣмъ предметамъ оцѣниваются пятибальной системой. Познанія въ новыхъ языкахъ характеризуются особыми замѣчаніями по достигнутымъ учащимися успѣхамъ въ устной рѣчи, письменномъ изложеніи и коммерческой корреспонденціи.

10. Къ испытаніямъ въ комиссіи допускаются учащіеся, удовлетворяющіе слѣдующимъ условіямъ: 1) прослушавшіе полный курсъ избраннаго ими отдѣленія; 2) успѣшно выдержавшіе установленныя курсовыя испытанія и получившіе зачеты по практическимъ занятіямъ; 3) представившіе дипломное сочиненіе по одному изъ слѣдующихъ предметовъ: изъ политической экономіи, экономической географіи, статистики, финансоваго права, торговаго права, страхового и оцѣночнаго дѣла, товаровѣдѣнія и финансовыхъ вычисленій.

Примѣчаніе. Съ разрѣшенія комиссіи, дипломное сочиненіе можетъ быть представлено въ теченіе шестимѣсячнаго срока по окончаніи испытаній.

11. Желающіе подвергнуться испытанію, подаютъ о томъ прошеніе на имя предсѣдателя комиссіи, съ приложеніемъ краткаго curriculum vitae и свидѣтельства о прохожденіи курса ученія.

12. Принимая въ соображеніе: достоинства сочиненія, результаты испытаній, а равно и успѣшность занятій во время прохожденія курса ученія въ Институтѣ, комиссія удостаиваетъ учащихся дипломами перваго или второго разрядовъ. При этомъ дипломомъ перваго разряда комиссіей могутъ быть удостаиваемы только тѣ изъ учащихся, кои изъ всѣхъ выдержанныхъ въ комиссіи испытаніяхъ имѣютъ въ среднемъ выводѣ не ниже „3", а изъ курсовыхъ испытаній въ среднемъ не ниже „3 съ половиной" (§ 18 устава).

Примѣчаніе. Дипломы выдаются за подписью директора Института, секретаря учебнаго комитета, членовъ испытательной комиссіи и секретаря комиссіи, по формѣ, утвержденной Министромъ Торговли и Промышленности (§ 20 устава).

13. Учащіеся, прослушавшіе всѣ предметы избраннаго ими подъотдѣленія, допускаются къ испытаніямъ изъ сихъ предметовъ, лишь послѣ успѣшнаго окончанія испытаній изъ предметовъ отдѣленія. Къ экзаменамъ изъ предметовъ подъотдѣленія учащіеся могутъ приступить и въ одну изъ слѣдующихъ сессій испытательной комиссіи, по полученіи ими диплома объ окончаніи отдѣленія.

14. Въ удостовѣреніе знаній по предметамъ подъотдѣленій, выдержавшіе соотвѣтственныя испытанія получаютъ особое свидѣтельство, съ аттестаціей объ успѣшно пройденномъ ими практическомъ стажѣ, если таковой требуется планомъ избраннаго ими подъотдѣленія.

Примѣчаніе. Свидѣтельства выдаются за подписью Директора Института, секретаря учебнаго комитета, членовъ испытательной комиссіи и секретаря комиссіи по формѣ, утвержденной Министромъ Торговли и Промышленности (§ 20 устава).

15. Согласно постановленію Совѣта и съ утвержденія Учебнаго Отдѣла, теоретическія науки каждаго подъотдѣленія могутъ быть дополняемы практическимъ стажемъ. Сообразно требованіямъ будущей практической дѣятельности, къ которой готовитъ подъотдѣленіе, практическій стажъ можетъ быть отбываемъ или до окончанія прохожденія курса подъотдѣленія и экзаменовъ въ комиссіи, или по выдержаніи таковыхъ. Во второмъ случаѣ свидѣтельство выдается испытательной комиссіей съ указаніемъ результатовъ испытаній изъ теоретическихъ предметовъ и съ указаніемъ на тотъ практическій стажъ, который долженъ быть выполненъ учащимся. По удостовѣреніи же объ успѣшномъ прохожденіи, практическихъ занятій на службѣ, окончившимъ подъотдѣленіе, Совѣтомъ института въ свидѣтельство окончившаго заносятся свѣдѣнія о выполненіи имъ требованій практической дѣятельности.

16. Удостоенные диплома второго разряда могутъ, по истеченіи года, ходатайствовать предъ Учебнымъ Комитетомъ о допущеніи къ испытаніямъ для полученія диплома перваго разряда.

III. О платѣ за испытанія.

17. Желающіе подвергнуться экзаменамъ въ испытательной комиссіи, при прошеніи о томъ на имя предсѣдателя, вносятъ плату въ размѣрѣ 20 рублей за экзамены изъ курса пройденнаго ими отдѣленія (примѣчаніе къ § 18 устава).

6. Инструкція.

Для производства испытаній въ Испытательной Комиссіи при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности.

На подлинномъ написано: „Утверждаю. Апрѣля 26 дня 1911 года. Министръ Торговли и Промышленности **С. Тимашевъ**".
Вѣрно: Управляющій Учебнымъ Отдѣломъ **А. Лагоріо.**

I. Объ испытательной комиссіи.

1. При Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ состоитъ Испытательная Комиссія для производства испытаній на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, состоящихъ въ вѣдѣніи Министерства Торговли и Промышленности.

2. Предсѣдателемъ Испытательной Комиссіи состоитъ Главный Инспекторъ по учебной части.

3. Члены Испытательной Комиссіи назначаются Министромъ Торговли и Промышленности. Въ составъ Комиссіи входитъ Окружный Инспекторъ по учебной части Кіевскаго района.

4. Къ вѣдѣнію Испытательной Комиссіи относится:

а) пріемъ прошеній лицъ, желающихъ подвергнуться испытаніямъ на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, состоящихъ въ вѣдѣніи Министерства Торговли и Промышленности;

б) производство означенныхъ испытаній, и

в) обсужденіе результатовъ таковыхъ испытаній.

II. Объ испытаніяхъ.

5. Штатными преподавателями и преподавательницами спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности, общественныхъ и частныхъ, опредѣляются лица, получившія свидѣтельства на право преподаванія сихъ предметовъ.

6. Означенныя въ § 5 свидѣтельства выдаются Учебнымъ Отдѣломъ Министерства Торговли и Промышленности по успѣшномъ выдержаніи въ Испытательной Комиссіи дополнительныхъ испытаній, установленныхъ настоящими правилами.

Примѣчаніе. 1. Сіи испытанія производятся по программамъ, утвержденнымъ Министромъ Торговли и Промышленности 26 мая 1909 года.

Примѣчаніе 2. Указанныя въ § 5 свидѣтельства выдаются, на право преподаванія въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ, лицамъ, окончившимъ курсъ въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, при чемъ свидѣтельства на право преподаванія политической экономіи и законовѣдѣнія могутъ быть выдаваемы только лицамъ, получившимъ политико-экономическое и юридическое образованіе въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, а товаровѣдѣнія и химіи—лицамъ, получившимъ высшее образованіе на естественныхъ отдѣленіяхъ физико-математическихъ факультетовъ университетовъ или соотвѣтствующее образованіе въ другихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. На право же преподаванія въ торговыхъ школахъ и классахъ-лицамъ, окончившимъ курсъ въ среднихъ (преимущественно коммерческихъ) учебныхъ заведеніяхъ или въ учительскихъ институтахъ.

Примѣчаніе. 3. На право преподаванія бухгалтеріи и коммерческой корреспонденціи въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ выдаются свидѣтельства и лицамъ, окончившимъ курсъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ или въ учительскихъ институтахъ. На право преподаванія тѣхъ же предметовъ въ торговыхъ школахъ и классахъ могутъ быть выдаваемы свидѣтельства также и лицамъ, кои, не имѣя указаннаго общеобразовательнаго ценза, представятъ удостовѣренія или о своей преподавательской дѣятельности, или о службѣ въ торгово-промышленныхъ учрежденіяхъ, свидѣтельствующей о практическомъ знакомствѣ ихъ съ предметомъ.

7. Испытанія въ Комиссіи производятся однажды въ годъ въ срокъ, по представленію Совѣта Института и утвержденію Министра Торговли и Промышленности.

8. Къ испытаніямъ допускаются лица обоего пола, не моложе 20-ти-лѣтняго возраста.

9. Лица, желающія получить свидѣтельства на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, подаютъ прошенія за одинъ мѣсяцъ до назначеннаго для испытаній срока въ Испытательную Комиссію на простой бумагѣ о допущеніи ихъ къ испытаніямъ, съ обозначеніемъ избираемаго ими для преподаванія предмета и разряда учебнаго заведенія, въ которомъ они желаютъ и по своему образовательному цензу имѣютъ право преподавать. Къ прошенію прилагаются слѣдующіе документы: 1) свидѣтельство о рожденіи, 2) аттестатъ или свидѣтельство объ окончаніи курса въ томъ или другомъ учебномъ заведеніи и 3) автобіографическія свѣдѣнія.

10. Каждое испытуемое лицо подвергается испытанію:

1) изъ избраннаго имъ для преподаванія предмета, являющагося для него главнымъ, и

2) изъ соотвѣтственныхъ вспомогательныхъ предметовъ, указанныхъ въ прилагаемомъ къ сему расписаніи. (см. таб. на 25 стр.)

11. Испытанія по главному предмету состоятъ изъ:

1) письменнаго и устнаго экзаменовъ по программамъ, приложеннымъ къ настоящимъ правиламъ,

2) пробныхъ уроковъ или пробныхъ лекцій,

3) педагогической подготовки въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, съ отчетомъ о ней, и

4) разбора учебныхъ руководствъ и пособій.

Примѣчаніе. Пробные уроки устанавливаются для лицъ, которыя подвергаются письменнымъ и устнымъ испытаніямъ, а пробныя лекціи—для лицъ, освобожденныхъ отъ таковыхъ испытаній.

12. Испытанія по каждому вспомогательному предмету, кромѣ коммерческой корреспонденціи, состоятъ изъ одного только устнаго экзамена по программамъ, приложеннымъ къ настоящимъ прави-

РАСПИСАНІЕ

главныхъ и вспомогательныхъ предметовъ, по коимъ должны быть сдаваемы экзамены.

Главные предметы.	Учебныя заведенія, на право преподаванія въ которыхъ производится экзаменъ.	Вспомогательные предметы.
1. Бухгалтерія.	Коммерческія учебныя заведенія всѣхъ разрядовъ.	1. Коммерческая ариѳметика. 2. Законовѣдѣніе. 3. Политическая экономія. 4. Коммерческая корреспонденція.
2. Коммерческая корреспонденція на русскомъ языкѣ.		1. Бухгалтерія. 2. Коммерческая ариѳметика. 3. Торговое право.
3. Коммерческая ариѳметика.		1. Теоретич. ариѳ. 2. Алгебра. 3. Геометрія. 4. Тригонометрія. 5. Основанія аналитической геометріи.
	Торговые школы и классы.	1. Ариѳметика. 2. Алгебра. 3. Геометрія.
4. Коммерція.		1. Бухгалтерія. 2. Законовѣдѣніе. 3. Политическая экономія.
5. Коммерческая географія.	Коммерческія учебныя заведенія всѣхъ разрядовъ.	1. Общая географія (математ., физич. и политическая). 2. Теорія статистики. 3. Политическая экономія.
	Торговые школы и классы.	1. Общая географія. 2. Политическая экономія.
6. Товаровѣдѣніе.		1. Физика. 2. Химія. 3. Естествовѣдѣніе. 4. Коммерческая географія.
	Коммерческія учебныя заведенія всѣхъ разрядовъ.	1. Коммерческая географія.

ламъ, а по коммерческой корреспонденціи—въ составленіи писемъ на заданныя темы.

Примѣчаніе 1. На право преподаванія коммерческой ариѳметики въ торговыхъ школахъ и классахъ экзамены по ариѳметикѣ, алгебрѣ и геометріи производятся въ объемѣ курса общеобразовательныхъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Примѣчаніе 2. На право преподаванія коммерческой географіи, коммерціи и товаровѣдѣнія въ торговыхъ школахъ и классахъ экзамены по вспомогательнымъ предметамъ производятся въ объемѣ курса коммерческихъ училищъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности

13. Освобождаются:

1) отъ письменнаго и устнаго экзаменовъ по главному предмету и отъ устнаго экзамена по каждому вспомогательному предмету - лица, получившія соотвѣтствующее высшее образованіе, если изъ представленныхъ ими аттестатовъ видно, что они выдержали успѣшно экзаменъ по этому предмету;

2) отъ экзаменовъ по всѣмъ вспомогательнымъ предметамъ—лица, окончившія курсъ коммерческихъ училищъ съ отличіемъ (медалью), при соисканіи права преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ торговыхъ школахъ, торговыхъ классахъ и на бухгалтерскихъ и счетоводныхъ курсахъ;

3) отъ устнаго и письменнаго экзаменовъ по главному предмету и отъ экзаменовъ по всѣмъ вспомогательнымъ предметамъ—лица, имѣющія аттестаты объ окончаніи коммерческихъ курсовъ, указанныхъ въ ст. 67 объ измѣненіи положенія о коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ 10 іюня 1900 года, если Министромъ Торговли и Промышленности такое право будетъ предоставлено курсамъ;

4) отъ педагогической подготовки въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ—лица, преподававшія въ учебныхъ заведеніяхъ не менѣе одного года, но не иначе, какъ по полученіи отъ начальства сихъ учебныхъ заведеній одобрительнаго отзыва о ихъ педагогической дѣятельности;

5) отъ пробныхъ уроковъ—лица, еще ранѣе допущенныя къ преподаванію избраннаго ими главнаго предмета, если Окружнымъ Инспекторомъ по учебной части будетъ данъ одобрительный отзывъ объ ихъ урокахъ, состоявшихся въ его присутствіи;

6) отъ пробныхъ лекцій—лица, извѣстныя своей педагогической дѣятельностью и научными трудами по избранному ими глав-

ному предмету, или сдавшія магистерскій экзаменъ по соотвѣтствующей спеціальности;

7) отъ разбора учебныхъ руководствъ или пособій — лица, извѣстныя своими научными трудами, свидѣтельствующими, по мнѣнію Испытательной Комиссіи, о знакомствѣ ихъ съ избраннымъ ими главнымъ предметомъ.

14. Испытуемому лицу предоставляется избрать главнымъ не одинъ, а нѣсколько предметовъ. Въ этомъ случаѣ онъ подчиняется всѣмъ правиламъ, относящимся къ испытаніямъ по каждому избранному имъ главному предмету.

15. Порядокъ испытаній слѣдующій:

1) письменный экзаменъ по главному предмету,

2) устный экзаменъ по главному предмету,

3) экзамены по вспомогательнымъ предметамъ,

4) педагогическая подготовка въ коммерческомъ учебномъ заведеніи и письменный отчетъ о ней,

5) пробный урокъ и

6) письменный разборъ учебныхъ руководствъ или пособій, или иныя письменныя работы, по избранному испытуемымъ главному предмету, по указанію Комиссіи.

Примѣчаніе. По желанію испытуемаго, помянутыя въ семъ параграфѣ письменныя работы могутъ быть представлены имъ и ранѣе указанной очереди.

16. Письменный экзаменъ состоитъ въ изложеніи на письмѣ, въ присутствіи Испытательной Комиссіи, отвѣта на заданную по главному предмету тему, объявляемую экзаменующимся предсѣдателемъ Испытательной Комиссіи непосредственно передъ началомъ экзамена. Отвѣтъ долженъ быть изложенъ экзаменующимся совершенно самостоятельно. Справки и вообще какія либо пособія допускаются при исполненіи письменной работы только съ особаго разрѣшенія предсѣдателя.

Примѣчаніе. Письменные отвѣты на предложенныя темы по бухгалтеріи и коммерческой корреспонденціи должны быть и съ внѣшней стороны исполнены съ возможной тщательностью, необходимою на практикѣ при веденіи книгъ и составленіи писемъ, а также съ соблюденіемъ законныхъ требованій.

17. На устныхъ экзаменахъ по главному и вспомогательному предметамъ и на письменномъ испытаніи по коммерческой корреспонденціи, какъ вспомогательному предмету, экзаменующимся предлагаются по жребію, вынимаемому ими самими, билетъ по

каждому изъ предметовъ экзамена. Сверхъ того, члены Испытательной Комиссіи могутъ задавать экзаменующимся вопросы, въ предѣлахъ экзаменаціонной программы.

18. Письменные и устные экзамены должны быть совершенно закончены въ сроки, опредѣляемые Испытательной комиссіей.

19. Лица, допущенныя Испытательной Комиссіей къ педагогической подготовкѣ въ коммерческомъ учебномъ заведеніи, обязаны по указанію начальства заведенія посѣщать въ немъ уроки, подъ руководствомъ преподавателей, и подъ наблюденіемъ начальства исполнять всѣ порученныя имъ работы. По истеченіи не менѣе 3-хъ мѣсячной педагогической подготовки въ учебномъ заведеніи, испытуемый обязанъ представить въ Испытательную Комиссію подробный письменный отчетъ о своихъ занятіяхъ.

Педагогическая подготовка испытуемаго признается выполненной успѣшно или неуспѣшно на основаніи представленнаго испытуемымъ отчета и на основаніи отзыва о его занятіяхъ начальства того учебнаго заведенія, къ которому былъ прикомандированъ испытуемый.

20. Пробныхъ лекцій по избранному испытуемымъ главному предмету назначаются двѣ: первая—на тему по собственному выбору испытуемаго, вторая—на тему по назначенію Комиссіи. Срокъ на приготовленіе послѣдней лекціи назначается не болѣе недѣли.

21. Пробная лекція излагается устно. Испытуемый можетъ имѣть передъ собой конспектъ лекцій, который передъ началомъ испытанія предъявляется Испытательной Комиссіи для ознакомленія съ нимъ. Пробная лекція продолжается не болѣе одного часа и не должна быть прерываема присутствующими. Право перерыва лекціи, если въ томъ встрѣтится надобность, принадлежитъ исключительно предсѣдателю Испытательной Комиссіи. Вопросы и замѣчанія испытуемому могутъ быть предложены членами Комиссіи только по окончаніи пробной лекціи.

22. Пробный урокъ дается испытуемымъ въ одномъ изъ коммерческихъ учебныхъ заведеній въ присутствіи Комиссіи, состоящей изъ одного изъ членовъ Испытательной Комиссіи завѣдующаго учебной частью заведенія и преподавателя того предмета, на право преподаванія котораго испытуемый желаетъ получить свидѣтельство. Тема пробнаго урока предлагается Комиссіей не менѣе, какъ за одинъ день до урока. По окончаніи этого урока

можетъ происходить собесѣдованіе членовъ Комиссіи съ испытуемымъ.

Примѣчаніе 1. Въ Комиссіи для пробнаго урока вмѣсто члена Испытательной Комиссіи можетъ присутствовать по назначенію Учебнаго Отдѣла мѣстный Окружный Инспекторъ.

Примѣчаніе 2. Пробный урокъ въ учебномъ заведеніи, по усмотрѣнію Испытательной Комиссіи, можетъ быть замѣненъ и пробной лекціей въ присутствіи сей Комиссіи.

23. Кромѣ педагогической подготовки и пробнаго урока, испытуемый долженъ представить въ Испытательную Комиссію подробный отчетъ объ учебныхъ руководствахъ и другихъ учебныхъ пособіяхъ по избранному имъ главному предмету преподаванія. Въ письменномъ отчетѣ о руководствахъ или пособіяхъ испытуемый долженъ выказать достаточное для преподавателя знакомство съ учебной литературой по данному предмету и самостоятельное сужденіе о достоинствахъ или недостаткахъ того или другого учебнаго руководства или пособія. По поводу представленнаго отчета Испытательной Комиссіи можетъ быть назначена испытуемому дополнительно устная бесѣда.

III. О цѣляхъ разныхъ видовъ испытанія.

24. Письменный и устный экзамены производятся съ тою цѣлью, чтобы удостовѣриться, имѣютъ ли лица, ищущія право на преподаваніе какого-либо предмета, необходимыя для сего познанія, какъ въ избранномъ ими главномъ предметѣ, такъ и въ предметахъ вспомогательныхъ, находящихся въ связи съ нимъ.

25. Педагогическая подготовка въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ устанавливается съ той цѣлью, чтобы дать экзаменующемуся возможность ознакомиться съ пріемами преподаванія и предоставить ему самому возможную практику, а письменные отчеты о таковой подготовкѣ имѣютъ цѣлью узнать результатъ этихъ занятій.

26. Пробный урокъ назначается испытуемому съ той цѣлью, чтобы удостовѣриться въ способности и умѣніи его преподавать предметъ ясно и вполнѣ доступно пониманію учащихся.

27. Пробныя лекціи назначаются испытуемому съ цѣлью удостовѣриться не только въ томъ, имѣетъ ли онъ надлежащія для преподаванія свѣдѣнія по избранному имъ главному предмету, но и въ способности его къ научному и ясному для пониманія учащихся изложенію предмета.

28. Письменный отчетъ о руководствахъ или пособіяхъ или иныя письменныя работы, по предложенію Комиссіи, имѣютъ цѣлью удостовѣриться въ знакомствѣ испытуемаго съ учебной литературой по избранному имъ главному предмету и въ умѣніи критически въ ней разобраться.

IV. О порядкѣ дѣлопроизводства испытаній, выдачи свидѣтельствъ и допущеніи къ повторнымъ испытаніямъ.

29. Дѣлопроизводство въ Испытательной Комиссіи возлагается на Канцелярію Кіевскаго Коммерческаго Института.

30. Принятыя Канцеляріей прошенія посылаются на разсмотрѣніе въ Учебный Отдѣлъ Министерства Торговли и Промышленности и, по разсморѣніи ихъ въ Испытательной Комиссіи при Учебномъ Отдѣлѣ, пересылаются въ Кіевскую Комиссію.

31. О произведенныхъ испытаніяхъ составляется протоколъ за подписью предсѣдателя и членовъ Испытательной Комиссіи, равно и приглашенныхъ для производства испытаній лицъ. Въ протоколѣ должны быть указаны отдѣльно темы, какъ письменныхъ и устныхъ отвѣтовъ экзаменовавшихся, такъ и пробныхъ лекцій и уроковъ, съ присоединеніемъ оцѣнки достоинства всѣхъ видовъ испытаній.

Члены, несогласные съ рѣшеніемъ Комиссіи, подаютъ, если пожелаютъ, особыя мнѣнія, которыя должны быть вручены предсѣдателю Испытательной Комиссіи не позже, какъ черезъ три дня послѣ засѣданія. Къ протоколу прилагаются конспекты пробныхъ лекцій и пробныхъ уроковъ и вообще все то, что признано будетъ необходимымъ Испытательною Комиссіею.

32. Достоинство экзаменныхъ отвѣтовъ, пробныхъ лекцій, пробныхъ уроковъ и всѣхъ другихъ видовъ испытаній опредѣляется Испытательной Комиссіей отмѣтками: удовлетворительно и неудовлетворительно.

33. Протоколы Испытательной Комиссіи о произведенныхъ ею испытаніяхъ съ письменными работами экзаменовавшихся и общее сужденіе Комиссіи о результатахъ испытаній, вмѣстѣ съ особыми мнѣніями ея членовъ, если таковыя будутъ поданы, представляются въ Учебный Отдѣлъ Министерства Торговли и Промышленности для постановленія въ Испытательной Комиссіи при Отдѣлѣ о выдачѣ свидѣтельствъ.

34. Учебный Отдѣлъ Министерства Торговли и Промышленности, по разсмотрѣнію Учебнымъ Комитетомъ заключенія Кіевской Испытательной Комиссіи о результатахъ произведенныхъ испытаній и постановленія Испытательной Комиссіи при Учебномъ Отдѣлѣ о выдачѣ свидѣтельствъ, выдаетъ съ утвержденія Товарища Министра Торговли и Промышленности, выдержавшему испытанія свидѣтельство на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ соотвѣтствующихъ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ названнаго Министерства.

35. Испытуемый, не явившійся на устный или письменный экзаменъ въ назначенный срокъ или прервавшій экзаменъ, лишается права продолжать экзаменъ и можетъ возобновить его съ самаго начала не ранѣе, какъ въ слѣдующую сессію Испытательной Комиссіи. Въ случаѣ неявки безъ уважительныхъ причинъ къ пробной лекціи или къ пробному уроку въ назначенный срокъ, испытуемый лишается права читать лекцію или давать урокъ на ту же тему, но можетъ получить взамѣнъ ея другую, на опредѣленный же срокъ. Если испытуемый не явится и ко вторичному сроку, то новая тема можетъ быть назначена, по его прошенію о томъ, не ранѣе, какъ по истеченіи года со дня вторичнаго срока. Пропускъ третьяго срока влечетъ за собою лишеніе права на допущеніе къ испытанію. Неявившіеся безъ уважительныхъ причинъ для педагогической подготовки въ назначенное имъ учебное заведеніе въ теченіе одного года со времени сдачи испытаній, указанныхъ въ § 15, теряютъ право на полученіе свидѣтельства на званіе преподавателя спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности:

36. Лица, не выдержавшія испытаній, могутъ ходатайствовать о допущеніи ихъ къ новымъ испытаніямъ въ слѣдующія сессіи Испытательной Комиссіи.

Подписалъ: Управляющій Учебнымъ Отдѣломъ **А. Лагоріо**

Скрѣпилъ: Начальникъ Отдѣленія **Аглаимовъ.**

Вѣрно: Начальникъ Отдѣленія **Аглаимовъ.**

Сверялъ: Столоначальникъ

7. Примѣрная схема преподаванія на 1911—1

Первый курсъ.	Семестры. I	II
	Часы.	
1. Исторія политической экономіи	—	2
2. Политическая экономія	4	—
3. Введеніе въ экономическую политику	—	3
4. Статистика	4	—
5. Энциклопедія права	3	—
6. Общее ученіе о государствѣ	—	3
7. Исторія русскаго государственнаго права	—	4
8. Всеобщая исторія (средніе вѣка)	2	—
9. Всеобщая исторія (новая) (читалась 2 года по два часа, предполагается одинъ годъ 3 часа)	3	3
10. Новая русская исторія	4	—
11. Общественная гигіена	—	2
12. Коммерческая ариѳметика	—	2
Итого	20	19

Два новыхъ языка.

Второй курсъ.	Семестры. III
	Час
1. Спеціальные курсы прикладной экономіи (деньги, кредитъ, банки, экономія торговли)	3
2. Экономическая географія	3
3. Исторія хозяйственнаго строя Россіи	1
4. Исторія хозяйственнаго строя Западной Европы	2
5. Оцѣночная статистика	3
6. Русское гражданское право	4
7. Международное право (общій курсъ)	—
8. Русское государственное право	2
9. Общее счетовѣдѣніе	2
Итого	20

Два новыхъ языка.

Практическія занятія.

По политической экономіи	—
„ статистикѣ	—
„ экономической географіи	—

Примѣчаніе: На подъотдѣленія слушатели Института могутъ записываться только лишь съ

...учебный годъ на Экономическомъ отдѣленіи.

Третій курсъ.	Семестры. V	VI
	Часы.	
1. Финансовое право	4	4
2. Спеціальный курсъ прикладной экономіи (экономія торговли)	2	—
3. Экономія страхованія	—	—
4. Сельско-хозяйственная экономія и политика	3	3
5. Экономія Юго-Западн. Края	1	1
6. Уголовное право и процессъ	2	4
7. Торговое право	4	4
8. Гражданскій и торговый процессъ	2	2
9. Право международныхъ экономическ. отнош. и консульск. право	—	3
10. Административное право	3	—
11. Энциклопедія математики	—	—
12. Финансовыя вычисленія (спеціальный курсъ)	—	—
13. Счетовѣдѣніе (банковое)	—	—
14. Введеніе въ философію	—	—
15. Школьная гигіена	—	—
Итого	21	21

Практическія занятія

По оцѣночной статистикѣ	1	1
„ прикладной экономіи	2	2
„ международному праву	1	—
„ экономической исторіи Россіи	1	—

Четвертый курсъ.	Семестры. VII	VIII
	Часы.	
1. Спеціальный курсъ прикладной экономіи (экономія путей сообщенія)	3	—
2. Спеціальный курсъ экономической географіи	2	2
3. Спеціальныя занятія по политической экономіи	—	—
4. Экономія промышленности	—	3
5. Прямое обложеніе (спеціальный курсъ)	—	—
6. Рабочее законодательство	—	2
7. Теорія и техника мелкаго кредита	—	—
8. Бюджетное право	2	2
9. Земское и городское хозяйство	2	3
10. Страховая статистика	—	—
11. Вексельное право	1	1
12. Конкурсное право	1	1
13. Морское право	1	—
14. Страховое право	—	—
15. Спеціальныя занятія по законовѣдѣнію	—	—
16. Коммерческая корреспонденція русская	1	1
17. Коммерческая корреспонденція на 2 иностранныхъ языкахъ	—	—
18. Политическая ариѳметика	—	—
19. Общее товаровѣдѣніе	2	2
20. Организація торгово-промышленныхъ предпріятій	2	2
21. Банковое дѣло	1	1
22. Транспортное дѣло	2	2
23. Техника биржевого дѣла	—	—
24. Педагогика	—	—
25. Теорія вѣроятности	—	—
26. Математическій анализъ страховыхъ величинъ	—	—
27. Общественная медицина и санитарія	—	—
Итого	21	22

Практическія занятія.

По гражданскому праву	2	—
„ торговому праву	—	2
„ административному праву	—	1
„ финансовому праву	2	—
„ политической ариѳметикѣ и финансовымъ вычисленіямъ	—	—
„ банковому счетоводству и корреспонденціи (спеціальныя занятія)	—	—
„ страхованію жизни	—	—
„ оцѣночному страхованію	—	—
Семинаріи:		
По прикладной экономіи	(2	2)
„ экономической географіи	(2	2)

...съ ... (5-го семестра); правила о записи и предметы прохожденія курса на подъотдѣленіяхъ см. ниже.

8. Примѣрная схема преподаванія на 1911—12

Первый курсъ.	Семестры. I (Часы)	Семестры. II (Часы)	Второй курсъ.	Семестры. III (Часы)	Семестры. IV (Часы)
Энциклопедія математики (необязат)	3	3	Исторія хозяйственнаго строя Западной Европы	2	2
Физика	4	4	Исторія хозяйственнаго строя Россіи	1	1
Введеніе въ біологію	2	2	Гражданское право	4	4
Химія неорганическая	4	2	Экономическая географія	3	3
Энциклопедія права	3	—	Прикладная экономія	3	3
Политическая экономія (общій курсъ)	4	—	Описательное товаровѣдѣніе	2	2
Исторія политической экономіи	—	2	Химія органическая	2	2
Введеніе въ экономическую политику	—	3	Общее счетовѣдѣніе	3	1
Статистика	2	2	Финансовыя вычисленія	1	1
Коммерческая ариѳметика	2	—	Международное право	—	3
Финансовыя вычисленія	—	2			
Итого	24	20	Итого	21	22

Практическія занятія.			*Практическія занятія.*		
По общей химіи (по группамъ) по 4 часа въ вес. пол.			По политической экономіи	2	2
			„ статистикѣ	2	2
			„ общему счетоводству (по группамъ)	—	2
			„ аналитической химіи (по группамъ)	12	12
				16	18

Примѣчаніе: На подъотдѣленія слушатели Института могутъ записываться только лишь съ 3-го

учебный годъ на Коммерческомъ отдѣленіи.

Третій курсъ.	V	VI
С.-Хозяйст. экономія	3	3
Торговое право	3	3
Химич. технологія	2	2
С.-Хозяйст. товаровѣд.	2	2
Товаровѣдѣніе волок. веществъ	2	2
Технологія минер. веществъ	1	1
Рабочее законод.	—	2
Финансовое право	4	4
Техника банк. дѣла	1	1
Экономич. географія	1	1
Финансов. вычисленія	1	1
Практическ. геологія	2	—
Горно заводское дѣло	2	2
Итого	21	24
Практическія занятія.		
По гражданскому праву	2	—
„ экономич. геогр.	2	—
„ прикл. эконом. (торговой и промыш.)	—	2
„ технич. лабор. (по группамъ)	—	—
„ товаров. вол. вещ. (по группамъ)	1	1
„ финансов. вычисленія	1	—

Семестры. Часы.

Четвертый курсъ.	VII	VIII
Вексельное право	2	—
Конкурсное право	—	2
Транспорт. дѣло	2	2
Морское право	1	—
Организація торг. пром. предпр.	2	2
Фабр. завод. счет. (черезъ годъ)	2	—
С.-Хозяйст. счет. черезъ годъ	—	2
Банковое счетоводство	2	—
Горно-заводск. дѣло	2	—
Политическ. ариѳметика	2	2
Коммерч. корресп. на фран. яз.	1	1
„ „ нѣм. яз.	1	1
„ „ рус. яз.	1	1
Машиновѣдѣніе	—	2
Электротехника	1	—
Итого	19	15
Практическія занятія		
По финансовому праву	2	2
„ торговому праву	2	2
„ горно зав. дѣлу	2	2
„ товаров. вол. вещ.	1	1
„ полит. ариѳметика	1	—
„ спец. бухг. (по гр.) по 2 час. на каж. отд. черезъ одинъ годъ	2	2

курса (5 го семестра). Правила о записи и предметы прохожденія курса на подъотдѣленіяхъ см. ниже.

9. Краткія свѣдѣнія о предметахъ преподаванія.

Кіевскій Коммерческій Институтъ принадлежитъ къ разряду высшихъ учебныхъ заведеній и имѣетъ цѣлью сообщать учащимся познанія по предметамъ высшихъ коммерческихъ и экономическихъ наукъ, подготовлять ихъ къ практической дѣятельности въ торгово-промышленныхъ учрежденіяхъ, къ финансово-технической, государственной и общественной службѣ, а равно и къ преподаванію спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Соотвѣтственно этимъ задачамъ, предметы преподаванія въ Институтѣ распредѣляются между двумя отдѣленіями: Коммерческимъ и Экономическимъ.

Сверхъ того, для болѣе детальнаго изученія нѣкоторыхъ отраслей знанія, учреждены спеціальныя подъотдѣленія *).

10. Правила для записывающихся на подъотдѣленія.

а). На подъотдѣленія могутъ записываться слушатели Института, начиная съ 3-го курса (5-й семестръ).

б). Записывающіеся на подъотдѣленія подаютъ заявленія декану.

в). Каждому слушателю разрѣшается поступить не болѣе, какъ на два подъотдѣленія одновременно.

г). Для поступленія на то или другое подъотдѣленіе, обязательно выдержать предварительно экзамены по слѣдующимъ предметамъ: 1) политической экономіи, 2) статистикѣ, 3) энциклопедіи права, 4) общему государственному праву. Сверхъ того при записи на банковое и страховое подъотдѣленія, нужно выдержать экзамены: по общему счетовѣдѣнію и коммерческой ариѳметикѣ, а на желѣзнодорожное: по физикѣ и химіи неорганической. Къ спе-

*) Объясненіе плановъ отдѣленій и подъотдѣленій интересующіеся могутъ найти въ брошюрахъ: „Записка о Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ". Кіевъ, 1909 г. и „Новый типъ высшаго образованія". Обѣ брошюры можно получить въ канцеляріи Института за обозначенную на нихъ плату.

ціальнымъ занятіямъ на педагогическомъ подъотдѣленіи слушатели допускаются по разсмотрѣніи ихъ успѣховъ въ Учебномъ Комитетѣ.

д). Число слушателей для каждаго подъотдѣленія устанавливается не менѣе, чѣмъ въ 10 человѣкъ и не болѣе 40 человѣкъ.

II. Предметы преподаванія на подъотдѣлахъ.

1. Желѣзнодорожный подъотдѣлъ (для слуш. ком. отд.)

предназначается для лицъ, желающихъ посвятить себя служебной дѣятельности на желѣзныхъ дорогахъ (въ правленіяхъ и управленіяхъ, въ службахъ движенія, коммерческой, матеріальной, сборовъ; въ главной бухгалтеріи и др.).

На подъотдѣлѣ читаются слѣдующіе предметы. На 3-емъ курсѣ: сельско-хозяйственная экономія, торговое право, техническая эксплоатація по службѣ пути, техническая эксплоатація по службѣ движенія, техническая эксплоатація подвижного состава и тяги, сигнализація и централизація, электротехника, телеграфъ и электросигнализація, рабочее законодательство, экономическая географія Южной Россіи, финансовое право, экономія путей сообщенія, служба движенія и телеграфія.

На 4-мъ курсѣ: горнозаводское дѣло, машиновѣдѣніе, транспортное дѣло, желѣзнодорожное счетоводство, желѣзнодорожное товаровѣдѣніе, коммерческая эксплоатація, желѣзнодорожная статистика, тарифы, желѣзнодорожное право, желѣзнодорожная гигіена и вагонное хозяйство.

Практическія занятія: по желѣзнодорожному праву, тарифамъ и желѣзнодорожному счетоводству.

Примѣчаніе: Сверхъ теоретическаго изученія предметовъ подъотдѣленія, отъ учащихся требуется отбываніе практической службы на желѣзной дорогѣ въ теченіе не менѣе 2-хъ мѣсяцевъ; удовлетворительность этой службы должна быть засвидѣтельствована ж. д. начальствомъ. Служащимъ на желѣзныхъ дорогахъ можетъ быть зачислена ихъ служба.

2. Подъотдѣлъ Страхового дѣла.

Подъотдѣлъ этотъ предназначается для лицъ, желающихъ спеціализироваться въ области государственнаго, общественнаго и частнаго страхованія.

Предметы преподаванія на подъотдѣлѣ слѣдующіе: энциклопедія математики, теорія вѣроятностей, математическій анализъ страховыхъ величинъ и экономика страхованія.

Практическія занятія: по страхованію жизни и по огневому страхованію.

3. Подъотдѣлъ Оцѣночно-Податной.

Подъотдѣлъ этотъ предназначается для лицъ, желающихъ подготовить себя къ службѣ въ финансовомъ вѣдомствѣ или въ городскихъ и земскихъ учрежденіяхъ.

Предметы преподаванія на подъотдѣлѣ слѣдующіе: мѣстные финансы, прямое обложеніе.

Практическія занятія: по прямому обложенію.

4. Подъотдѣлъ Банковый.

Подъотдѣлъ этотъ предназначенъ для лицъ, желающихъ посвятить себя банковому дѣлу въ правительственныхъ, общественныхъ и частныхъ кредитныхъ учрежденіяхъ.

Предметы преподаванія на подъотдѣлѣ слѣдующіе: политическая ариѳметика и финансовыя вычисленія.

5. Подъотдѣлъ Педагогическій.

Подъотдѣлъ этотъ учрежденъ для слушателей обоихъ отдѣленій (Коммерческаго и Экономическаго), желающихъ посвятить себя педагогической дѣятельности, въ качествѣ преподавателей въ коммерческихъ средне-учебныхъ заведеніяхъ. Въ зависимости отъ предметовъ, которые избираются для будущаго преподаванія въ учебныхъ заведеніяхъ, подъотдѣлъ имѣетъ нѣсколько цикловъ по спеціальностямъ.

Предметы преподаванія на подъотдѣлѣ слѣдующіе: введеніе въ философію (обязательно), школьная педагогика и теорія (необязательно).

Практическія занятія: по политической экономіи, по законовѣдѣнію, по микробіологіи и по физикѣ.

Обязательное же изученіе другихъ спеціальныхъ предметовъ этого подъотдѣленія находится въ зависимости во 1-хъ отъ (экономическаго или коммерческаго) отдѣленія, на которомъ состоитъ слушатель, и во 2-хъ отъ избираемой спеціальности для преподаванія.

Избравшіе тотъ или другой предметъ, или предметы, обязаны пріобрѣсть не только достаточныя теоретическія свѣдѣнія въ данномъ предметѣ и практическіе навыки, но также свѣдѣнія въ научной и педагогической литературѣ по данному предмету.

Примѣчаніе: Слушатели, готовящіеся къ педагогической дѣятельности, для полученія свидѣтельства на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, должны подвергаться испытаніямъ въ Испытательной Комиссіи Учебнаго Отдѣла Министерства Торговли и Промышленности; отъ Института же они получаютъ удостовѣренія въ прохожденія курса педагогическаго подъотдѣленія по данному циклу предметовъ, съ указаніемъ объ ихъ успѣхахъ, а равно и о практической подготовкѣ къ службѣ.

12. Правила прохожденія курса по новымъ языкамъ.

При томъ образованіи, которое даетъ Кіевскій Коммерческій Институтъ, новые языки играютъ существенную роль, вслѣдствіе чего на прохожденіе курса новыхъ языковъ Учебнымъ Комитетомъ Института обращено серьезное вниманіе.

Запись въ группы у преподавателей новыхъ языковъ необходима для всѣхъ безъ исключенія. Для познакомившихся съ тѣмъ или другимъ языкомъ до поступленія въ Институтъ существуютъ особыя группы, въ которыя слушатели принимаются послѣ предварительнаго собесѣдованія съ соотвѣтствующимъ преподавателемъ. Въ концѣ каждаго семестра производятся зачеты при чемъ, кромѣ устныхъ знаній, особое вниманіе обращено на письменныя работы, производимыя преподавателями въ лекціонные часы.

Срокъ записи въ группы въ осеннемъ полугодіи считается до 1-го октября—въ весеннемъ полугодіи до 1-го февраля. Въ группу можетъ записываться не болѣе 80 человѣкъ. Для записи въ ту или иную группу имѣются особыя карточки, которыя выдаются въ канцеляріи декана соотвѣтствующаго отдѣленія. Слушатель, желающій записаться въ какую-либо группу, заполняетъ ихъ и предъявляетъ соотвѣтствующему преподавателю. *Послѣ указаннаго срока* карточки не выдаются. Не успѣвшіе записаться въ срокъ должны подать на имя Директора прошеніе съ указаніемъ причинъ, помѣшавшихъ имъ въ этомъ, и только послѣ разрѣшенія Директора имѣютъ право на полученіе карточки, на которой Директоръ дѣлаетъ отмѣтку, послѣ чего она предъявляется соотвѣтствующему преподавателю для внесенія въ списки.

13. Учебно-вспомогательныя учрежденія Кіевскаго Коммерческаго Института.

1. Комиссія по организаціи музея товаровѣдѣнія.

Предсѣдатель: т. с. В. И. Ковалевскій, Предсѣдатель Императорскаго Русскаго Техническаго О-ва въ СПБ.

2. Музей товаровѣдѣнія.

Завѣдующій музеемъ проф. П. Р. Слезкинъ.

1) Музей Товаровѣдѣнія имѣетъ главной цѣлью дать возможность студентамъ при изученіи товаровѣдѣнія, наглядно знакомиться съ различными видами товаровъ и процесса производства ихъ.

2) Музей имѣетъ также цѣлью, по мѣрѣ силъ, способствовать развитію торговли и промышленности, служа полезнымъ органомъ для представителей торгово-промышленнаго класса, давая возможность послѣднему выставлять въ Музеѣ свои издѣлія и пользоваться матеріаломъ Музея для выясненія вопросовъ внутренней и внѣшней торговли и промышленности.

3) Въ Музей принимаются отъ торгово-промышленныхъ фирмъ русскихъ и заграничныхъ и частныхъ лицъ товары по всѣмъ отраслямъ промышленности и сельскаго хозяйства, какъ въ видѣ сырья, такъ и издѣлій. Крайне желательно, чтобы поступающія коллекціи были составлены такимъ образомъ, чтобы видѣнъ былъ весь процессъ производства даннаго продукта, начиная отъ сырого матеріала, переходя отдѣльныя стадіи переработки его и кончая достаточнымъ количествомъ образцовъ готоваго матеріала. Кромѣ того, для характеристики мѣста производства важно имѣть историческія свѣдѣнія о фабрикѣ или заводѣ, по возможности, машины, служащія для обработки матеріаловъ или модели ихъ, фотографическіе снимки завода, помѣщеній его, машинъ, приборовъ, прейсъ-куранты, упаковочный матеріалъ и проч.

4) Музей не ограничиваетъ мѣста для помѣщенія фирмой или частнымъ лицомъ своихъ коллекцій и предоставляетъ его безплатно.

5) Музей разрѣшаетъ выставлять коллекціи въ собственныхъ витринахъ или шкафахъ, за непредоставленіемъ же таковыхъ, весь матеріалъ раскладывается въ шкафахъ или витринахъ Музея.

6) Около каждой коллекціи, поступающей въ Музей, вывѣшивается плакатъ съ наименованіемъ и адресомъ фирмы или лица предоставившаго ее Музею.

7) Весь поступившій въ Музей матеріалъ, является его собственностью. Въ случаѣ замѣны прежнихъ, дорого стоющихъ образцовъ, новыми, въ отдѣльныхъ случаяхъ, могутъ быть дѣлаемы исключенія изъ даннаго правила.

8) Музей ежегодно печатаетъ отчеты о своей дѣятельности *).

9) Музей открытъ для посѣщенія ежедневно, кромѣ праздниковъ, отъ 12 до 2 часовъ дня. Входъ безплатный. Разрѣшеніе на осмотръ дается г. Директоромъ Института, а въ его отсутствіе администраціей Музея.

Хранитель музея А. Н. Куприцъ, помощникъ хранителя П. Е. Вольсовъ.

Состоящіе при музеѣ кабинеты и лабораторіи:

а) Лабораторія волокнистыхъ веществъ.
Завѣдующій проф. П. Ф. Ерченко; ассистентъ инж. Ф. Ф. Бобровъ.

б) Лабораторія сельско-хозяйственная.
Завѣдующій проф. П. Р. Слезкинъ.

в) Геологическій кабинетъ.
Завѣдующій проф. І. Р. Кобецкій; ассистентъ П. Ю. Грищинскій.

г) Желѣзнодорожный кабинетъ.
Завѣдующій проф. П. Н. Рышковъ.

д) Кабинетъ торговлевѣдѣнія.
Завѣдывающій преп. Н. Т. Синопійскій-Трофимовъ.

3. Физическій кабинетъ и физическая лабораторія.
Завѣдующій проф. Н. Б. Делоне; препараторъ А. П. Соколовскій.

4. а) Лабораторія аналитической химіи.
Завѣдующій преп. А. А. Голофскій.

б) Лабораторія технической химіи.
Завѣдующій проф. И. В. Егоровъ; лаборантъ М. М. Григорьевъ.

*) Интересующіеся могутъ получать отчеты у кассира Института.

5. Біологическій кабинетъ.

Завѣдующій проф. К. А. Пурієвичъ; ассистентъ В. С. Левицкій.

6. Кабинетъ гигіены.

Завѣдующій приватъ-доц. А. В. Корчакъ-Чепурковскій.

7. Библіотека.

Завѣдующій предсѣдатель библіотечной комиссіи приватъ-доц. Л. Н. Яснопольскій; библіотекарь А. П. Шиманскій.

8. Статистическій кабинетъ.

Завѣдующій преп. А. А. Русовъ; библіотекарь и хранитель Кабинета Е. Е. Миховскій.

9. Семинарій экономическихъ и финансовыхъ наукъ.

Завѣдующій приватъ-доц. Л. Н. Яснопольскій; библіотекарь Гольдельманъ.

14. Правила для занимающихся въ лабораторіяхъ и кабинетахъ и пользующихся книгами изъ библіотекъ Института.

Правила аналитической лабораторіи *) и товаро-испытательной станціи **) Кіевскаго Коммерческаго Института.

1. Съ наступающаго 1911—12 академическаго года при Музеѣ Кіевскаго Коммерческаго Института открывается аналитическая лабораторія и товаро-испытательная станція для качественнаго и количественнаго изслѣдованія различныхъ продуктовъ потребленія, каковые могутъ доставляться въ лабораторію для изслѣдованія и посторонними лицами и учрежденіями, имѣющими въ томъ надобность.

2. За производство анализовъ и изслѣдованій продуктовъ для частныхъ лицъ установлена доступная плата, взимаемая по особому тарифу.

3. Продукты, подлежащіе полному изслѣдованію, доставляются въ лабораторію при формальномъ предложеніи въ достаточныхъ количествахъ и соотвѣтственной упаковкѣ, согласно особыхъ ука-

*) Утверждены въ засѣданіи Учебнаго Комитета 9 апрѣля 1909 года.

**) Утверждены въ засѣданіи Учебнаго Комитета 28-го мая 1911 года.

заній для каждаго рода ихъ. При неисполненіи этихъ условій лабораторія не можетъ гарантировать точныхъ и полныхъ результатовъ.

4. Пересылка продуктовъ производится за счетъ и рискъ заказчика; за порчу продуктовъ при пересылкѣ лабораторія не отвѣчаетъ и имѣетъ право требовать вторичныхъ образцовъ.

5. Назначеніе срока изслѣдованій зависитъ отъ лабораторіи. Доставляемые продукты будутъ изслѣдоваться по очереди, но очередь можетъ быть нарушена для продуктовъ скоропортящихся или въ экстренныхъ случаяхъ (по особой повышенной таксѣ).

6. Результаты изслѣдованія сообщаются на бланкахъ лабораторіи за текущимъ № съ приложеніемъ печати лабораторіи и подписью лаборанта. Копіи съ нихъ сохраняются въ архивѣ лабораторіи. Результаты изслѣдованій, безъ разрѣшенія кліента, оглашенію не подлежатъ. Исключенія могутъ быть сдѣланы лишь въ случаѣ явной опасности даннаго продукта для потребленія и всякій разъ по постановленію Правленія Института. Цифровымъ обезличеннымъ матеріаломъ однако лабораторія оставляетъ за собою право пользоваться для составленія сводокъ, очерковъ и т. п.

7. При лабораторіи организуется справочный отдѣлъ для выдачи разнаго рода справокъ и указаній, относящихся къ ея цѣлямъ и задачамъ, за особую плату.

8. Лабораторія функціонируетъ въ теченіе всего академическаго года съ установленными перерывами.

Примѣчаніе. Такъ какъ собственное оборудованіе лабораторіи въ настоящее время дозволяетъ производить полное изслѣдованіе лишь тканей, пряжи и т. п. текстильныхъ сортовъ, а для изслѣдованія др. родовъ продуктовъ приходится прибѣгать къ услугамъ др. лабораторій Института, то въ началѣ своей дѣятельности лабораторія оставляетъ за собой право отказа отъ производства анализа нѣкоторыхъ веществъ и товаровъ, списокъ коихъ будетъ своевременно опубликованъ.

Въ теченіе будущаго академическаго года предполагается въ лабораторіи произвести систематическое изслѣдованіе всѣхъ главныхъ продуктовъ потребленія въ г. Кіевѣ. Образцы будутъ покупаться въ лавкахъ, базарахъ и вообще пунктахъ, гдѣ товаръ переходитъ въ руки розничнаго потребителя.

Правила для занимающихся въ лабораторіи технической химіи *).

Къ занятіямъ по технической химіи допускаются только тѣ слушатели, которые получили зачетъ по качественному и количественному анализу и сдали экзаменъ по химіи неорганической и органической. Прослушаніе курса лекцій по товаровѣдѣнію и технической химіи желательно, но не необходимо.

1. Выпариваніе и кипяченіе жидкостей, содержащихъ кислоты, хлоръ, бромъ, аммiакъ, а также прокаливаніе аммонійныхъ солей должно производится подъ тягой.

2. Жидкости, содержащія сѣроводородъ, сѣрнистый аммоній, сѣроуглеродъ, хлоръ, бромъ, должны помѣщаться въ сѣроводородной комнатѣ; тамъ же должно производиться фильтрованіе, промываніе и разложеніе сѣрнистыхъ соединеній.

3. Во избѣжаніе засоренія трубъ, жидкости съ осадками фильтры, бумага, спички и окурки должны выбрасываться въ предназначенную для этого посуду, такъ какъ очистка трубъ можетъ повлечь за собой пріостановку занятій въ лабораторіяхъ.

4. Сильно кислыя жидкости можно выливать въ раковины, но при непремѣнномъ условіи пускать изъ крана сильную струю воды.

5. Жидкости, содержащія соли серебра, не нужно выливать въ раковины, а въ предназначенную для этого посуду.

6. Въ цѣляхъ поддержанія порядка и чистоты въ лабораторіяхъ, г. г. занимающіеся должны убирать по окончаніи занятій посуду и приборы въ столъ (за исключеніемъ посуды съ жидкостями, указанными въ § 2); въ противномъ случаѣ содержимое посуды будетъ выбрасываться, а посуда возвращаема въ складъ.

7. Реактивы, предназначенные для общаго пользованія, всегда должны быть на мѣстахъ.

8. Въ виду громаднаго расхода газа, г. г. занимающимся вмѣняется въ обязанность не оставлять газовыхъ горѣлокъ зажженными, а запирать газовые краны, по минованіи въ нихъ надобности. Въ особенности обращается вниманіе г. г. практикантовъ на то, чтобы газовые краны были плотно закрыты, во избѣжаніе просачиванія газа въ помѣщеніе лабораторій и могущихъ быть несчастныхъ случаевъ отъ взрыва и пожара.

---

*) Утверждены въ засѣданіи Учебнаго Комитета 9 апрѣля 1909 года.

9. Къ занятіямъ по качественному и количественному анализу допускаются слушатели, сдавшіе экзамены по неорганической химіи, къ занятіямъ же по технической химіи—только сдавшіе экзамены по неорганической и органической химіи и прошедшіе качественный и количественный анализы.

10. Входъ постороннимъ лицамъ, во избѣжаніе помѣхи въ работахъ, въ помѣщенія лабораторій воспрещается.

11. Гг. студенты, занимающіеся въ лабораторіяхъ, получаютъ опредѣленный комплектъ посуды, а въ аналитической лабораторіи и реактивы отъ служителя, при чемъ посуда должна быть выдана чистая и въ исправномъ состояніи.

12. По окончаніи занятій, посуда сдается обратно въ чистомъ же и исправномъ видѣ.

13. Въ случаѣ утраты нѣкоторыхъ предметовъ, изъ числа выданныхъ г. г. практикантамъ, послѣдніе должны возмѣстить лабораторіи стоимость утраченныхъ вещей, по установленной таксѣ.

14. Выдача посуды и практическихъ задачъ производится въ опредѣленное время.

Правила для занимающихся вѣсовымъ анализомъ *)

1. Во избѣжаніе поломки и порчи вѣсовъ, взвѣшивать могутъ исключительно лица, занимающіяся количественнымъ анализомъ, при чемъ способъ обращенія съ вѣсами указывается только руководителемъ занятій.

2. Въ случаѣ неисправности вѣсовъ, г. г. практиканты не должны исправлять ихъ сами, а обращаться къ помощи руководителя.

3. При взвѣшиваніи должны соблюдаться слѣдующія правила:

а) Взвѣшиваніе рѣшительно всѣхъ веществъ производится въ закрытыхъ стклянкахъ.

б) Передъ взвѣшиваніемъ нужно убѣдиться въ исправности вѣсовъ.

в) Ставя на чашки вѣсовъ взвѣшиваемый предметъ и разновѣски, и снимая ихъ обратно, соблюдать осторожность и не подвергать вѣсовъ толчкамъ.

г) Не брать руками разновѣсокъ.

д) Не класть взвѣшиваемыхъ предметовъ и разновѣсокъ на чашки не арретированныхъ вѣсовъ.

---

*) Утверждены въ засѣданіи Учебнаго Комитета 9 апрѣля 1909 г.

е) По окончаніи взвѣшиванія, вѣсы должны быть арретированы, на чашкахъ вѣсовъ не должно оставлять ничего, а разновѣски должны быть уложены въ футляръ.

ж) Предметы, вѣсъ которыхъ превышаетъ 50 грам., не должны быть взвѣшиваемы.

з) Въ случаѣ утраты разновѣсокъ, или порчи вѣсовъ, исправленіе вѣсовъ и пріобрѣтеніе разновѣсокъ производится за счетъ лица, испортившаго вѣсы и потерявшаго разновѣски. Если же не удается установить лица, нанесшаго лабораторіи ущербъ, расходы по исправленію вѣсовъ и покупкѣ утерянныхъ разновѣсокъ возлагаютси на всю группу практикантовъ.

Правила пользованія мѣстами въ аналитической лабораторіи.

1) Къ занятіямъ допускаются только лица сдавшія экзаменъ изъ курса неорганической химіи и представившіе разрѣшеніе отъ Декана на право занятія мѣста въ лабораторіи. Въ исключительныхъ случаяхъ при наличности свободныхъ мѣстъ въ лабораторіи, могутъ быть допущены и лица, не сдавшіе экзамена, но по коллоквіуму.

2) О началѣ занятій слѣдующаго семестра, вывѣшивается объявленіе въ концѣ текущаго семестра. Въ первые три дня по открытіи лабораторіи принимаются студенты, не закончившіе занятій въ предыдущемъ полугодіи за позднимъ поступленіемъ въ лабораторію.

3) Вновь поступающіе должны записаться въ теченіи недѣли со дня открытія лабораторіи на мѣстѣ, вывѣшиваемомъ въ первый день начала занятій, при чемъ мѣста даются по старшинству семестровъ въ порядкѣ записи на мѣстѣ. Послѣ этого срока въ очередь ставятся въ порядкѣ поступленія заявленій.

4) Съ разрѣшенія завѣдующаго лабораторіей допускается временное прекращеніе работы съ обязательной сдачей мѣста, которое передается слѣдующему въ очереди, при чемъ при возобновленіи занятій, послѣ перерыва, мѣсто можетъ быть дано внѣ очереди.

5) Не являющійся въ лабораторію въ теченіе недѣли лишается мѣста, и послѣ заявленія о желаніи возобновить работу ставится въ очередь, какъ вновь поступающій.

6) Лицо, занимавшее мѣсто въ лабораторіи въ теченіе 300 рабочихъ часовъ и не окончившее занятій, можетъ быть лишено

мѣста и права на очередь и вновь можетъ получить мѣсто съ разрѣшенія Учебнаго Комитета.

Правила пользованія книгами изъ фундаментальной Библіотеки *).

1. Книги выдаются на домъ студентамъ и вольнослушателямъ, по предъявленіи ими удостовѣренія на право слушанія лекцій въ данномъ семестрѣ, при томъ непремѣнномъ условіи, что подлинные документы получающаго книги хранятся при канцелярія Института.

2. Единовременно студенту можетъ быть выдано на домъ не болѣе трехъ названій книгъ, въ количествѣ до 6 томовъ.

3. Требованія на выдачу книгъ могутъ быть во всякое время опускаемы въ ящикъ, у наружной двери библіотеки. Часы выдачи книгъ публикуются въ началѣ каждаго семестра.

4. При требованіи за одинъ разъ нѣсколькихъ сочиненій, отыскиваются три первыя, и только въ томъ случаѣ, если число томовъ не превышаетъ нормы, разрѣшенной къ выдачѣ требующему ихъ лицу.

5. Не выдаются на домъ никому: а) энциклопедіи, лексиконы, каталоги, библіографическія и другія справочныя книги, б) рукописи, старинныя, рѣдкія и дорогія изданія, в) періодическія изданія. Ими разрѣшается пользоваться въ лекторіи Института.

6. Книги, взятыя для чтенія въ читальнѣ, выносить изъ послѣдней безусловно воспрещается.

7. Срокъ пользованія взятыми на домъ книгами полагается мѣсячный. Желающій удержать книги на слѣдующій мѣсячный срокъ долженъ возобновить свою росписку въ ихъ полученіи, т. е. предъявить книги, взять ихъ подъ новую росписку, что однако допускается лишь въ томъ случаѣ, если книги за это время никѣмъ не требовались. Если книги не возвращены въ срокъ, то библіотека особой повѣсткой требуетъ ихъ возвращенія. Книги, не возвращенныя по прошествіи недѣли послѣ повѣстки, считаются утерянными, и Правленіе взыскиваетъ за нихъ вгройнѣ.

8. Получившій изъ библіотеки книгу отвѣчаетъ за ея сохранность. Въ случаѣ ея порчи, онъ обязывается замѣнить ее новымъ экземпляромъ того же изданія, а если книга была въ переплетѣ, то и переплетенною. Потерявшій или испортившій одинъ

*) Утверждены въ засѣданіи Уч. К. 9 апрѣля 1909 г

томъ многотомнаго сочиненія долженъ замѣнить его новымъ томомъ; въ случаѣ же невозможности пріобрѣсти его отдѣльно, представить полный экземпляръ сочиненія.

9. Во избѣжаніе недоразумѣній по поводу порчи книгъ, каждому получающему книгу предлагается просмотрѣть ее на мѣстѣ выдачи и тутъ же заявить о замѣченныхъ недостаткахъ. Если эти дефекты окажутся важными, то завѣдующій выдачей книгъ собственноручно отмѣчаетъ ихъ на задней доскѣ переплета.

10. Пріемъ возвращаемыхъ книгъ производится безостановочно во все время, пока библіотека не закрыта.

11. Всѣ книги должны быть возвращены въ библіотеку до 20 мая. Независимо отъ указаннаго срока, всѣ лица, пользующіяся библіотекою, обязаны возвращать книги, въ случаѣ выѣзда изъ Кіева. Отпускной билетъ выдается канцеляріей только по предъявленіи справки изъ Библіотеки о томъ, что книгъ за даннымъ лицомъ не числится.

12. Посѣтители библіотеки, въ случаѣ если они приносятъ собственныя книги въ читальню, должны таковыя предъявить библіотекарю.

13. Профессорамъ, преподавателямъ и лаборантамъ книги выдаются безъ ограниченія ихъ числа, срокомъ на полъ года, послѣ чего книги могутъ быть выданы имъ-же еще на полъ года.

14. Для образованія и пополненія особаго отдѣла Библіотеки изъ учебниковъ и учебныхъ пособій, студенты, при поступленіи въ Институтъ, вносятъ по 2 рубля.

15. Выдача книгъ изъ Фундаментальной библіотеки производится по вторникамъ, четвергамъ и субботамъ отъ 11 до 3-хъ часовъ. Книги изъ Фундаментальной библіотеки выдаются срокомъ на одинъ мѣсяцъ. Пріемъ книгъ изъ Фундументальной библіотеки производятся ежедневно отъ 11 до 3 часовъ.

Правила пользованія книгами изъ Библіотеки учебниковъ *).

1. Книги изъ библіотеки учебниковъ выдаются студентамъ и вольнослушателямъ Института, внесшимъ установленную плату въ 2 рубля.

2. Каждый студентъ, внесшій установленную плату, можетъ получить изъ Библіотеки Учебниковъ только одну книгу.

---

*) Утверждены Учебнымъ Комитетомъ 4 октября 1910 года.

3. Срокъ пользованія книгами — 6 недѣль. По истеченіи срока, книга можетъ быть выдана студенту подъ новую росписку, если другихъ требованій на данную книгу не поступало.

4. Просрочившій книгу студентъ облагается штрафомъ по 3 коп. въ день за книгу, каковой штрафъ обращается на развитіе библіотеки. Штрафъ взимается въ теченіе 3-хъ недѣль, послѣ чего книга пріобрѣтается за счетъ задержавшаго.

5. Если книга утеряна, то допускается замѣна ея новымъ экземпляромъ того же изданія, или взимается тройная стоимость книги. Если замѣна книги сдѣлана послѣ установленнаго шестинедѣльнаго срока, то за просроченные дни взыскивается штрафъ.

6. За порчу книгъ и помѣтки въ нихъ, студентъ облагается штрафомъ въ размѣрѣ половинной стоимости книги, если ею можно пользоваться, въ противномъ случаѣ взимается полная стоимость; почему рекомендуется студентамъ просматривать книги при полученіи ихъ изъ библіотеки.

7. Пріемъ и выдача учебниковъ производится по вторникамъ, четвергамъ и субботамъ отъ 10 до 11 часовъ безъ предварительной подачи требовательныхъ листковъ на четвертомъ этажѣ, въ деканскомъ кабинетѣ. Желающіе держать учебникъ дольше 6 недѣль должны обращаться за разрѣшеніемъ къ библіотекарю.

Правила пользованія помѣщеніемъ и книгами семинарія экономическихъ и финансовыхъ наукъ *).

1. Кабинетъ открытъ ежедневно отъ 10 до 2 ч. дня и отъ 5 до 8 ч. вечера.

2. Библіотека открыта ежедневно отъ 10 до 12 ч. дня и отъ 5 до 7 ч. вечера.

3. Библіотекой и помѣщеніемъ Семинарія могутъ пользоваться участники Семинаріевъ или другія лица съ особаго разрѣшенія руководителей Семинаріевъ.

4. Книги на домъ не выдаются, могутъ быть взяты лишь по записи у завѣдующаго библіотекой и ежедневно возвращаются.

Правила пользованія книгами статистическаго кабинета.

1. Книги Статистическаго Кабинета ни въ какомъ случаѣ не выдаются на домъ студентамъ.

2. Пользоваться книгами можно только въ Кабинетѣ.

*) Утверждены въ засѣданіи Уч. К. 28 мая 1911 г.

3. Книги выдаются хранителемъ кабинета ежедневно съ 10 до 12 ч. дня.

4. Выданнымъ книгамъ ведется регистръ, безъ котораго книга не можетъ быть оставлена на рукахъ.

5. Выданной зарегистрованной книгой можно пользоваться только въ кабинетѣ и только до закрытія его, послѣ чего книга возвращается хранителю, или, въ случаѣ его отсутствія, служителю.

6. При возращеніи книги дѣлается отмѣтка въ регистрѣ.

Правила для занятій въ Статистическомъ Кабинетѣ *).

1. Къ занятіямъ въ Статистическомъ Кабинетѣ допускаются студенты Института, сдавшіе экзамены по исторіи и теоріи статистики.

2. Выбравшій тему, обсужденную слушателями, и разработавшій планъ ея выполненія, получаетъ отъ преподавателя входной билетъ для занятій въ кабинетѣ въ часы, назначенные по расписанію.

3. Занятія въ Кабинетѣ производятся только въ учебное время; для занятій въ каникулярное время испрашивается особое разрѣшеніе у Директора Института.

4. Запись очередей для пользованія въ теченіе нѣсколькихъ дней книгами и приборами въ Кабинетѣ производится хранителемъ Кабинета; окончательное расписаніе дней и часовъ занятій разныхъ группъ утверждается преподавателемъ Статистики и вывѣшивается при входѣ въ Кабинетъ.

5. Лица, занявшія мѣста для занятій въ Кабинетѣ, пользуются ими въ опредѣленные часы и о невозможности явиться въ какой-либо день заявляютъ хранителю Кабинета.

6. Хранителемъ Кабинета въ особомъ дневникѣ ведется запись посѣщеній Кабинета и пользованія его пособіями.

7. Мѣсто неявлявшагося для занятій въ теченіе трехъ дней, безъ заявленія, предоставляется слѣдующему по очереди, а утратившій его переносится въ конецъ всѣхъ очередей.

8. Продолжительность занятій каждаго лица опредѣляется преподавателемъ Статистики (но не болѣе 10 дней), о чемъ дѣлается отмѣтка въ дневникѣ.

9. Не закончившіе работы въ Кабинетѣ въ теченіи одного семестра могутъ продолжать ее въ слѣдующемъ семестрѣ.

10. За поломку или порчу пособій отвѣчаетъ произведшій эту порчу.

---

*) Утверждены въ засѣд. Уч. К. 28 мая 1911 г.

Образецъ дневника.

№№ очереди.	Фамиліи, имена.	Семестры записавшихся.	Названіе работы.	Срокъ.	Числа мѣсяцевъ и часы занятій.					
					Мѣсяцъ...........					
					1	2	3	4	5	6
1.	Группа:									
	Гроссулъ.	5	Развитіе земскихъ бюджетовъ Воронежской губ. за годы 1895—1904.	5	3	—	5	Ко	нче	на.
	Неклюковъ.	4			3	2	5			
	Задорожній.	3			5	4	3			
	Вайсманъ.	4			4	3	4			
	Файнштейнъ.	4			2	—	—			
2.	Нуджевская.	3	Подсчетъ грамотныхъ и неграмотныхъ въ Харьковской губ. въ 1897...	4	4	4	4	5		

15. Свѣдѣнія и правила для желающихъ поступить въ число слушателей Кіевскаго Коммерческаго Института

1. Въ число учащихся Института принимаются лица обоего пола въ качествѣ дѣйствительныхъ слушателей и стороннихъ посѣтителей. Сторонніе посѣтители допускаются или къ слушанію всѣхъ лекцій наравнѣ съ дѣйствительными слушателями, или къ посѣщенію лекцій и занятій по отдѣльнымъ предметамъ.

2. Пріемъ учащихся производится два раза въ годъ: передъ началомъ осенняго семестра и передъ началомъ весенняго.

3. Въ число дѣйствительныхъ слушателей Института принимаются лица обоего пола: 1) съ высшимъ образованіемъ, 2) имѣющія свидѣтельства объ окончаніи курса въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ типовъ (въ томъ числѣ объ окончаніи 8 классовъ классическихъ гимназій, полнаго курса коммерческихъ училищъ, 7-ми класовъ художественныхъ училищъ, реальныхъ училищъ, или кадетскихъ корпусовъ, полнаго курса среднихъ техническихъ

и сельско-хозяйственныхъ училищъ, учительскихъ Институтовъ, 7 классовъ женскихъ гимназій и институтовъ, 6 классовъ женскихъ епархіальныхъ училищъ и 4-хъ классовъ духовныхъ семинарій).

Примѣчаніе 1. Лицамъ съ высшимъ образованіемъ могутъ быть, по постановленію Учебнаго Комитета, зачтены тѣ предметы, которые ими были выслушаны въ томъ высшемъ учебномъ заведеніи, въ которомъ они обучались ранѣе, и такимъ путемъ время ихъ обязательнаго пребыванія въ Коммерческомъ Институтѣ можетъ быть сокращено.

Примѣчаніе 2. По особому постановленію Учебнаго Комитета могутъ быть принимаемы въ Институтъ посторонними посѣтителями лица съ образовательнымъ цензомъ ниже средняго.

Примѣчаніе 3. Согласно циркуляру Господина Министра Внутреннихъ дѣла отъ 4-го сентября 1910 года за № 43 церковно-служители и члены педагогическаго персонала, не прослужившіе въ занимаемыхъ ими должностяхъ законнаго 5-тилѣтняго срока, въ Институтъ не принимаются.

4. Прошенія о пріемѣ въ Кіевскій Коммерческій Институтъ подаются на имя Директора Института съ указаніемъ избираемаго отдѣленія и съ приложеніемъ подлинныхъ документовъ: 1) свидѣтельства объ образованіи, 2) метрическаго свидѣтельства, обязательно оплаченнаго установленнымъ гербовымъ сборомъ, разъясненіе Департамента Окладныхъ Сборовъ отъ 15-го іюня 1904 года № 6412, 3) свидѣтельства объ отношеніи къ отбыванію воинской повинности, выданнаго надлежащимъ Воинскимъ Присутствіемъ, 4) свидѣтельства о званіи, 5) свидѣтельства о благонадежности и трехъ засвидѣтельствованныхъ фотографическихъ карточекъ визитнаго формата. (Циркуляры Министерства Торговли и Промышленности отъ 1908 года іюня 16-го дня за № 2930 и отъ 1911 года февраля 5-го дня за № 1141).

Сверхъ того, необходимо представленіе собственноручно написанныхъ копій со всѣхъ упомянутыхъ документовъ, а для лицъ, подлежащихъ отбыванію воинской повинности въ годъ ихъ пріема, или во время прохожденія курса въ Институтѣ, необходимо представленіе копій первыхъ трехъ документовъ въ 2-хъ экземплярахъ.

Примѣчаніе 1. Согласно циркуляру Министерства Торговли и Промышленности отъ 3-го декабря 1908-го года за

№ 6054 лица, находящіяся на службѣ, могутъ ограничиться представленіемъ копій формулярныхъ списковъ о службѣ, приложивъ къ нимъ нотаріальныя копіи своихъ документовъ, перечисленныя въ § 4 сихъ правилъ, вмѣстѣ съ собственноручными копіями и удостовѣреніе своего начальства о неимѣніи препятствій къ поступленію въ Институтъ; послѣднее не требуется, если эти лица по зачисленіи своемъ представятъ аттестатъ о службѣ или подлинные свои документы. Лица, переходящія изъ другихъ высшихъ учебныхъ заведеній, должны представить удостовѣреніе того учебнаго заведенія, въ которомъ они обучаются и списокъ хранящихся тамъ документовъ, а также копію свидѣтельства объ образованіи.

Примѣчаніе 2. Свидѣтельство о благонадежности не требуется отъ лицъ, состоящихъ на государственной или общественной службѣ и отъ окончившихъ учебныя заведенія если со дня полученія ими аттестата до дня подачи прошенія о пріемѣ въ Инстититутъ не прошло 6-ти мѣсяцевъ.

5. При подачѣ прошенія необходимо приложить плату за слушаніе лекцій полностью (52 рубля на Экономическомъ отдѣленіе и 57 рублей на Коммерческомъ отдѣленіи. См. ст. 17. § 1). Деньги за слушаніе лекцій вносятся въ кассу Института. Если прошенія посылаются почтой,—то деньги направляются или почтовыми переводами или переводами черезъ Банки на имя Кіевскаго Коммерческаго Института. Рекомендуется лицамъ, посылающимъ деньги почтою, не посылать таковыхъ вмѣстѣ съ документами въ заказныхъ письмахъ, такъ какъ почта имѣетъ право конфискаціи денежныхъ вложеній.

6. Документы поступившихъ хранятся въ Канцеляріи Института, впредь до окончанія учащимися въ немъ курса, и, на основаніи циркуляра Министерства Торговли и Промышленности отъ 3-го декабря 1908-го года за № 6054, ранѣе этого срока, или выбытія изъ Института, не могутъ быть возвращаемы.

7. Записавшіеся на отдѣльные предметы, документовъ не представляютъ, но записываютъ свѣдѣнія о себѣ на особыхъ бланкахъ. Такія лица должны только обязательно представить свѣдѣнія о своей политической благонадежности и фотографическую карточку, или удостовѣреніе о томъ, что проситель состоитъ въ другомъ высшемъ учебномъ заведеніи, или на государственной и общественной службѣ.

8. *Зачисленіе учащихся* происходитъ въ теченіе августа и января. Принятые въ Институтъ лично получаютъ изъ канцеляріи Института: *входной билетъ*, съ припечатанной къ нему фотографической карточкой, безъ предъявленія котораго *никто въ аудиторіи не допускается, удостовѣреніе о зачисленіи въ слушатели и матрикулъ*, съ припечатанной къ нему фотографической карточкой, для записей, касающихся прохожденія учащимися курса въ Институтѣ.

16. Правила о взносѣ платы, взимаемой со слушателей за посѣщеніе лекцій во время пребыванія ихъ въ Институтѣ.

1. Учащіеся вносятъ *передъ началомъ каждаго полугодія плату* за право ученія, въ размѣрѣ 50 рублей на экономическомъ и 55 рублей на коммерческомъ отдѣленіи и получаютъ право посѣщенія лекцій, какъ своего отдѣленія, такъ и другого отдѣленія, за исключеніемъ лекцій по необязательнымъ предметамъ.

Примѣчаніе. Сверхъ того, всѣ поступающіе слушатели Института обязаны внести единовременный взносъ, въ размѣрѣ 2 рублей въ пользу библіотеки Института, каковой взносъ, по постановленію Совѣта, идетъ на образованіе особой библіотеки учебниковъ и учебныхъ пособій, предназначенныхъ для пользованія слушателей Института.

2. Внесенная за ученіе плата, въ случаѣ принятія въ число слушателей Института не возвращается (§ 16 Устава Института); возвращаются же деньги лишь въ случаѣ отказа въ пріемѣ въ слушатели, для чего необходимо подать прошеніе на имя Директора Института.

3. Слушатели, желающіе посѣщать лекціи по необязательнымъ предметамъ, уплачиваютъ дополнительно по 1 рублю за каждый полугодовой часъ, и получаютъ особые билеты для входа на эти лекціи.

Примѣчаніе. По постановленію Совѣта, необязательныя лекціи могутъ быть безплатными для слушателей и постороннихъ посѣтителей.

4. Посторонніе посѣтители, допускаемые къ *слушанію отдѣльныхъ лекцій*, на основаніи § 5 сихъ правилъ уплачиваютъ: 1) всту-

пительный взносъ при началѣ каждаго полугодія въ размѣрѣ 3 рублей и 2) за каждый полугодовой часъ избираемыхъ ими лекцій по 2 рубля. Къ изученію практическихъ предметовъ (стенографіи, фотографіи, бухгалтеріи, коммерческой корреспонденціи) допускаются лишь тѣ изъ поименованныхъ посѣтителей, которые записались уже не менѣе, чѣмъ на два часа другихъ лекцій.

17. Дополнительныя свѣдѣнія о порядкѣ взноса платы за слушаніе лекцій.

О взносѣ платы и полученіи квитанцій.

§ 1. Слушатели уплачиваютъ деньги за слушаніе лекцій: лично въ кассу Института и переводами по почтѣ на имя Кіевскаго Коммерческаго Института. Плата принимается только полностью, какъ отъ слушателей, такъ и отъ вновь поступающихъ; вновь принятые слушатели уплачиваютъ въ кассу Института два рубля за пользованіе книгами изъ библіотеки каковой взносъ считается на четыре курса.

Слушатели, присылающіе деньги за слушаніе лекцій переводами по почтѣ на имя Института, обязаны на отрѣзномъ купонѣ отчетливо писать: имя, отчество, фамилію (по документамъ) и семестръ, а вновь поступающіе—отъ какого числа посланы документы о пріемѣ. Слушатели, присылающіе деньги переводами черезъ банки г. Кіева, обязаны при сопроводительномъ письмѣ сообщать, отъ кого деньги и за какой семестръ.

§ 2. Сроки для взноса платы слушателями (за исключеніемъ вновь принимаемыхъ, которые вносятъ деньги одновременно съ подачей прошенія о пріемѣ) опредѣляются слѣдующіе: въ осеннемъ полугодіи до 15 Октября, въ весеннемъ—15 Марта. По истеченіи означенныхъ сроковъ, слушатели не уплатившіе подлежатъ исключенію изъ списковъ и вмѣстѣ съ тѣмъ теряютъ право посѣщенія лекцій. Разрѣшенія на отсрочку и разсрочку платы даются только въ исключительныхъ случаяхъ; прошенія объ этомъ подаются только до истеченія срока взноса платы и по истеченіи таковаго, прошенія ни въ коемъ случаѣ не принимаются.

Слушатели, уплатившіе деньги за слушаніе лекцій, получаютъ изъ кассы установленную квитанцію съ подписями Кассира и Бухгалтера и въ полученіи ея должны расписаться. Квитанціи выдаются только тѣмъ лицамъ, на чье имя записаны деньги, получать же квитанцію за другое лицо не разрѣшается.

§ 3. При взносѣ платы слушателями Ин—та въ кассу требуется: 1) представленіе входного билета за прошлый семестръ и 2)—матрикула (съ заполненными въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ предметами, читаемыми на семестрѣ) для отмѣтки бухгалтеромъ объ уплатѣ за семестръ.

Примѣчаніе. Выданная квитанція изъ кассы Ин—та должна быть сохранена для полученія изъ канцеляріи: входного билета, удостовѣренія на жительство и завѣрки матрикула. Дубликаты квитанцій изъ бухгалтеріи не выдаются.

О полученіи денегъ изъ кассы Института.

§ 4. Лица, подавшія прошеніе о пріемѣ и внесшіе плату, но не принятые—обязаны подавать прошенія на имя г. Директора Института, черезъ бухгалтера, о возвратѣ обратно внесенныхъ денегъ, съ предъявленіемъ квитанціи, полученной изъ кассы Ин—та и по прошествіи трехъ дней получаютъ деньги.

Слушатели, уплатившіе за правоученіе болѣе опредѣленной суммы, получаютъ деньги изъ кассы тѣмъ-же порядкомъ.

Поступившія деньги отъ различныхъ учрежденій, для слушателей или землячествъ, состоящихъ при Институтѣ, выдаются только съ разрѣшенія г. Директора.

Объ освобожденіи отъ платы за слушаніе лекцій.

§ 5. Слушатели, нуждающіеся въ освобожденіи отъ платы подаютъ прошенія на имя г. Директора съ приложеніемъ опроснаго бланка.

Прошенія объ освобожденіи отъ платы подаются до 5 Октября въ осеннемъ полугодіи и 5 Марта въ весеннемъ, послѣ чего пріемъ таковыхъ рѣшительно прекращается.

О полученіи ссудъ отъ Обществъ вспомоществованій нуждающимся слушателямъ Ин—та.

§ 6 Слушатели, получившіе ссуды отъ Обществъ вспомоществованій недостаточнымъ слушателямъ при Ин—тѣ, обязаны въ теченіи одного мѣсяца явиться въ кассу Института подписать долговую росписку на имя О—ва на сумму полученной ссуды отъ Общества и, предъявивъ ее кассиру, получаютъ взамѣнъ квитанцію Ин—та.

Слушатели, не обмѣнившіе долговой росписки Общества на квитанцію Института въ теченіе одного мѣсяца, теряютъ право на полученіе ссуды и таковая возвращается обратно въ Общество.

18. Правила о стипендіяхъ.

При Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ учреждены Совѣтомъ его двѣ стипендіи для потомковъ героевъ Севастополя, въ 100 рублей, съ тѣмъ, что означенныя стипендіи поступаютъ въ Институтъ, какъ плата за право слушанія лекцій (Отношеніе Господина Министра Торговли и Промышленности отъ 17 апрѣля 1909 года за № 1710). Стипендіи назначаются ежегодно въ началѣ осенняго семестра срокомъ на одинъ годъ.

При возбужденіи ходатайства о стипендіи требуется: 1) Удостовѣреніе о принадлежности ходатайствующаго о стипендіи къ потомкамъ Севастопольскихъ героевъ, 2.) свидѣтельство о бѣдности и 3.) свѣдѣнія объ успѣхахъ. Стипендіи выдаются только наиболѣе успѣвающимъ.

19. Правила объ обращеніи слушателей Ин-та въ канцелярію.

а) По воинской повинности.

Въ прошеніи, подаваемомъ о возбужденіи ходатайства объ отсрочкѣ на имя Г. Директора, необходимо точно обозначать семестръ, отдѣленіе, имя, отчество и фамилію полностью. При прошеніи необходимо приложить справку объ успѣхахъ, взятую изъ соотвѣтствующаго отдѣленія.

Прежде подачи прошенія необходимо справиться въ пріемные часы въ канцеляріи: имѣются ли среди документовъ копіи въ двухъ экземплярахъ со слѣдующихъ документовъ: а) объ окончаніи учебнаго заведенія, б) метрическаго свидѣтельства (или выписи) и в) свидѣтельства о припискѣ къ призывному участку (или о явкѣ къ исполненію врем.).

Желающіе отбывать воинскую повинность вольноопредѣляющимися должны или указать это въ томъ же прошеніи на имя Г. Директора или подать объ этомъ отдѣльное заявленіе вмѣстѣ съ прошеніемъ объ отсрочкѣ.

О времени для снятія копіи можно узнать въ пріемные часы въ канцеляріи.

б) По экскурсіямъ организуемымъ слушателями Кіевскаго Коммерческаго Института.

Циркуляры Учебнаго Отдѣла Министерства Торговли и Промышленности отъ 31 января 1904 года, 8 іюня 1909 года и 22 февраля 1911 года за №№ 510, 2585 и 1905.

Организаторы экскурсій изъ слушателей Института должны заблаговременно представить Директору Института прошеніе съ указаніемъ, куда желаютъ направиться, и подъ чьимъ руководствомъ, списокъ учрежденій и собственноручное письмо на имя Директора того лица, которое согласно руководить экскурсіей, изъ состава профессоровъ и преподавателей Института, въ коемъ ясно было бы указано обязательство лично сопровождать и руководить экскурсантами, а также списки ѣдущихъ въ экскурсію не менѣе, какъ въ 3-хъ экземплярахъ. Все вышеуказанное участники экскурсій должны представить заблаговременно съ такимъ разсчетомъ, чтобы можно было возбудить своевременно ходатайство предъ соотвѣтствующей администраціей о допущеніи въ данное мѣсто экскурсіи и чтобы можно было получить отвѣтное извѣщеніе на это ходатайство подлежащей губернской власти, т.-е., по крайней мѣрѣ за 2 недѣли.

До полученія этого извѣщенія экскурсія не имѣетъ права выѣхать. Послѣ посылки списка съ ходатайствомъ никакія добавленія въ число участниковъ экскурсіи не допускаются.

Отпускные билеты экскурсантамъ будутъ выдаваться въ томъ случаѣ, если они не менѣе какъ за 2 недѣли до срока отправленія представятъ всѣ требуемыя сими правилами бумаги и за 4 дня до отъѣзда свои удостовѣренія и входные билеты.

в) По организаціи студенческихъ кружковъ и землячествъ.

Высочайше утвержденное 11 іюня 1907 года положеніе Совѣта Министровъ и циркуляръ Министерства Торговли и Промышленности отъ 3 августа 1907 г. за № 4253.

Для организаціи какого-либо землячества или кружка необходимо подать на имя Директора Института прошеніе за подписью не менѣе 10 лицъ, состоящихъ слушателями, съ приложеніемъ двухъ экземпляровъ устава предполагаемаго землячества или кружка. Функціонированіе означеннаго землячества или кружка разрѣшается только послѣ утвержденія и разсмотрѣнія устава Совѣтомъ Кіевскаго Коммерческаго Института и Правленіемъ.

г) По полученію входныхъ билетовъ, отпускныхъ билетовъ, удостовѣреній на жительство и льготныхъ билетовъ.

1) Для полученія билета и удостовѣренія на жительство слушатель долженъ представить въ канцелярію квитанцію бухгалтеріи о внесеніи платы полностью за семестръ, на который получаетъ вышеозначенные документы.

2) Билеты и удостовѣренія на предыдущій семестръ не выдаются, если слушатель по независящимъ отъ канцеляріи Института причинамъ не получилъ означенныхъ документовъ своевременно.

3) Слушатель, не представившій требуемыхъ уставомъ документовъ, получить билета и удостовѣренія не можетъ.

4) Удостовѣренія на жительство не могутъ получить тѣ слушатели, у которыхъ на рукахъ имѣются паспорта, которые необходимо предъявлять въ канцелярію наравнѣ съ остальными документами.

5) Слушатель не имѣетъ права срывать фотографическія карточки съ тѣхъ документовъ, къ которымъ онѣ прикрѣплены канцеляріей.

6) Входные билеты, удостовѣренія и отпускные билеты обязательно подлежатъ возвращенію въ канцелярію Института по окончаніи срока, на который выданы.

7) Для полученія отпускного билета на время нужно за три дня до отъѣзда подать заявленіе объ этомъ въ канцелярію.

8) Для полученія отпуска въ невакаціонные періоды слушатель обязанъ исходатайствовать таковой у Директора Института.

9) Безъ разрѣшенія Директора не въ вакаціонные періоды канцелярія не имѣетъ права выдавать отпускныхъ билетовъ.

10) Льготныя удостовѣренія для проѣзда по желѣзной дорогѣ выдаются только вмѣстѣ съ отпускнымъ билетомъ и лишь до тѣхъ станцій, до которыхъ льгота разрѣшается правилами желѣзныхъ дорогъ.

11) Въ случаѣ утери документа, подлежащаго возвращенію въ канцелярію, слушатель обязанъ заявить объ этомъ въ полицію, получить удостовѣреніе о сдѣланномъ имъ заявленіи, и представить его въ канцелярію вмѣсто утеряннаго документа.

12. Безъ удостовѣренія полиціи о принятіи заявленія объ утерѣ документа, новый ни въ какомъ случаѣ не выдается.

д) По полученію документовъ и всякаго рода удостовѣреній и справокъ.

1. Выдача документовъ, удостовѣреній и всякаго рода справокъ производится въ указанные въ особомъ объявленіи дни и часы.

2) Желающій получить документъ, удостовѣреніе или справку подаетъ объ этомъ на имя Директора Института, или опускаетъ въ ящикъ, возлѣ канцеляріи, заявленіе съ точнымъ и яснымъ указаніемъ имени, отчества и фамиліи просителя, семестра и отдѣленія.

Нужно указать также, для чего и куда нужно представить просимую бумагу, которая выдается не ранѣе какъ черезъ 3 дня (не считая праздничныхъ и воскресныхъ дней) послѣ подачи заявленія. Въ случаѣ если проситель пожелаетъ, чтобы его бумага была ему выслана, то онъ обязанъ приложить соотвѣтственное число марокъ, для высылки ея заказнымъ письмомъ и указать свой подробный адресъ.

3. Документы, удостовѣренія и справки выдаются слушателямъ Института по предъявленіи ими входныхъ билетовъ, а посторонимъ лицамъ по предъявленіи паспорта или иного удостовѣренія личности.

4. Желающій выбыть изъ Института подаетъ объ этомъ прошеніе на имя Г. Директора и при полученіи документовъ возвращаетъ обратно входной билетъ и свидѣтельство на жительство; если же послѣдніе утеряны, то онъ долженъ представить свидѣтельство отъ Полиціи о томъ, что имъ сдѣлано послѣдней соотвѣтствующее заявленіе. Если же слушатель вовсе не получалъ билета и удостовѣренія, то онъ долженъ представить о томъ справку.

Кромѣ того, выбывающій изъ Института предъявляетъ справку изъ библіотеки и учебно-вспомогательныхъ учрежденій о томъ, что за нимъ не числится книгъ и вообще какихъ-либо недочмокъ.

Приложеніе.

СПИСОКЪ ЛИЧНАГО СОСТАВА КІЕВСКАГО КОММЕРЧЕСКАГО ИНСТИТУТА.

Директоръ Института Довнаръ-Запольскій Митрофанъ Викторовичъ, проф. Университета Св. Владиміра.

Почетные Члены Совѣта:

Ковалевскій Владиміръ Ивановичъ, тайный совѣтникъ Предсѣдатель Императорскаго Техническаго Общества.

Немѣшаевъ Клавдій Семеновичъ, тайн. сов., Начальникъ Ю. З. ж. д.

Сухомлиновъ Владиміръ Александровичъ, Генералъ-Адъютантъ, Военный министръ.

Почетный Попечитель:

Графъ Бобринскій Андрей Александровичъ, Членъ Государственной думы. С.-Петербургъ.

Профессоры:

Бажаевъ Владиміръ Гавриловичъ, проф. Кіевс. Политехнич. Института, Ст. Сов.

Бубновъ Николай Михайловичъ, проф. Университета Св. Владиміра, Ст. Сов.

Воблый Константинъ Григорьевичъ, проф. Университета Св. Владиміра.

Гиляровъ Алексѣй Никитичъ, проф. Университета Св. Владиміра, Стат. Сов.

Граве Димитрій Александровичъ, проф. Университета, Св. Владиміра.

Делоне Николай Борисовичъ, проф. Политехническаго Института Стат. Сов.

Дементьевъ Константинъ Григорьевичъ, проф. Кіевскаго Политехническаго Института, Стат. Сов.

Довнаръ-Запольскій Митрофанъ Викторовичъ, проф. Университета Св. Владиміра.

Егіазаровъ Соломонъ Адамовичъ, проф. Университета Св. Владиміра. Дѣйст. Стат. Сов.

Егоровъ Иванъ Васильевичъ, проф. Университета Св. Владиміра, Ст. Сов.

Ерченко Петръ Феофановичъ, проф. Кіевскаго Политехническаго Института, Ст. Сов.

Катковъ Михаилъ Меѳодіевичъ, проф. Университета Св. Владиміра, Ст. Сов.

Косинскій Владиміръ Андреевичъ, проф. Кіевскаго Политехническаго Института, Дѣйст. Ст. Сов.

Красусскій Константинъ Адамовичъ, проф. Политехническаго Института.

Леціусъ Іосифъ Андреевичъ, проф. Университета Св. Владиміра Ст. Сов.

Митюковъ Андрей Каллинниковичъ, проф. Университета Св. Владиміра, Ст. Сов.

Новодворскій Витольдъ Владиславовичъ, проф. Историко-Филологическаго Института Кн. Н. Безбородко.

Пуріевичъ Константинъ Андріановичъ, проф. Университета Св. Владиміра, Ст. Сов.

Рышковъ Павелъ Никифоровичъ, проф. Кіевскаго Политехническаго Института.

Слезкинъ Петръ Родіоновичъ, проф. Кіевскаго Политехническаго Института, Дѣйс. Ст. Сов.

Соколовъ Платонъ Петровичъ, проф. Университета Св. Владиміра.

Тихомировъ Павелъ Васильевичъ, проф. Нѣжинскаго Института Кн. Безбородко

Чеховичъ Павелъ Семеновичъ, проф. Кіевскаго Политехническаго Института, Дѣйст. Ст. Сов.

Эйхельманъ Оттонъ Оттоновичъ, заслуженный Ордин. Проф. Университета Св. Владиміра, Дѣйст. Ст. Сов.

Имѣющіе званіе приватъ-доцентовъ:

Ананьинъ Стефанъ Андреевичъ, пр.-доц. У-та Св. Владиміра, Директоръ Кіев. Ком. Учил.

Кованько Петръ Леонидовичъ, пр.-доц. У-та Св. Владиміра.

Корчакъ-Чепурковскій Авксентій Васильевичъ, докторъ Мед. пр.-доц. У-та Св. Владиміра.

Самофаловъ Николай Васильевичъ, б. Управ. Кіевск. Каз. Пал. Дѣйст. Ст. Сов. Пр.-доц. У-та Св. Владимира.

Ясопольскій Леонидъ Николаевичъ, пр.-доц. С.-Петербургскаго У-та.

Преподаватели:

Барацъ Левъ Германовичъ, помощ. прис. пов., Тов. Управ. Русск. для Внѣш. Торг. Банка.

Ботяновскій Григорій Петровичъ, инжен. элек., Старш. механ. Службы телегр. Ю. З. ж. д.

Возняковскій Антонъ Александровичъ, помощ. нач. От. Служ. Сборовъ Ю. З. ж. д.

Голгофскій Александръ Александровичъ, ассист. У-та Св. Владиміра.

Кобецкій Іосифъ Ромуальдовичъ, инжен.-гидрот. Управ. Гос. Имущ., Ст. Сов.

Лозинскій Николай Владиславовичъ, лиценціатъ Ком. Наукъ Антвер. Инс-та.

Плескачевскій Михаилъ Дмитріевичъ, Зав. Кіев. Тор. школой преп. Бухгалтеріи въ И-тѣ.

Полторацкій Иванъ Николаевичъ, управ. О-ва Взаимн. Кредита.

Радзимовскій Александръ Васильевичъ, преп. Под. гимназіи.

Русовъ Александръ Александровичъ, колежскій ассессоръ.

Синопійскій-Трофимовъ Николай Тріандафиловичъ, преп. Кіевскаго І-го Ком. уч.

Старжинскій Николай Николаевичъ, инж., состоитъ на службѣ Ю. З. ж. д.

Сташевскій Евгеній Дмитріевичъ, пр. рус. исторіи къ К. К. И-тѣ.

Фармаковскій Владиміръ Владиміровичъ, инж. тех. преп. Кіевск. Полит. И-та.

Ярошевичъ Андрей Ивановичъ, инсп. Сѣвер. Страх. Общества.

Преподаватели новыхъ языковъ:

Бартоломуччи Альфредъ Антоновичъ, лекторъ Кіевс. У-та Св. Владиміра.

Берлинъ Робертъ Ансельмовичъ, преп. Кіевск. І ком. уч.

Габерманъ Эдуардъ Альбертовичъ, инж. технол. пр. нѣм. языка въ К. К. И-тѣ.

Турнье Анжелъ Лукьяновичъ, лекторъ Кіев. Ком. И-та.

Кайя Людвигъ Августовичъ, преп. Кіевск. 4-й гимн.

Озолинъ Жанно Фрицевичъ, преп. Кіевск. Торгов. школы.

Шовенъ Андрей Александровичъ, преп. франц яз. въ Кіев. Ком. И-тѣ.

Ферберъ Луиза Ивановна, преп. англ. яз. въ И-тѣ благородн. дѣвицъ.

Ассистенты:

Бобровъ Флавіанъ Флавіановичъ, инж. технолог. ассист. при каф. товар. вол. вещ.

Сивицкій Адольфъ Сигизмундовичъ, инж. технол. преп. Кіевск. Полит. Ин-та.

Соколовскій Александръ Петровичъ, препараторъ при физическомъ кабинетѣ.

Гольдельманъ, завѣдующій семинаріемъ экон. и финан. наукъ.
Миховскій Ефимій Емельяновичъ, хранитель статистическаго каб.
Григорьевъ Михаилъ Михайловичъ, лаборантъ при лаб. технич. химіи.

Личный составъ канцеляріи:

Горбуновъ Владиміръ Дмитріевичъ, дѣлопроизводитель Учебн. Ком. и Совѣта Кіев. Ком. И-та.

Бекешъ Лаврентій Прокофьевичъ, кассиръ Кіевск. Ком. Института.

Вишневскій Димитрій Ивановичъ, бухгалт. Кіевск. Ком. И-та.

Куприцъ Абрамъ Натановичъ, консерваторъ Музея Товаровѣдѣнія.

Журналы, получающіеся въ 1911 году въ библіотекѣ, статистическомъ кабинетѣ и семинаріи финанс. и экономическихъ наукъ.

№ 150. Американское Сельское хозяйство.
№ 82. Биржевой Артельщикъ.
№ 119. Взаимный Кредитъ.
№ 24. Вопросы Физики.
№ 236. Врачебно-санитарная хроника Вол. г
№ 137. Вѣдомость о справоч. цѣн. на матеріалы и припасы въ Москвѣ.
№ 90. Вѣстникъ Винокуренія.
№ 87. Вѣстникъ Воспитанія.
№ 154. Вѣстникъ Взаимнаго Страхованія.
№ 165. Вѣстникъ Европы.
№ 241 Вѣстникъ Знанія.
№ 163. Вѣстникъ Кн. Маг. „Новаго Времени".
№ 94. Вѣстникъ Коопераціи.
№ 128. Вѣстникъ Краснаго Креста.
№ 177. Вѣстникъ Русско-Англійской Торг. Палаты.
№ 29. Вѣстникъ Рыбопромышленности.
№162. Вѣстникъ Пра-а и Нотаріата.
№ 97. Вѣстникъ Сарат. Отд. Имп. Рус. Тех. О-ва.
№ 37. Вѣстникъ Сахарной Промышленности.
№ 11. Вѣстникъ Сельскаго Хозяйства.
№ 182. Вѣстникъ Технической Литературы.
№ 195. Вѣстникъ Технологіи химич. и строит. матеріаловъ.
№ 40 Вѣстникъ Финансовъ, Пром. и Торговли.
№ 18. Вѣстникъ Юго-Западныхъ Жел. Дорогъ.
№ 46. Горнозаводское Дѣло.
№ 187. Горный Журналъ.
№ 105. Горныя и Золотопромышленныя Извѣстія
№ 109. Городское Дѣло.
№ 251. Еврейскій Міръ.
№ 12. Желѣзнодорожное дѣло.
№ 258. Жизнь для всѣхъ.
№ 30. Журналъ Министерства Юстиціи.
№ 186. Журналъ Отд. Статистики и Картографіи.
№ 180. Записки Имп. Новороссійскаго университета.
№ 63. Записки Имп. Харьковскаго Университета
№ 33. Записки Имп. О-ва Сельскаго Хоз. Южн. Рос.
№ 67. Записки Екатерин. Отд. Имп. Рус. Техн. О-ва.
№ 36. Записки Московскаго Отд. Имп. Рус. Техн. О-ва.
№ 129. Записки Новоалександрійскаго Института.
№ 156. Записки по свеклосахарной пром.
№ 189. Записки Ново-Россійскаго О-ва Естествоиспытателей.
№ 176. Земское дѣло.
№ 93. Золото и Платина.
№ 68. Извѣстія Варшавскаго Университета.
№ 246. Извѣстія Восточнаго Института.
№ 38. Извѣстія Астраханскаго Обществ. Управл.
№ 259. Извѣстія Главнаго Управ. Землеустройства и Земледѣлія.
№ 188. Извѣстія Екатеринославской Городской думы.
№ 7. Извѣстія Земскаго Отдѣла.
№ 34. Извѣстія Иркутской Городской Думы.
№ 137. Извѣстія Кіевскаго Коммерческаго Института.
№ 111. Извѣстія Кіевскаго Политехническаго Института.
№ 17. Извѣстія Московской Городской Думы.
№ 142. Извѣстія Москов. О-ва для надзора за паровыми котлами.

№ 183. Извѣстія О-ва Горныхъ Инженеровъ.
№ 121 Извѣстія Общаго Бюро Совѣщ. Съѣздовъ.
№ 130. Извѣстія О-ва Страховыхъ Знаній.
№ 21 Извѣстія Одеской Городской Думы.
№ 194 Извѣстія Оренбургской Городской Думы.
№ 56. Извѣстія Петербургскаго Политехническаго Института.
№ 141. Извѣстія Россійскаго О-ва Винокуренныхъ Заводчиковъ.
№ 118. Извѣстія Харьковскаго Технологическаго Института.
№ 235. Извѣстія Читинской Городской Думы.
№ 124. Извѣстія Южно-русскаго О-ва Технологовъ.
№ 159. Интенданскій Журналъ.
№ 268. Извѣстія Томскаго Технологическаго Института.
№ 269. Извѣстія Кіевскаго Университета.
№ 91. Кавказское хозяйство.
№ 247. Кіевъ.
№ 64. Книжная Лѣтопись Главн. Управл. по дѣл. печати.
№ 145. Коммерческій Дѣятель.
№ 92. Коммерческое Образованіе.
№ 120. Кооперативный Листокъ Подольск. губ.
№ 77. Крестьянское Земледѣліе.
№ 39. Лѣсопромышленный Вѣстникъ.
№ 9. Молочное Хозяйство.
№ 212. Медико Санитарный Сборникъ.
№ 272. Музыка и Жизнь.
№ 107. Наше Дѣло.
№ 161. Нефтяное Дѣло
№ 74. Новости Техники и Промышленности.
№ 103. Нужды Деревни.
№ 248. Объединеніе.
№ 41. Пермская Земская Недѣля.
№ 51. Петербургскій Земскій Вѣстникъ.
№ 10. Право.
№ 25. Промышленность и Торговля.
№ 181. Птицеводсе Хозяйство.
№ 186. Пути Сообщенія Россіи.
№ 164. Пчеловодство.
№ 249. Пчеловодъ.
№ 85. Раціональное Удобреніе.
№ 89. Русское Богатство.
№ 3. Русскій Кожевникъ.
№ 79. Русская Мысль.
№ 2. Русское Судоходство.
№ 52. Русскій Туристъ
№ 170. Садъ и Огородъ.
№ 6. Сборникъ консульскихъ донесеній.
№ 104. Сельскій Сотрудникъ.
№ 72. Селянинъ.
№ 88. Современный міръ.
№ 131 Современный Политехн. Журналъ.
№ 50. Союзъ Потребителей.
№ 155. Стеклозаводчикъ.
№ 73. Стенографическіе Отчеты Госуд. Думы.
№ 185. Студенческая Жизнь
№ 102. Техническое и Коммерческое Образованіе.
№ 160. Техническія Новости.
№ 49. Торговое Дѣло.
№ 179. Труды Донского Отд. Имп. Рус. Техн. О ва.
№ 184. Труды Имп. Вольнаго Экономич. О-ва.
№ 28. Ученыя записки Казанскаго Университета.
№ 132. Ученыя Записки Имп. Юрьевскаго Университета.
№ 166. Физическое Обозрѣніе.
№ . Хлѣбное Дѣло.
№ 5. Хозяйство.
№ 100. Цементъ, его произв. и примѣненіе.
№ 110. Юго-Восточный Хозяинъ.
№ 101. Экономистъ Россіи.
№ 84. Южно-русская Сельскохозяйственная г.

Иностранные.

№ 114. Les Annales.
№ 202. Archiv für Sozialwissenschaft.
№ 211. Der Arbeiterfreund.
№ 242. The Annals ofthe American Academy of Pol. and. Soc. Science
№ 254. The American Stationer.
№ 62. Bulletin of the Bureau of Labor.

№ 252. Bulletin de la Société d'encouragement.
№ 229. Bibliographia Economica Universalis.
№ 228. Berichte der K. K. Oesterr. Und. Konsularämter.
№ 225. Berichte über Handel und Industrie.
№ 224. The Board of Trade Labor gazette.
№ 214. Bank Archiv.
№ 201. Blätter für die gesamten Sozialwissenschaften.
№ 200. Die Bank.
№ 198. Bulletin de statistique et de législation comparée.
№ 218. Der Gewerkverein.
№ 203. Der Deutsche Oekonomist.
№ 217. Deutsches Handels-Archiv.
№ 220. Deutsches statistisches Zentralblatt.
№ 196. Journal des Economistes.
№ 222. Giornale degli economisti e rivista di statistica.
№ 239. Journal de la Société de stat. de Paris.
№ 240. Journal of the Royal Stat. Society.
№ 256. The journal of Political Economy.
№ 223. The Cooperative News.
№ . The Quarterly Journal of Economies.
№ 245. Der Kontorfreund.
№ 115. Lectures pour tous
№ 233. Monthly List of Parliamentary Publication.
№ 232. Monthly List of Oficial Publications
№ 227. Le Musée Social.
№ 210. Die Neue Zeit.
№ 152. Organisation.
№ 207. Political Science quarterly
№ 58. Revue Economique internationale.
№ 123. La Revue.
№ 197. Revue de science et de législation financières.
№ 158. The Magasine of commerce.
№ 134. Stenographische Berichte der Verhandl der Deutsche Reichstag
№ 213. Handel und Gewerbe.
№ 219. Das Handelsmuseum.
№ 151. Zeitschrift für Handelswissenschaft und Handelspraxis.
№ 157. Zeitschrift für Handelsmissenschaftliche Forschung.
№ 206. Zeitschrift für Volkwirtschaft.
№ 215. Zeitschrift für die gesamte Versicherung-Wissenschaft.
№ 230. Zeitschrift des Königlichen Bayerischen Statist. Landesamts.
№ 243. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft.
№ 244. Zeitschrift für die Agrarpolitik.
№ 209. Schweiz Konsum-Verein.
№ 253. Schreibmaschinen-Zeitung.
№ 199. L'Economiste Français.
№ 204. The Economist
№ 231. L'Economiste Européen.
№ 221. L'Emancipation.
№ 44. Jahrbücher fur Nationalökonomie und Statistik.
№ 205. Jahrbuch für gesetzgebung Verwaltung und Volkwirtschaft.

Газеты.

Бюллетени Московской Биржи.
Вѣстникъ Рыбинской Биржи.
Вѣстникъ Кишеневской Городской Думы.
Голосъ Москвы.
Еженедѣльный Листокъ объявл. Валуйск. Земства.
Кіевлянинъ.
Кіевская Мысль.
Кіевскіе Отклики.
Новое Время.
Одесскій Листокъ.
Рада.
Русскія Вѣдомости.
Рѣчь.
Судоходный Листокъ Кіевскаго Округа Пут. Сообщенія.
Торговопромышленная Газета.

Иностранныя.

Berliner Volks Zeitung.
Le Journal.
Le Matin.

Разсмотримъ два конечныхъ ансамбля A и B съ одинаковымъ числомъ n элементовъ. Возьмемъ по одному элементу изъ обоихъ ансамблей, элементъ a_1 изъ ансамбля A и элементъ b_1 изъ ансамбля B_1, и составимъ изъ нихъ нѣкоторую пару, которую назовемъ $\mathfrak{a}_1 = (a_1, b_1)$; изъ оставшихся элементовъ беремъ опять одну пару $\mathfrak{a}_2 = (a_2, b_2)$ и т. д. Послѣ n такихъ операцій мы получимъ n паръ и исчерпаемъ всѣ элементы обоихъ ансамблей. Будемъ называть указанную операцію образованія паръ *сопоставленіемъ* элементовъ обоихъ ансамблей. Указанное нами сопоставленіе можетъ быть названо *однозначнымъ* въ томъ смыслѣ, что каждый элементъ одного изъ ансамблей получаетъ одинъ вполнѣ опредѣленный парный элементъ изъ другого ансамбля.

Понятіе о такомъ однозначнымъ сопоставленіи двухъ ансамблей переносится и на случай двухъ безконечныхъ ансамблей. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ ансамбль, составленный изъ членовъ нѣкотораго ряда

(1) $$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots$$

и кромѣ того ансамбль, составленный изъ натуральныхъ чиселъ

(2) $$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

Мы видимъ, что эти два ансамбля можно однозначно сопоставить, если мы каждому элементу n ансамбля (2) сопоставимъ, какъ парный, элементъ u_n ансамбля (1).

Опредѣленіе. *Говорятъ, что два ансамбля имѣютъ одну и ту же мощность, если ихъ элементы можно однозначно сопоставить.*

§ 176. Характерное свойство безконечнаго ансамбля состоитъ въ возможности имѣть одинаковую мощность со своей частью. Такъ напримѣръ, элементы безконечнаго ансамбля натуральныхъ чиселъ можно однозначно сопоставить съ элементами его части

$$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots,$$

составленной изъ четныхъ чиселъ, ибо всякій элементъ n перваго ансамбля можетъ быть сопоставленъ съ элементомъ $2n$ второго.

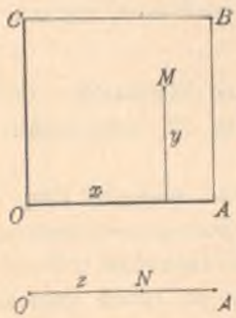
§ 177. Если бы мы, исходя изъ замѣченнаго свойства мощности безконечнаго ансамбля, быть одинаковой съ мощностью его части, сдѣлали предположеніе, не есть ли мощность такое понятіе, которое одинаково для всѣхъ ансамблей, то это предположеніе оказалось бы невѣрнымъ; напримѣръ, если мы ансамбль натуральныхъ чиселъ

(1) $$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

сравнимъ съ ансамблемъ точекъ нѣкотораго отрѣзка, то легко доказать *), что эти два ансамбля не будутъ имѣть одинаковой мощности. Оказывается, что мощность ансамбля точекъ будетъ больше мощности ансамбля (1). Ансамбли, имѣющіе одинаковую мощность съ мощностью ансамбля (1), носятъ названіе *перечислимыхъ* или *нумерованныхъ* ансамблей. Мощность же ансамбля точекъ нѣкотораго отрѣзка носитъ названіе *мощности непрерывности*. Мощность нумерованнаго ансамбля есть самая малая мощность ансамблей, ибо всякій безконечный ансамбль заключаетъ, какъ часть, нѣкоторый нумерованный.

Теорема Cantor'а.

§ 178. *Ансамбль точекъ M (черт. 70), лежащихъ внутри квадрата OACB и на двухъ его сторонахъ OA и OB имѣетъ ту же мощность, что и ансамбль точекъ N, лежащихъ на одной сторонѣ OA квадрата.*



Черт. 70.

Для доказательства теоремы предположимъ длину стороны квадрата равной единицѣ. Опредѣлимъ положеніе точки M внутри квадрата координатами x и y, а положеніе соотвѣтствующей точки N на отрѣзкѣ OA координатой z.

Очевидно, что всѣ три координаты будутъ правильныя положительныя дроби.

Всякое вещественное положительное число можно представить однимъ только способомъ въ видѣ десятичной дроби; единственную двузначность въ предсталеніи чиселъ десятичными дробями даютъ дроби съ періодомъ 9, напримѣръ

$$2,375=2,374999\ .\ .\ .$$

Если мы условимся никогда не писать дробей съ періодомъ 9, а всегда писать равныя имъ конечныя дроби, тогда можно утверждать, что при такомъ ограниченіи всякое число представляется только однимъ способомъ въ видѣ десятичной дроби.

---

*) Граве. Введеніе въ анализъ.

Пусть координаты x и y представляются въ видѣ десятичныхъ дробей, тогда будемъ имѣть

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$
$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots$ суть послѣдовательныя цифры дроби, выражающей координату x, а $b_1, b_2, b_3, \ldots$ суть послѣдовательныя цифры дроби, выражающей координату y. Если мы напишемъ равенство

$$z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots,$$

т. е. будемъ всегда дробь, выражающую координату z, писать такъ: на первое мѣсто послѣ запятой ставить первую цифру a_1 координаты x, на второе мѣсто первую цифру b_1 координаты y, на третье мѣсто слѣдующую по порядку, т. е. вторую цифру a_2 координаты x, на четвертое мѣсто вторую цифру координаты y, т. е. b_2, на пятое мѣсто третью цифру a_3 координаты x и т. д., то произойдетъ однозначное соотвѣтствіе между парой чиселъ (x, y) съ одной стороны и числомъ z съ другой, и теорему можно считать доказанной вполнѣ.

Очевидно, что доказанная для двухъ перемѣнныхъ теорема тѣмъ же пріемомъ доказательства можетъ быть распространена на случай какого угодно числа перемѣнныхъ. Итакъ, ансамбль, который даютъ n перемѣнныхъ

$$(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

причемъ каждое изъ этихъ перемѣнныхъ принимаетъ непрерывный рядъ вещественныхъ значеній въ данныхъ границахъ, имѣетъ ту же мощность, что и ансамбль частныхъ значеній одной вещественной перемѣнной

$$x,$$

измѣняющейся непрерывно въ нѣкоторыхъ границахъ.

Теорема Cantor'а приводитъ къ такому заключенію, что теорія функцій многихъ перемѣнныхъ можетъ быть съ нѣкоторой точки зрѣнія сведена на теорію функцій одного перемѣннаго, или, лучше сказать, теорія функцій многихъ перемѣнныхъ не представляетъ больше общности, чѣмъ теорія функцій одной перемѣнной.

Теорема Weierstrass'а.

§ 179. Будемъ разсматривать безконечный ансамбль комплексныхъ чиселъ, причемъ для большей наглядности будемъ эти числа называть точками плоскости. Будемъ ансамбль называть ограниченнымъ, если всѣ его точки находятся внутри нѣкотораго сомкнутаго контура Σ. Назовемъ нѣкоторую точку α плоскости *точкой сгущенія* этого ансамбля, если вблизи этой точки находится безчисленное множество точекъ ансамбля, причемъ эти точки находятся на такомъ близкомъ разстояніи отъ точки α, что какимъ бы малымъ радіусомъ мы ни описали вокругъ точки α кругъ φ, внутри этого круга окажется безчисленное множество точекъ ансамбля.

Weierstrass доказалъ такую теорему.

Всякій ограниченный безконечный ансамбля имѣетъ по крайней мѣрѣ одну точку сгущенія.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ на плоскости настолько большой квадратъ, чтобы всѣ точки заданнаго ансамбля были внутри его. Разобьемъ дѣленіемъ сторонъ пополамъ квадратъ на четыре равновеликихъ меньшихъ квадрата. Можно утверждать, что внутри одного изъ этихъ меньшихъ квадратовъ будетъ заключаться безчисленное число элементовъ ансамбля. Возьмемъ тотъ изъ меньшихъ квадратовъ, въ которомъ будетъ безчисленное множество точекъ ансамбля. Дѣлимъ его на четыре новыхъ и продолжаемъ эту операцію до безконечности; тогда мы получаемъ безчисленное множество уменьшающихся до нѣкоторой предѣльной точки квадратовъ, внутри которыхъ находится безчисленное множество элементовъ ансамбля. Предѣльная точка, до которой уменьшаются квадраты, и будетъ искомая точка сгущенія.

§ 180. Совокупность всѣхъ точекъ сгущенія даннаго ограниченнаго ансамбля образуетъ новый ансамбль, который носитъ названіе *производнаго ансамбля*. Такъ напримѣръ, если мы разсмотримъ ансамбль изъ раціональныхъ чиселъ, то очевидно, что производный ансамбль будетъ ансамбль всѣхъ вещественныхъ чиселъ, какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ, ибо, какъ извѣстно изъ элементовъ, около всякаго вещественнаго числа, какъ раціональнаго, такъ и ирраціональнаго сгущаются раціональныя числа.

Трансфинитныя числа.

§ 181. Cantor предложилъ вводить въ разсмотрѣніе такъ называемыя *трансфинитныя числа*, которыя какъ будто представляются числами, большими безконечности.

Покажемъ на одномъ примѣрѣ, какъ можно притти къ понятію о трансфинтныхъ числахъ. Будемъ разсматривать такія положительныя функціи $\varphi(x)$, которыя безпредѣльно возрастаютъ съ возрастаніемъ до безконечности положительной перемѣнной x. Установимъ понятіе о *степени возрастанія* функціи, причемъ степень возрастанія функцій будетъ обладать слѣдующимъ свойствомъ вещественныхъ чиселъ, состоящимъ въ томъ, что, если заданы два вещественныхъ числа, то мы всегда можемъ сказать, которое изъ нихъ больше; подобнымъ же образомъ установимъ понятіе о степени возрастанія функцій такъ, чтобы, если заданы двѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, существовали правила, по которымъ можно было бы указать, степень возрастанія которой изъ функцій больше.

Опредѣленіе. *Мы будемъ говорить, что степень возрастанія положительной функціи $\varphi(x)$ больше степени возрастанія функціи $\psi(x)$, если*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty .$$

Тогда въ примѣненіи къ степеннымъ функціямъ мы замѣтимъ, что изъ двухъ функцій

$$\varphi(x) = x^a, \ \psi(x) = x^b,$$

гдѣ a и b два положительныхъ вещественныхъ числа, степень возрастанія той больше, у которой показатель больше, такъ что для степенной функціи

$$x^a$$

можно степень возрастанія задавать числомъ a.

Рядъ функцій

$$(1) \qquad x, x^2, x^3, \ldots x^n, \ldots$$

съ цѣлыми показателями обладаетъ такимъ свойствомъ, что степень возрастанія всякаго члена ряда больше степени предыдущаго члена. Легко убѣдиться, что степень возрастанія функціи e^x больше степени возрастанія каждаго изъ членовъ ряда (1), ибо изъ разложенія функціи e^x въ рядъ при положительныхъ значеніяхъ x получается

$$e^x > \frac{x^{n+l}}{(n+l)!},$$

ибо сумма всего ряда больше каждаго изъ членовъ. Отсюда получаемъ

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x^l}{(n+l)!},$$

увеличивая безпредѣльно x, получаемъ

$$\lim_{x=\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty,$$

причемъ это равенство имѣетъ мѣсто, каково бы цѣлое число n ни было; значитъ, степень возрастанія функціи e^x больше степени возрастанія функціи x^n, сколь бы великъ ни былъ показатель n.

Итакъ, если мы задаемъ показателемъ n степень возрастанія функціи x^n, то должны, на основаніи только что сказаннаго, притти къ заключенію, что степень возрастанія функціи e^x есть безконечно большая, большая всякаго цѣлаго числа n. Но если мы напишемъ рядъ функцій

$$e^x, e^{x^2}, e^{x^3}, \ldots e^{x^n},$$

то въ этомъ рядѣ степень возрастанія всякой функціи больше степени возрастанія предыдущей, а потому, если бы мы хотѣли продолжать сопоставлять степенямъ возрастанія нѣкоторыя числа, то пришлось бы разсматривать возрастающій рядъ чиселъ, бóльшихъ безконечности.

Еще къ болѣе высокимъ степенямъ возрастанія приводитъ разсмотрѣніе слѣдующихъ рядовъ функцій:

$$e^{e^x}, e^{e^{x^2}}, e^{e^{x^3}}, \ldots e^{e^{x^n}}, \ldots$$

$$e^{e^{e^x}}, e^{e^{e^{x^2}}}, e^{e^{e^{x^3}}}, \ldots e^{e^{e^{x^n}}}, \ldots$$

Относительно допустимости и цѣлесообразности введенія въ науку чиселъ трансфинитныхъ мнѣнія математиковъ расходятся.

§ 182. Здѣсь мы считаемъ полезнымъ упомянуть объ изслѣдованіяхъ Euler'а, относящихся къ предѣламъ перемѣнной, опредѣляемой значеніями.

$$a^x, a^{a^x}, a^{a^{a^x}}, \ldots$$

Если число a задано, и если мы обозначимъ

$$\omega_1(x) = a^x, \omega_2(x) = a^{\omega_1(x)} = a^{a^x}, \omega_3 = a^{\omega_2(x)} = a^{a^{a^x}}, \ldots,$$

то предѣлъ $\omega_n(x)$ при n равномъ безконечности будетъ, очевидно, нѣкоторой функціей отъ x, которую мы обозначимъ $\Omega(x)$. Euler указываетъ подробно свойства этой предѣльной функціи.

Чтобы убѣдиться, что предѣлъ дѣйствительно зависитъ отъ числа x, достаточно разсмотрѣть случай $a=\sqrt{2}$. Тогда

$$\omega_n(2)=2,$$
$$\omega_n(4)=4.$$

Очевидно

$$\Omega(2)=2,$$
$$\Omega(4)=4.$$

Euler высказалъ свои заключенія безъ доказательствъ. Я далъ доказательство теоремѣ Euler'а *).

*) D. Gravé. Sur les expressions dites surpuissances. Nouvelles annales des mathématiques. Troisième série, vol. XVII. Février 1898.

ГЛАВА IV.

Алгебраическій анализъ.

§ 1. Алгебраическій анализъ имѣетъ своей главной задачей изученіе свойствъ цѣлыхъ функцій. Его главное значеніе состоитъ въ томъ, что цѣлыя функціи являются простѣйшими и, какъ таковыя, имѣютъ большія приложенія какъ въ чистой, такъ и въ прикладной математикѣ. Не менѣе важное значеніе представляетъ собою то обстоятельство, что въ алгебраическомъ анализѣ выясняется значеніе цѣлаго ряда понятій, которыя употребляются и въ общемъ трансцендентномъ анализѣ. Такъ напримѣръ, въ трансцендентномъ анализѣ употребляется понятіе объ исключеніи перемѣнныхъ изъ системы уравненій; оказывается, что это понятіе можно вполнѣ строго установить только въ алгебраическомъ анализѣ для алгебраическихъ уравненій. Подобнымъ же образомъ только въ алгебраическомъ анализѣ мы выясняемъ вопросъ о рѣшеніи n уравненій съ n неизвѣстными. Нѣкоторые пріемы рѣшенія задачъ алгебраическаго анализа оказываются приложимыми для уравненій въ трансцендентномъ анализѣ.

§ 2. Изученіе цѣлыхъ функцій начинается, естественно, съ разсмотрѣнія функцій простѣйшихъ, а именно, цѣлыхъ функцій съ одной перемѣнной независимой. Въ § 43 гл. I мы указали на основную теорему Gauss'а, согласно которой всякое алгебраическое уравненіе съ одной неизвѣстной имѣетъ такое число корней, сколько единицъ въ показателѣ степени. Такъ какъ съ другой стороны рѣшеніе уравненій въ радикалахъ оказывается невозможнымъ для уравненій выше четвертой степени, то первой основной задачей алгебраическаго анализа является отысканіе пріемовъ, дающихъ возможность вычислить вещественный или мнимый корень уравненія съ какой угодно степенью точности.

Эта задача, имѣющая весьма большое значеніе въ приложеніяхъ, привела къ важнымъ теоретическимъ результатамъ. Математики XVIII столѣтія разбили задачу вычисленія корня алгебраическаго уравненія на двѣ задачи: на задачу такъ называемаго *отдѣленія корня* и на собственную задачу вычисленія уже отдѣленнаго корня. Подъ отдѣленіемъ вещественнаго корня α разумѣется нахожденіе такихъ двухъ чиселъ a и b, чтобы въ промежуткѣ (a, b) заключался только одинъ этотъ корень α уравненія. Задача отдѣленія мнимаго корня состоитъ въ проведеніи такого сомкнутаго контура на плоскости комплексныхъ чиселъ, чтобы внутри этого контура заключался только одинъ корень уравненія.

Возможность рѣшенія задачи отдѣленія корня при помощи конечнаго числа дѣйствій была уже давно замѣчена, не существовало только удобныхъ пріемовъ рѣшенія ея на практикѣ. Нахожденію такихъ пріемовъ были посвящены серьезныя изслѣдованія Fourier, относящіяся къ первой половинѣ XIX столѣтія. Эти изслѣдованія Fourier имѣютъ въ исторіи науки главнымъ образомъ то значеніе, что несомнѣнно подъ вліяніемъ этихъ изслѣдованій Sturm, ученикъ Fourier, нашелъ свою знаменитую теорему. Эта теорема, о которой будетъ дальше сказано, представляетъ одно изъ самыхъ блестящихъ открытій XIX столѣтія.

Теорема Sturm'а даетъ возможность при помощи конечнаго числа дѣйствій указать точное число вещественныхъ корней уравненія, лежащихъ въ какомъ-нибудь промежуткѣ (a, b). Cauchy показалъ приложеніе теоремы Sturm'а къ нахожденію числа мнимыхъ корней внутри даннаго контура. Кромѣ того узко-прикладного значенія, которое теорема Sturm'а можетъ имѣть въ задачѣ отдѣленія корней, эта теорема дала возможность доказывать цѣлый рядъ общихъ предложеній относительно алгебраическихъ уравненій, въ чемъ, конечно, и состоитъ ея главное научное значеніе.

Что касается задачи вычисленія отдѣленнаго корня, то тутъ имѣется цѣлый рядъ пріемовъ, восходящихъ къ Newton'у. Далѣе мы приведемъ указанія на главныя изъ нихъ.

§ 3. Параллельно съ изученіемъ вопроса о численномъ вычисленіи корней уравненія двигалось изученіе свойства новой операціи анализа, которую представляетъ собою рѣшеніе алгебраическихъ уравненій. Прежде всего, конечно, обратилъ на себя вниманіе вопросъ о рѣшеніи уравненій въ радикалахъ. Этотъ вопросъ представилъ цѣлый рядъ трудныхъ задачъ.

Мы замѣтимъ прежде всего, что уже Lagrange подчеркнулъ необходимость раздѣлять всѣ алгебраическія уравненія на двѣ категоріи; *буквенныя* уравненія и *численныя* уравненія.

Подъ буквеннымъ уравненіемъ разумѣется уравненіе, всѣ коэффиціенты котораго обозначаются буквами, т. е., другими словами, они считаются независимыми перемѣнными, такъ что ни одному изъ этихъ коэффиціентовъ не придается опредѣленнаго численнаго значенія и не указывается никакихъ зависимостей между коэффиціентами. Подъ численными уравненіями разумѣются уравненія, въ которыхъ коэффиціенты представляютъ собою нѣкоторыя опредѣленныя числа, или, выражаясь болѣе общимъ образомъ, между коэффиціентами существуютъ нѣкоторыя соотношенія.

Послѣ того какъ Abel доказалъ, что буквенныя уравненія выше четвертой степени не рѣшаются въ радикалахъ, получилъ основное значеніе вопросъ о рѣшеніи численныхъ уравненій въ радикалахъ. Тутъ прежде всего является задача для всякой степени уравненія найти всѣ классы уравненій, рѣшающихся въ радикалахъ. Далѣе, необходимо рѣшить такую задачу: если задано численное уравненіе, то сказать, рѣшается оно въ радикалахъ, или нѣтъ, и, наконецъ, если доказано, что заданное уравненіе рѣшается въ радикалахъ, то найти радикальныя выраженія корней.

Изслѣдованія всѣхъ этихъ вопросовъ, начавшіяся съ Lagrange'а, Gauss'а, Abel'я и Galois, привели къ большому прогрессу математики. Я имѣю въ виду созданіе новаго отдѣла математики, носящаго названіе *теоріи группъ*.

§ 4. Въ 1801 г. появилось знаменитое сочиненіе Gauss'а „Disquisitiones arithmeticae", посвященное такъ называемой теоріи чиселъ. До Gauss'а подъ теоріей чиселъ разумѣлась совокупность доктринъ, относящихся къ свойствамъ натуральныхъ чиселъ. Disquisitiones arithmeticae и дальнѣйшія изслѣдованія Gauss'а по алгебрѣ и теоріи чиселъ представили въ наукѣ эпоху, съ которой начинается сближеніе теоріи чиселъ съ алгебраическимъ анализомъ. Впродолженіи XIX столѣтія вырабатывалась новая часть математики, которую нынѣ называютъ по примѣру Kronecker'а *ариеметической теоріей алгебраическихъ величинъ.* Если разсматривать эту теорію, какъ часть алгебры, то можно ее характеризовать, какъ изучающую свойства корней алгебраическихъ уравненій съ натуральными коэффиціентами; если ее разсмаривать, какъ часть теоріи чиселъ, то ее приходится считать непосредственнымъ обобщеніемъ основныхъ классическихъ предложеній теоріи чиселъ. Ариѳметическая теорія алгебраическихъ величинъ способствовала прогрессу математики введеніемъ въ науку новыхъ, такъ называемыхъ *идеальныхъ* чиселъ.

§ 5. Въ предыдущихъ §-хъ мы вкратцѣ резюмировали тѣ теоріи, которыя связаны съ разсмотрѣніемъ функцій отъ одного перемѣннаго независимаго. Теперь мы обращаемся къ исторіи изученія цѣлыхъ функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ. Тутъ мы должны подчеркнуть двѣ основныя теоріи, *теорію инваріантовъ* и *теорію алгебраическихъ функцій*.

Теорія инваріантовъ изучаетъ такія свойства коэффиціентовъ цѣлой функціи, которыя не мѣняются отъ извѣстныхъ преобразованій перемѣнныхъ. Эта теорія создалась подъ вліяніемъ геометрическихъ соображеній, взятыхъ изъ аналитической геометріи.

Что касается теоріи алгебраическихъ функцій, то она замѣчательна тѣмъ, что привела къ весьма важной математической теоріи, а именно къ теоріи такъ называемыхъ Abel'евыхъ функцій. Abel'евы функціи получили свое происхожденіе при разсмотрѣніи интеграловъ отъ алгебраическихъ функцій.

Комбинаторика. Биноміальные коэффиціенты.

§ 6. Изъ гимназическаго курса мы знаемъ, что число *перемѣщеній* изъ n элементовъ выражается по формулѣ

$$P_n = 1.2.3. \dots n.$$

Во всемъ дальнѣйшемъ мы такое выраженіе будемъ обозначать однимъ изъ слѣдующихъ знаковъ:

$$n! \text{ или } \Pi(n).$$

Далѣе, число *размѣщеній* изъ n элементовъ по m, причемъ эти размѣщенія могутъ отличаться между собою какъ самими элементами, такъ и порядкомъ ихъ, вычисляется по формулѣ

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1) = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m)},$$

и наконецъ, число *сочетаній* изъ n элементовъ по m, гдѣ каждое сочетаніе отличается отъ другихъ непремѣнно входящими въ него элементами, порядокъ же элементовъ безразличенъ, представляется по формулѣ

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-m+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(m)\,\Pi(n-m)}.$$

§ 7. Число сочетаній C_n^m называется также *биноміальнымъ коэффиціентомъ*, потому что, согласно данной Newton'омъ формулѣ возвышенія двучлена въ цѣлую степень, мы имѣемъ

$$(1)\qquad (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ .\ .\ .$$
$$.\ .\ . + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Всѣ биноміальные коэффиціенты можно составить при помощи простого правила, носящаго названіе Pascal'ева треугольника (Pascal. Traité du triangle arithmétique. Paris 1665):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
. & & . & & . & & . & & . \quad .
\end{array}$$

Каждое число, входящее въ треугольникъ, равняется суммѣ двухъ чиселъ, стоящихъ непосредственно выше него. Числа всякой $(n+1)$-ой горизонтали даютъ биноміальные коэффиціенты для разложенія $(a+b)^n$.

Это свойство коэффиціентовъ можетъ быть выражено формулой

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m.$$

Примѣняя послѣднюю формулу къ числамъ $n, n-1, n-2, n-3, \ .\ .\ .\ m+1$,
получимъ рядъ формулъ

$$\begin{aligned}
C_n^m &= C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m,\\
C_{n-1}^m &= C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
C_{m+1}^m &= C_m^{m-1} + C_m^m,
\end{aligned}$$

складывая, получаемъ

$$(2)\qquad C_n^m = C_{m-1}^{m-1} + C_m^{m-1} + \ .\ .\ .\ + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1},$$

ибо

$$C_m^m = 1 = C_{m-1}^{m-1}.$$

§ 8. Если мы подставимъ въ формулу (1) предыдущаго §-а $a=1, b=1$, то получимъ

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n,$$

что даетъ возможность вычислить сумму всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ.

Если мы подставимъ $a=1, b=-1$, то получимъ

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$$

т. е. сумма биноміальныхъ коэфиціентовъ нечетнаго порядка равняется суммѣ биноміальныхъ коэффиціентовъ порядка четнаго.

§ 9. Формула (2) § 7 даетъ возможность рѣшить задачу относительно числа ядеръ треугольной кучи.

Для составленія треугольной кучи складывается на плоскости треугольный слой ядеръ подобно тому, какъ это дѣлается при игрѣ на билліардѣ. Если мы обозначимъ черезъ n число шаровъ въ сторонѣ такого треугольника ядеръ, то число шаровъ во всемъ треугольникѣ будетъ, очевидно,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$$

Если мы теперь на этотъ слой ядеръ положимъ новый треугольный слой такимъ образомъ, что въ его сторонѣ будетъ на единицу меньшее число ядеръ, то число ядеръ въ новомъ слоѣ выразиться черезъ C_n^2, число ядеръ въ третьемъ слоѣ будетъ C_{n-1}^2 и т. д., пока, наконецъ, мы не дойдемъ до случая $n=1$, соотвѣтствующаго вершинѣ кучи.

Итакъ, число ядеръ всей кучи выразится суммой

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

На основаніи только что указанной формулы (2) § 7 послѣдняя сумма будетъ ничѣмъ инымъ, какъ

$$C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3},$$

и мы получаемъ окончательное выраженіе для числа ядеръ въ разсматриваемой кучѣ.

Возвышеніе въ степень полинома.

§ 10. Формула бинома Newton'а обобщается и на случай возвышенія въ цѣлую степень любого многочлена. Начнемъ со случая возвышенія въ степень трехчлена:

$$(a+b+c)^n.$$

Обозначимъ одной буквой сумму первыхъ двухъ членовъ, т. е.

$$a+b=A.$$

Тогда по формулѣ Newton'а имѣемъ

$$(1)\qquad (A+c)^n=\sum_{\gamma=0}^{\gamma=n}\frac{\Pi(n)}{\Pi(\gamma)\,\Pi(n-\gamma)}\,A^{n-\gamma}c^\gamma,$$

причемъ мы предполагаемъ, что

$$\Pi(0)=\Pi(1)=1.$$

Но съ другой стороны мы имѣемъ

$$(2)\qquad A^{n-\gamma}=(a+b)^{n-\gamma}=\sum_{\beta=0}^{\beta=n-\gamma}\frac{\Pi(n-\gamma)}{\Pi(\beta)\,\Pi(\alpha)}\,a^\alpha b^\beta,$$

гдѣ для сокращенія обозначено

$$\alpha=n-\gamma-\beta,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma=n.$$

Подставляя выраженіе (2) въ формулу (1), получимъ

$$(3)\qquad (a+b+c)^n=\sum\frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(\beta)\,\Pi(\gamma)}\,a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

гдѣ сумма распространена на всѣ положительныя или равныя нулю значенія показателей α, β, γ, удовлетворяющія равенству

$$\alpha+\beta+\gamma=n.$$

§ 11. Получается самая общая формула въ такомъ видѣ:

$$(1)\,(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum\frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda_1)\,\Pi(\lambda_2)\ldots(\lambda_m)}\,x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m},$$

гдѣ

$$(2)\qquad \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m=n.$$

Числа, выражаемыя формулой

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda_1)\,\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_m)}$$

при условіи (2), всегда цѣлыя и носятъ названіе *полиноміальныхъ* *коэффиціентовъ*. Ихъ сумма для степени n будетъ равна m^n, ибо эта сумма получается изъ формулы (1), если положить

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1.$$

Число членовъ цѣлой функціи.

§ 12. Будемъ разсматривать цѣлую функцію степени n отъ m независимыхъ перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots x_m.$$

Если цѣлая функція такова, что степени всѣхъ ея членовъ одинаковы и равны n, то цѣлая функція носитъ названіе *однородной* цѣлой функціи или *формы*.

Формы первой степени называются *линейными*, второй степени — *квадратичными*, третьей степени — *кубичными*. Формы съ двумя перемѣнными носятъ названіе *бинарныхъ*, формы съ тремя перемѣнными называются *тройничными*; напримѣръ,

$$x^3 + y^3$$

есть бинарная кубичная форма, а форма

$$x^2 + 3xy + y^2 - yz + 2z^2$$

есть тройничная квадратичная.

§ 13. Будемъ разсматривать цѣлыя функціи, какъ однородныя, такъ и неоднородныя самаго общаго вида, т. е. такія, въ которыхъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ не равенъ нулю, такъ что форма самаго общаго вида будетъ выражаться по формулѣ

$$\Sigma A x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_m^{\lambda_m},$$

гдѣ показатели представляютъ собою всевозможныя комбинаціи чиселъ, удовлетворяющихъ равенству

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n.$$

Если мы въ формѣ самаго общаго вида положимъ единицей одну перемѣнную, напримѣръ x_m, то получится цѣлая функція степени n самаго общаго вида отъ $m-1$ перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots x_{m-1}.$$

Такъ, напримѣръ, самый общій видъ тройничной квадратичной формы будетъ

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \partial xz + eyz + fz^2.$$

Если мы положимъ $z = 1$, то мы получимъ самый общій видъ цѣлой функціи второй степени съ двумя перемѣнными:

(1) $$ax^2 + bxy + cy^2 + \partial x + ey + f.$$

Значитъ, вопросъ нахожденія числа членовъ цѣлой функціи неоднородной равносиленъ нахожденію числа членовъ формы съ бо́льшимъ на единицу числомъ перемѣнныхъ.

Разсматривая выраженіе (1) мы замѣчаемъ, что оно состоитъ изъ трехъ формъ: квадратичной

$$ax^2+bxy+cy^2,$$

линейной

$$\partial x+ey$$

и нулевой степени

$$f.$$

Вообще говоря, всякая цѣлая функція отъ m перемѣнныхъ состоитъ изъ ряда формъ отъ тѣхъ же перемѣнныхъ, т. е. можетъ быть представлена въ видѣ

$$\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_i+\ldots+\varphi_n, \tag{2}$$

гдѣ φ_i нѣкоторая форма i-ой степени.

Обозначимъ черезъ N_n^m число членовъ неоднородной цѣлой функціи n-ой степени общаго вида отъ m буквъ. Очевидно, что то же самое число N_n^m изображаетъ число членовъ формы съ $m+1$ перемѣнными.

На основаніи только что сказаннаго о разложеніи неоднородной цѣлой функціи на формы (2), получаемъ

$$N_n^m=N_0^{m-1}+N_1^{m-1}+\ldots N_n^{m-1}. \tag{3}$$

Такъ какъ самый общій видъ цѣлой функціи степени n съ одной перемѣнной независимой есть

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

и, слѣдовательно, заключаетъ $n+1$ членовъ, то мы имѣемъ

$$N_n^1=n+1. \tag{4}$$

Отсюда на основаніи формулы (3) получаемъ

$$N_n^2=N_0^1+N_1^1+\ldots+N_n^1= \tag{5}$$

$$=1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{1.2}=C_{n+2}^2.$$

У насъ является предположеніе, не будетъ ли существовать равенство

$$N_n^m=C_{n+m}^m. \tag{6}$$

Дѣйствительно, такое равенство существуетъ, потому что оно непосредственно провѣряется при $m=1$ и при $m=2$ на основаніи формулъ (4) и (5), слѣдовательно, можно примѣнить индукцію, показавши, что если равенство (6) справедливо для $m-1$, то оно будетъ справедливо и для m. Возможность же примѣненія такой индукціи слѣдуетъ изъ того, что формула (3) послѣ подстановки вмѣсто N_n^m выраженія C_{n+m}^m обращается въ справедливую формулу (2) § 7.

Теорема Euler'а объ однородныхъ функціяхъ.

§ 14. Разсмотримъ форму

$$f(x_1, x_2 \;.\;.\;.\; x_m)$$

нѣкоторой степени n. Мы замѣчаемъ, что будетъ существовать очевидное тождество

$$(1) \qquad f(tx_1, tx_2, \;.\;.\;.\; tx_m) = t^n f(x_1, x_2, \;.\;.\;.\; x_m),$$

т. е., другими словами, отъ умноженія всѣхъ аргументовъ формы на общаго множителя t вся форма получаетъ этого множителя въ степени, равной степени формы.

Дифференцируя послѣднее тождество по t, мы получаемъ

$$f'_{x_1}(tx_1, tx_2, \;.\;.\;.\;)\, x_1 + f'_{x_2}(tx_1, tx_2, \;.\;.\;.\;)\, x_2 + \;.\;.\;.$$
$$.\;.\;.\; + f'_{x_m}(tx_1, tx_2, \;.\;.\;.\;)\, x_m = n\, t^{n-1} f(x_1, x_2, \;.\;.\;.\; x_m).$$

Подставивъ въ это тождество $t=1$, получимъ извѣстную формулу Euler'а относительно однородныхъ функцій:

$$(2) \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \;.\;.\;.\; + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = nf.$$

Напримѣръ,

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3,$$

откуда

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

§ 15. Формула (1) предыдущаго §-а даетъ возможность обобщить понятіе объ однородныхъ функціяхъ на случай какихъ угодно функцій не цѣлыхъ. Мы будемъ произвольную функцію называть однородной степени n, если она удовлетворяетъ тождеству (1).

Полагая въ этомъ тождествѣ $t = \frac{1}{x_1}$, получимъ

$$x_1^n f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_m}{x_1}\right) = f(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Отсюда вытекаетъ самое общее выраженіе для однородной функціи, а именно

$$x_1^n f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_m}{x_1}\right),$$

гдѣ f совершенно произвольная функція отъ отношеній

$$\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_m}{x_1}.$$

Опредѣлители.

§ 16. Разсмотримъ слѣдующую систему двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными:

(1) $$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2.$$

Рѣшая эти уравненія, получаемъ

(2) $$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Если мы общій знаменатель представимъ символомъ

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix},$$

то этотъ символъ носитъ названіе символа *опредѣлителя*. Таблица четырехъ чиселъ

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{matrix}$$

носитъ названіе матрисы этого опредѣлителя. Эта матриса состоитъ изъ четырехъ чиселъ, расположенныхъ по двумъ горизонталямъ

$$a_{11}, a_{12} \text{ и } a_{21}, a_{22},$$

и двумъ колоннамъ

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22}. \end{matrix}$$

У каждаго элемента матрисы первый индексъ обозначаетъ номеръ горизонтали, въ которой этотъ элементъ находится, а второй индексъ номеръ колонны.

Если мы примемъ знакъ опредѣлителя, то формулы (2) перепишутся такъ:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix}}.$$

§ 17. Разсмотримъ случай трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Рѣшая нашу систему по правиламъ, изложеннымъ въ элементарной математикѣ, мы замѣчаемъ, что въ формулахъ дробнаго вида, дающихъ неизвѣстныя, получается общій знаменатель, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ.

Непосредственныя вычисленія показываютъ, что этотъ знаменатель будетъ

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + \\ + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}. \tag{2}$$

Это выраженіе мы будемъ обозначать символомъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}$$

и называть *опредѣлителемъ третьяго порядка*. Матрица опредѣлителя третьяго порядка состоитъ изъ девяти чиселъ, располагающихся по тремъ колоннамъ, причемъ въ каждомъ элементѣ a_{ik} матрицы первой индексъ i обозначаетъ горизонталь, въ которой этотъ элементъ находится, а второй колонну.

Непосредственное вычисленіе показываетъ, что рѣшеніемъ уравненій (1) мы получаемъ формулы

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1, a_{12}, a_{13} \\ b_2, a_{22}, a_{23} \\ b_3, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, b_1, a_{13} \\ a_{21}, b_2, a_{23} \\ a_{31}, b_3, a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, b_1 \\ a_{21}, a_{22}, b_2 \\ a_{31}, a_{32}, b_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

§ 18. Случай трехъ перемѣнныхъ даетъ возможность сдѣлать догадку о выраженіи опредѣлителей съ большимъ, чѣмъ три, числомъ горизонталей и колоннъ. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая выраженіе (2) предыдущаго §-а, мы замѣчаемъ, что число членовъ опредѣлителя третьяго порядка равно числу перемѣщеній трехъ индексовъ, т. е. равно

$$1.2.3=6.$$

Буквенную часть этихъ шести членовъ можно написать такъ:

$$a_{1k}\, a_{2l}\, a_{3m},$$

причемъ первые индексы написаны въ натуральномъ порядкѣ возрастанія $1, 2, 3$, вторые же индексы представляютъ собою въ разныхъ членахъ опредѣлителя различныя перемѣщенія индексовъ $1, 2, 3$, т. е. слѣдующія шесть системъ такихъ индексовъ:

$$\begin{gathered}1\,2\,3\,,\ 2\,1\,3\,,\ 3\,1\,2,\\ 1\,3\,2\,,\ 2\,3\,1\,,\ 3\,2\,1.\end{gathered}$$

Итакъ, буквенная часть различныхъ членовъ опредѣлителя получается безъ затрудненій, вопросъ состоитъ только въ томъ, при какихъ членахъ надо поставить знакъ $+$ и при какихъ знакъ $-$. Обращаясь къ той же формулѣ (2) предыдущаго §-а, мы приходимъ къ такому простому правилу указанія знака, которое остается справедливымъ и при опредѣлителяхъ болѣе высокого порядка. Разсмотримъ одно изъ перемѣщеній вторыхъ индексовъ, напримѣръ $2\,3\,1$, и будемъ говорить, что въ этомъ перемѣщеніи два индекса образуютъ *порядокъ*, если меньшій индексъ стоитъ налѣво отъ большаго, и *безпорядокъ*, если обратно, большій индексъ лежитъ налѣво отъ меньшаго. Такъ въ нашемъ перемѣщеніи $2\,3\,1$ индексы $2, 3$ образуютъ порядокъ, а индексы $2, 1$ и $3, 1$ образуютъ безпорядки. Тогда правило знаковъ можетъ быть высказано такъ: въ опредѣлителѣ долженъ стоять передъ членомъ знакъ $+$, если въ размѣщеніи вторыхъ индексовъ четное число безпорядковъ, и $-$, если число безпорядковъ нечетное. Напримѣръ, въ данномъ случаѣ перемѣщенія $2\,3\,1$ долженъ быть знакъ $+$, что, дѣйствительно, провѣряется на формулѣ (2) предыдущаго §-а.

§ 19. Отсюда можно дать такое общее опредѣленіе опредѣлителя какого угодно порядка n.

Подъ знакомъ

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

опредѣлителя порядка n разумѣется сумма

$$\Sigma (-1)^I a_{1i} a_{2k} a_{3l} \ldots a_{nr},$$

гдѣ сумма распространена на всевозможныя перемѣщенія

$$(1) \qquad i, k, l, \ldots r$$

чиселъ

$$1, 2, 3, \ldots n,$$

причемъ I равняется числу безпорядковъ въ рядѣ (1). Такъ, напримѣръ, для опредѣлителя пятаго порядка, если мы хотимъ указать знакъ члена, имѣющаго буквенное выраженіе

$$a_{13} a_{25} a_{31} a_{44} a_{52},$$

то придется разсмотрѣть перемѣщеніе

$$3\,5\,1\,4\,2.$$

Безпорядки этого перемѣщенія суть

$$31, 32, 51, 54, 52, 42.$$

Такъ какъ число этихъ безпорядковъ есть четное (6), то долженъ быть поставленъ знакъ $+$.

§ 20. Укажемъ главнѣйшія свойства опредѣлителей, ограничиваясь разсмотрѣніемъ опредѣлителей третьяго порядка.

Разсматривая формулу (2) § 17, мы замѣчаемъ, что въ каждомъ членѣ опредѣлителя попадается только по одному элементу изъ каждой горизонтали и изъ каждой колонны, причемъ если мы возьмемъ какую нибудь горизонталь, то существуютъ непремѣнно члены опредѣлителя, въ которыя входитъ каждый элементъ этой горизонтали. Поэтому опредѣлитель можно разложить по элементамъ каждой изъ горизонталей; если мы разложимъ его по элементамъ каждой изъ горизонталей, то получимъ

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Delta &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, \\ \Delta &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}, \\ \Delta &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}, \end{aligned}$$

гдѣ числа A_{ik}, очевидно, будутъ слѣдующія:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}, && A_{21}=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33},\\
&A_{12}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}, && A_{22}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31},\\
&A_{13}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}; && A_{23}=a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{31}&=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22},\\
A_{32}&=a_{13}a_{21}-a_{13}a_{23},\\
A_{33}&=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.
\end{aligned}
$$

Числа A_{ik} называются *минорами* опредѣлителя. Легко убѣдиться, что A_{ik} будетъ взятый со знакомъ $+$ или $-$ опредѣлитель, который получается изъ всего опредѣлителя пропускомъ i-ой горизонтали и k-ой колонны. Такъ напримѣръ, для полученія A_{22} надо будетъ вычеркнуть изъ всего опредѣлителя горизонталь и колонну, на пересѣченіи которыхъ находится элементъ a_{22}:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}, & \underline{a_{12}} & a_{13}\\
\underline{a_{21}}, & \underline{a_{22}} & \underline{a_{23}}\\
a_{31}, & \underline{a_{32}} & a_{33}
\end{vmatrix}.
$$

Тогда получаемъ опредѣлитель

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}, a_{13}\\
a_{31}, a_{33}
\end{vmatrix}
=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31},
$$

который и будетъ въ данномъ случаѣ равенъ числу A_{22}. Вообще говоря, придется опредѣлитель, который получается путемъ вычеркиванія i-ой горизонтали и k-ой колонны, умножить на выраженіе

$$(-1)^{i+k}.$$

Такимъ образомъ, получается простое правило для нахожденія чиселъ таблицы (2), которое остается въ силѣ и для опредѣлителей какого угодно порядка.

§ 21. Опредѣлитель можно опрокинуть, т. е. его горинзонтали замѣнить колоннами, а колонны горизонталями, такъ что существуетъ тождество

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}, a_{12}, a_{13}\\
a_{21}, a_{22}, a_{23}\\
a_{31}, a_{32}, a_{33}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11}, a_{21}, a_{31}\\
a_{12}, a_{22}, a_{32}\\
a_{13}, a_{23}, a_{33}
\end{vmatrix}.
$$

Такимъ образомъ, мы замѣчаемъ, что опредѣлитель можно раскладывать не только по элементамъ какой-либо горизонтали, какъ это мы дѣлали въ предыдущемъ §-ѣ, но также по элементамъ любой колонны, такъ что мы получаемъ

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31},$$
$$\Delta = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32},$$
$$\Delta = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}.$$

§ 22. Разсматривая выраженіе (2) § 17, мы приходимъ къ къ слѣдующему важному соображенію, что перемѣшеніе двухъ горизонталей (а тѣмъ самымъ и двухъ колоннъ) опредѣлителя приводитъ къ тому, что опредѣлитель мѣняетъ свой знакъ, ибо положительные члены обращаются въ отрицательные и обратно.

Отсюда получается, что если въ опредѣлителѣ двѣ горизонтали (колонны) тождественны, т. е. состоятъ изъ одинаковыхъ чиселъ, то опредѣлитель долженъ тождественно равняться нулю, ибо если мы помѣняемъ другъ съ другомъ эти одинаковыя горизонтали, то съ одной стороны опредѣлитель по сказанному выше долженъ измѣнить знакъ, а съ другой стороны онъ остается безъ измѣненія, такъ какъ перемѣщеніе одинаковыхъ горизонталей не производитъ никакого измѣненія въ составѣ опредѣлителя, и у насъ получается

$$-\Delta = \Delta,$$

откуда

$$2\Delta = 0,$$

т. е.

$$\Delta = 0.$$

§ 23. На основаніи сказаннаго въ предыдущемъ §-ѣ мы получаемъ въ добавленіе къ равенствамъ (1) § 20 еще 6 слѣдующихъ:

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} = 0,$$
$$a_{31} A_{11} + a_{32} A_{12} + a_{33} A_{13} = 0,$$
$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0,$$
$$a_{31} A_{21} + a_{32} A_{22} + a_{33} A_{23} = 0,$$
$$a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0,$$
$$a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33} = 0,$$

потому что эти формулы выражаютъ разложенія по элементамъ одной горизонтали опредѣлителя, имѣющаго двѣ одинаковыя горизонтали.

Итакъ, резюмируя все сказанное, мы получаемъ

$$\Delta = a_{к1} A_{к1} + a_{к2} A_{к2} + a_{к3} A_{к3}, \tag{1}$$
$$0 = a_{l1} A_{к1} + a_{l2} A_{к2} + a_{l3} A_{к3}, \tag{2}$$

или, опрокидывая опредѣлитель, приходимъ къ формуламъ

$$(3) \qquad \Delta = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + a_{3k} A_{3k},$$

$$(4) \qquad 0 = a_{1l} A_{1k} + a_{2l} A_{2k} + a_{3l} A_{3k}.$$

§ 24. Опредѣлитель не мѣняется, если мы къ элементамъ какой-нибудь горизонтали (колонны) прибавляемъ соотвѣтственныя элементы другой горизонтали (колонны), умноженные на нѣкоторое постоянное число k, напримѣръ

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21}, & a_{12} + ka_{22}, & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + ka_{21}) A_{11} + (a_{12} + ka_{22}) A + (a_{13} + ka_{23}) A_{13} =$$
$$= \Delta + k.0 = \Delta.$$

§ 25. Если всѣ элементы какой-либо горизонтали (колонны) имѣютъ множителя k, то этотъ множитель k можно вынести за знакъ опредѣлителя.

Умноженіе опредѣлителей.

§ 26. Иногда полезно писать для большей наглядности элементы опредѣлителя только съ однимъ индексомъ, напримѣръ вторымъ, первый же индексъ указыватъ измѣненіемъ буквы.

Итакъ разсмотримъ опредѣлитель

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Возьмемъ другой подобный:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Оказывается, что произведеніе опредѣлителей (1) и (2) можетъ быть написано въ видѣ слѣдующаго опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3, & a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3, & a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + a_3 \gamma_3 \\ b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + b_3 \alpha_3, & b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \beta_3, & b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 + b_3 \gamma_3 \\ c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3, & c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + c_3 \beta_3, & c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + c_3 \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Рѣшеніе системы линейныхъ уравненій.

§ 27. Формулы § 17 показываютъ, что получается опредѣленное рѣшеніе системы въ томъ случаѣ, если общій знаменатель Δ въ выраженіяхъ для неизвѣстныхъ не равенъ нулю. Если же этотъ общій знаменатель равенъ нулю, тогда можетъ произойти одно изъ двухъ: или получается неопредѣленность, если всѣ неизвѣстныя имѣютъ видъ $\frac{0}{0}$, или невозможность, когда не равенъ нулю одинъ изъ опредѣлителей, стоящихъ въ числителяхъ формулъ (3) § 17.

§ 28. Особенно важный случай представляютъ собою такъ называемыя *однородныя* уравненія:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.$$

Въ этомъ случаѣ получается единственное рѣшеніе

$$x_1=0, x_2=0, x_3=0,$$

если опредѣлитель Δ, составленный изъ коэффиціентовъ, не равенъ нулю, какъ это мы видимъ изъ формулъ (3) § 17. Если же $\Delta=0$, тогда однороднымъ уравненіямъ можно удовлетворить значеніями x_1, x_2, x_3, отличными отъ нуля.

§ 29. Все сказанное относительно уравненій съ тремя неизвѣстными можетъ быть перенесено на случай уравненій съ любымъ числомъ неизвѣстныхъ

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n,$$

причемъ возможность опредѣленнаго рѣшенія системы зависитъ отъ неравенства нулю опредѣлителя, составленнаго изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ.

Вычисленіе опредѣлителей.

§ 30. Изложенныя въ предыдущихъ §-хъ свойства опредѣлителей даютъ возможность получить хорошіе пріемы вычисленія опредѣлителей, не прибѣгая къ вычисленію опредѣлителя по одной его формулѣ, что связано съ большимъ числомъ дѣйствій.

Напримѣръ, требуется вычислить опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 4, 2, 3, 5 \\ 2, 0, 7, 8 \\ 3, 4, 2, 1 \\ 1, 5, 0, 7 \end{vmatrix}.$$

Проще всего поступить такъ: вычитаемъ или прибавляемъ элементы одной горизонтали или колонны къ другой, причемъ стараемся уменьшить эти элементы такимъ образомъ, чтобы въ одной горизонтали или колоннѣ всѣ элементы кромѣ одного оказались равными нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, вычтя изъ третьей горизонтали удвоенную первую, получимъ

$$\begin{vmatrix} 4, 2, & 3, & 5 \\ 2, 0, & 7, & 8 \\ -5, 0, & -4, & -9 \\ 1, 5, & 0, & 7 \end{vmatrix}.$$

Вычитая далѣе изъ четвертой горизонтали удвоенную первую, получимъ

$$\begin{vmatrix} 4, 2, & 3, & 5 \\ 2, 0, & 7, & 8 \\ -5, 0, & -4, & -9 \\ -7, 1, & -6, & -3 \end{vmatrix}$$

и, наконецъ, вычитая изъ первой горизонтали удвоенную послѣднюю, будемъ имѣть

$$\begin{vmatrix} 18, 0, & 15, & 11 \\ 2, 0, & 7, & 8 \\ -5, 0, & -4, & -9 \\ -7, 1, & -6, & -3 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая опредѣлитель по элементамъ второй колонны, получаемъ

$$1.(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 18, & 15, & 11 \\ 2, & 7, & 8 \\ -5, & -4, & -9 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя ко второй горизонтали третью получимъ

$$\begin{vmatrix} 18, & 15, & 11 \\ -3, & 3, & -1 \\ -5, & -4, & -9 \end{vmatrix}.$$

Наконецъ, прибавляя къ первой колоннѣ вторую, а ко второй утроенную третью, вычислимъ окончательный результатъ

$$\begin{vmatrix} 33, & 48, & 11 \\ 0, & 0, & -1 \\ -9, & -31, & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -1.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 33, & 48 \\ -9, & -31 \end{vmatrix} = 33(-31) - (-9).48 = -591.$$

Основныя положенія высшей алгебры.

§ 31. Будемъ разсматривать рѣшеніе алгебраическихъ уравненій съ одной перемѣнной независимой

$$f(x) = 0,$$

гдѣ

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ . \ \ . \ \ . + p_n.$$

Мы видѣли уже, что цѣлая функція $f(x)$ разлагается на n линейныхъ множителей вида $x - \alpha$, гдѣ α изображаетъ одинъ изъ корней уравненія.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что *цѣлая функція есть непрерывная функція* отъ независимаго перемѣннаго x, ибо она состоитъ изъ конечнаго числа членовъ вида

$$p_i x^{n-i},$$

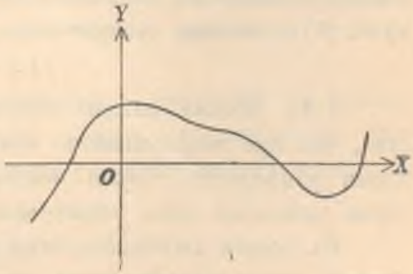
которые суть функціи непрерывныя.

Цѣлая функція можетъ обращаться въ безконечность только при безконечно большихъ значеніяхъ x, ибо при всякомъ конечномъ x получаются конечныя значенія функціи.

Особеннаго вниманія достоинъ случай, когда коэффиціенты p_i суть числа вещественныя. Тогда уравненіе

(1) $\qquad y = f(x),$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція, даетъ нѣкоторую алгебраическую кривую на плоскости (черт. 71), и нахожденіе вещественныхъ корней уравненія $f(x) = 0$ сводится къ нахожденію точекъ пересѣченія кривой (1) съ осью x-овъ.



Черт. 71.

§ 32. Итакъ, будемъ ограничиваться во всемъ дальнѣйшемъ лишь вещественными значеніями коэффиціентовъ цѣлой функціи.

Если мы перепишемъ эту цѣлую функцію такъ:

$$f(x) = p_0 x^n \left[1 + \frac{p_1}{p_0}\frac{1}{x} + \frac{p_2}{p_0}\frac{1}{x^2} + \quad . \quad . \quad . \quad\right],$$

то при достаточно большихъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ x сумма

$$\frac{p_1}{p_0}\frac{1}{x} + \frac{p_2}{p_0}\frac{1}{x^2} + \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

состоящая изъ конечнаго числа членовъ будетъ величиной безконечно малой, а, значитъ, знакъ выраженія, стоящаго въ ломанныхъ скобкахъ будетъ положительный, т. е. совпадать со знакомъ перваго члена 1. Значитъ, можно утверждать, что *знакъ всей функціи $f(x)$ при достаточно большихъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ x совпадаетъ со знакомъ главнаго ея члена $p_0 x^n$.*

§ 33. Теорема. *Уравненіе нечетной степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень.*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ при большихъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ x знакъ функціи совпадаетъ со знакомъ $p_0 x^n$, то, если n число нечетное, при $x = +\infty$ мы получаемъ знакъ, одинаковый со знакомъ p_0, а при $x = -\infty$ получаемъ знакъ, обратный знаку p_0. Значитъ, если мы предположимъ p_0 числомъ положительнымъ, то мы получимъ

$$f(+\infty) = +\infty,$$
$$f(-\infty) = -\infty.$$

Вслѣдствіе непрерывности функціи она должна перейти отъ отрицательныхъ къ положительнымъ значеніямъ, переходя черезъ нуль, т. е. должно существовать такое число c, что

$$f(c) = 0.$$

§ 34. Весьма важно обратить вниманіе на то обстоятельство, что при непрерывномъ измѣненіи коэффиціентовъ уравненія корни измѣняются также непрерывно, такъ что говорятъ, что *корни уравненія суть непрерывныя функціи отъ коэффиціентовъ.*

Въ теоріи алгебраическихъ функцій мы разсматриваемъ тотъ случай, когда коэффиціенты предполагаются цѣлыми функціями отъ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ. Тогда свойство непрерывности корней можетъ быть формулировано такъ: алгебраическая функція есть, вообще говоря, непрерывная функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ, которая можетъ обращаться въ безконечность только при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеніяхъ независимыхъ перемѣнныхъ. Алгебраическія функціи, конечно, будутъ функціями многозначными, ибо алгебраическое уравненіе имѣетъ нѣсколько корней.

§ 35. Если κ послѣднихъ коэффиціентовъ уравненія

$$(1) \quad p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-\kappa} x^\kappa + p_{n-\kappa+1} x^{\kappa-1} + \ldots + p_n = 0,$$

а именно

$$(2) \qquad p_{n-\kappa+1}, p_{n-\kappa+2}, \ldots p_n$$

непрерывно измѣняясь приближаются къ нулю, то уравненіе (1) непрерывнымъ измѣненіемъ переходитъ въ уравненіе

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x^\kappa = 0,$$

которое имѣетъ κ корней равныхъ нулю, ибо первая часть уравненія дѣлится на x^κ. Мы можемъ высказать такое соображеніе, что при непрерывномъ уменьшеніи до нуля κ послѣднихъ коэффиціентовъ κ корней уравненія непрерывно приближаются къ нулю.

Замѣнимъ x на $\frac{1}{y}$, тогда у насъ получается уравненіе

$$(3) \qquad p_n y^n + p_{n-1} y^{n-1} + \ldots + p_1 y + p_0 = 0,$$

коэффиціенты котораго суть тѣ же, что и въ уравненіи (1), только написанные въ обратномъ порядкѣ.

Если x приближается къ нулю, то y приближается къ безконечности, а отсюда, разсматривая уравненіе (3), мы получаемъ слѣдующую теорему.

Если k старшихъ коэффиціентовъ (2) уравненія (3) приближаются непрерывно къ нулю, то k корней уравненія (3) дѣлаются безконечно большими.

§ 36. Особенно важнымъ свойствомъ уравненій съ вещественными коэффиціентами является попарная сопряженность мнимыхъ корней; другими словами, если уравненіе имѣетъ корень

$$\alpha + \beta i,$$

то оно должно имѣть также корень

$$\alpha - \beta i.$$

Итакъ предположимъ, что существуетъ тождество

$$f(\alpha + \beta i) = 0.$$

Дѣлимъ $f(x)$ на

$$(x-a)^2+\beta^2=[x-\alpha-\beta i][x-\alpha+\beta i];$$

получимъ

(1) $$f(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x)+mx+n,$$

гдѣ коэффиціенты m и n остатка числа вещественныя, ибо происходятъ при помощи раціональныхъ дѣйствій изъ вещественныхъ коэффиціентовъ заданной функціи $f(x)$ и вещественныхъ чиселъ α и β.

Полагая въ тождествѣ (1) $x=\alpha+\beta i$, получимъ тождество

$$m(\alpha+\beta i)+n=0,$$

которое распадается на два

$$m\alpha+n=0,$$
$$m\beta=0;$$

эти же тождества даютъ

$$m=0,\ n=0,$$

т. е. остатокъ отъ дѣленія тождественно равенъ нулю, и первая часть разсматриваемаго уравненія имѣетъ видъ

$$f(x)=[x-\alpha-\beta i][x-\alpha+\beta i]\varphi(x),$$

что показываетъ, что уравненіе имѣетъ также корень $\alpha-\beta i$.

О кратныхъ корняхъ.

§ 37. Теорема Taylor'а даетъ возможность написать общій видъ остатка отъ дѣленія функціи $f(x)$ на $(x-a)^k$. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ формулу Taylor'а въ такомъ видѣ:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ .\ .\ .\ +$$
$$+\frac{(x-a)^{k-1}}{1.2...(k-1)}f^{(k-1)}(a)+\frac{(x-a)^k}{1.2\ .\ .\ .\ k}f^{(k)}(a)+\ .\ .\ .+\frac{(x-a)^n}{1.2\ .\ .\ .\ n}f^{(n)}(a).$$

Мы видимъ, что остаткомъ отъ дѣленія на $(x-a)^k$ функціи $f(x)$ является сумма k первыхъ членовъ, т. е.

(1) $$f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+...+\frac{(x-a)^{k-1}}{1.2...(k-1)}f^{(k-1)}(a).$$

Если мы хотимъ, чтобы число a было корнемъ функціи $f(x)$ кратности k, то остатокъ (1) долженъ тождественно равняться нулю, и мы получаемъ

(2) $$f(a)=0, f'(a)=0, f''(a)=0,\ .\ .\ .\ f^{(k-1)}(a)=0.$$

Эти равенства въ связи съ неравенствомъ

(3) $$f^{(k)}(a)\text{ не}=0$$

даютъ условія необходимыя и достаточныя, чтобы корень a имѣлъ кратность k. Очевидно, что корень кратности k функціи $f(x)$ будетъ корнемъ кратности $k-1$ производной $f'(x)$, ибо если мы обозначимъ

$$f'(x) = \varphi(x),$$

то условія (2) и (3) перепишутся въ такомъ видѣ:

$$\varphi(a) = 0, \varphi'(a) = 0, \ldots \varphi^{(\kappa-2)}(a) = 0;$$
$$\varphi^{(\kappa-1)}(a) \text{ не} = 0.$$

§ 38. Соображенія предыдущаго §-а позволяютъ освободить уравненія отъ кратныхъ корней, т. е. перейти отъ уравненій съ кратными корнями къ новымъ уравненіямъ, у которыхъ эти кратные корни оказываются простыми. Это освобожденіе уравненій отъ кратныхъ корней совершается при помощи конечнаго числа раціональныхъ дѣйствій, состоящихъ въ нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій.

Обозначимъ черезъ X_1 произведеніе линейныхъ множителей

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots,$$

гдѣ $a, b, c, \ldots$ суть простые корни, т. е. корни первой кратности заданной функціи $f(x)$. Черезъ X_2 обозначимъ подобное произведеніе

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots,$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ различные корни второй кратности функціи $f(x)$, черезъ X_3 аналогичное произведеніе для корней третьей кратности и т. д. Тогда, считая единицей коэффиціентъ при старшей степени въ функціи $f(x)$, получимъ

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \ldots X_m^m. \tag{1}$$

Такъ какъ кратные корни будутъ корнями производной, причемъ кратность понижается на единицу, то можно будетъ производную заданной функціи представить такъ:

$$f'(x) = \varphi(x) X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_m^{m-1},$$

гдѣ $\varphi(x)$ представляетъ совокупность множителей, соотвѣтствующихъ такимъ корнямъ производной, которые не удовлетворяютъ первообразной функціи.

Найдемъ общій наибольшій дѣлитель $f_1(x)$ функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$; мы получаемъ

$$f_1(x) = l_1 X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_m^{m-1}, \tag{2}$$

гдѣ l_1 постоянное число. Совершенно подобнымъ же образомъ, находя общій наибольшій дѣлитель $f_2(x)$ функціи $f_1(x)$ и производной $f_1'(x)$, получимъ

$$f_2(x) = l_2 X_3 X_4^2 \ldots X_m^{m-2}.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы придемъ къ ряду цѣлыхъ функцій

$$f_3(x) = l_3 X_4 X_5^2 \;.\;.\;.\;.\; X_m^{m-3},$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$f_{m-1}(x) = l_{m-1} X_m.$$

Тогда простое алгебраическое дѣленіе дастъ намъ цѣлыя функціи

$$D_1 = \frac{l_1 f(x)}{f_1(x)} = X_1 X_2 X_3 \;.\;.\;.\; X_m,$$

$$D_2 = \frac{l_2 f_1(x)}{l_1 f_2(x)} = X_2 X_3 \;.\;.\;.\; X_m,$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$D_{m-1} = \frac{l_{m-1} f_{m-2}(x)}{l_{m-2} f_{m-1}(x)} = X_{m-1} X_m,$$

$$D_m = \frac{f_{m-1}(x)}{l_{m-1}} = X_m,$$

откуда черезъ дѣленіе D_i на D_{i+1} получимъ отдѣльно всѣ функціи

$$X_1, X_2, X_3, \;.\;.\;.\; X_m.$$

Итакъ при помощи элементарной выкладки нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій, разсматриваемой въ средней школѣ, мы привели рѣшеніе заданнаго уравненія $f(x) = 0$ съ кратными корнями къ рѣшенію уравненій

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, \;.\;.\;.\; X_m = 0$$

съ простыми корнями.

Поэтому во всемъ дальнѣйшемъ мы можемъ предполагать подлежащими разсмотрѣнію уравненія, не имѣющія кратныхъ корней

Теорема Sturm'a.

§ 39. Fourier, занимаясь задачей отдѣленія вещественныхъ корней, положилъ въ основу своихъ изслѣдованій теорему Budan'a (1803), которую можно формулировать такъ.

Будемъ разсматривать рядъ функцій

(1) $$f(x), f'(x), f''(x), \;.\;.\;.\; f^{(n)}(x),$$

который будемъ для краткости называть рядомъ Budan'a. Подставимъ въ рядъ (1) нѣкоторое вещественное число a; напишемъ рядъ знаковъ (+ или —) численныхъ значеній

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots f^{(n)}(a).$$

Пусть этотъ рядъ знаковъ будетъ

$$(2) \qquad + + - - + - + \ldots$$

Будемъ говорить, что переходъ отъ одного знака ряда (2) къ ближайшему направо слѣдующему знаку представляетъ *постоянство знака*, если оба знака одинаковы, и *перемѣну знака*, если эти знаки различны. Такъ напримѣръ, въ рядѣ (2) перемѣнамъ соотвѣтствуютъ переходы отъ второго члена къ третьему, отъ четвертаго къ пятому и т. д.

Теорема Budan'a. *При переходѣ отъ вещественнаго числа* α *къ бо́льшему числу* β *рядъ Budan'a для функціи* $f(x)$ *теряетъ такое число перемѣнъ знака, которое или равно числу вещественныхъ корней функціи* $f(x)$ *въ промежуткѣ* (α, β), *или больше этого числа на четное число.*

§ 40. Приведенная теорема Budan'a имѣетъ важное значеніе. Между прочимъ она интересна въ томъ отношеніи, что изъ нея получается, какъ слѣдствіе, знаменитое *правило знаковъ* Descartes'a.

Правило знаковъ Descartes'a. *Число положительныхъ корней функціи* $f(x)$ *не превосходитъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ коэффиціентовъ функціи* $f(x)$ *и, если оно меньше, то на четное число.*

Примѣняя формулу Maclaurin'a, получаемъ

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(0),$$

такъ что знаки коэффиціентовъ функціи $f(x)$ не отличаются отъ знаковъ ряда

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots f^{(n)}(0).$$

Итакъ, число перемѣнъ знака въ коэффиціентахъ функціи $f(x)$ равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ Budan'a для этой функціи при $x = 0$. По теоремѣ Budan'a число положительныхъ корней функціи $f(x)$ можетъ отличаться на четное число отъ числа потерь перемѣнъ знака въ рядѣ

$$f(x), f(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

при переходѣ x отъ 0 до $+\infty$; но при $x = +\infty$ этотъ рядъ представляетъ одни повторенія знака, слѣдовательно, число положительныхъ корней функціи $f(x)$ будетъ отличаться на четное число отъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots f^{(n)}(0).$$

§ 41. При всей важности теоремы Budan'a въ ней остается значительное неудобство, состоящее въ томъ, что, когда число корней отличается на четное число отъ числа потерь перемѣнъ знака, то это четное число остается совершенно неизвѣстнымъ. Sturm'у удалось вмѣсто ряда Budan'a указать такой рядъ функцій, составленный инымъ образомъ по заданной функціи $f(x)$, число потерь перемѣнъ знаковъ котораго, соотвѣтствующее переходу отъ α къ β, даетъ точное число корней въ промежуткѣ (α, β).

Sturm составляетъ свой рядъ функцій такимъ образомъ. Пусть дано уравненіе

$$f(x) = 0,$$

освобожденное отъ кратныхъ корней. За первую функцію V ряда онъ беретъ первую часть уравненія, т. е. $f(x)$, за вторую функцію V_1 онъ беретъ производную $f'(x)$; дальнѣйшія функціи онъ составляетъ такимъ образомъ: дѣлитъ первую функцію V на вторую V_1 и остатокъ отъ дѣленія съ обратнымъ знакомъ беретъ за третью функцію V_2; подобнымъ же образомъ остатокъ отъ дѣленія V_1 на V_2, взятый съ обратнымъ знакомъ, беретъ за четвертую функцію V_3 и т. д. Такъ какъ способъ Sturm'a составленія функцій $V, V_1, V_2, \ldots$ есть не что иное, какъ способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$, то вслѣдствіе отсутствія кратныхъ корней функціи $f(x)$, другими словами, вслѣдствіе отсутствія общихъ дѣлителей функцій $f(x)$ и ея производной $f'(x)$, мы должны притти къ послѣднему остатку V_n, равному отличному отъ нуля постоянному числу.

Итакъ, мы получаемъ рядъ функцій

$$V, V_1, V_2, V_3, \ldots V_n, \tag{1}$$

которыя мы будемъ называть функціями Sturm'a соотвѣтствующими заданной первой

$$V = f(x).$$

Функціи Sturm'a удовлетворяютъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$V = f(x),\ V_1 = f'(x),$$
$$V = V_1 Q_1 - V_2,$$

$$(2) \qquad V_1 = V_2 Q_2 - V_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{n-2} = V_{n-1} Q_{n-1} - V_n,$$

гдѣ $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$ суть частныя отъ дѣленія.

Теорема Sturm'a. *Если $a < b$, то въ рядѣ функцій Sturm'a*

$$(3) \qquad V(a), V_1(a), V_2(a), \ldots V_n(a)$$

перемѣнъ знаковъ не менѣе, чѣмъ въ рядѣ

$$(4) \qquad V(b), V_1(b), V_2(b), \ldots V_n(b),$$

и разность числа перемѣнъ знаковъ въ обоихъ рядахъ точно равна числу корней функціи $f(x)$ въ промежуткѣ отъ a до b.

§ 42. Предварительно докажемъ одну лемму, которою намъ придется пользоваться при доказательствѣ теоремы Sturm'a.

Лемма. *Если для $x = a$*

$$f(x) = 0,$$

то $f(x)$ до обращенія въ нуль имѣетъ знакъ отличный отъ знака производной $f'(x)$, а послѣ обращенія въ нуль знакъ одинаковый.

Называя черезъ h достаточно малую положительную величину, для того чтобы въ предѣлахъ $a-h$ и $a+h$ функція $f(x)$ не имѣла другихъ корней, кромѣ a, покажемъ, что функціи $f(a-h)$ и $f'(a-h)$ имѣютъ знаки различные, а функціи $f(a+h)$ и $f'(a+h)$ одинаковые. Разложимъ функціи $f(a+h)$ и $f'(a+h)$ въ ряды по формулѣ Taylor'a:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a).$$

$$f'(a+h) = f'(a) + h f''(a) + \frac{h^2}{1.2} f'''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a).$$

Замѣтивъ, что $f(a) = 0$ по условію, въ выраженіи $f(a+h)$ вынесемъ h за скобку и составимъ дробь

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} = h \left[\frac{f'(a) + \frac{h}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ \ldots n} f^{(n)}(a)}{f'(a) + \frac{h}{1} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a)} \right].$$

При достаточно малой величинѣ h знакъ дроби во второй части полученнаго равенства одинаковъ со знакомъ дроби

$$\frac{f'(a)}{f'(a)} = 1,$$

т. е. дробь есть положительная величина. Отсюда слѣдуетъ, что знакъ дроби въ лѣвой части зависитъ отъ знака h. При h положительномъ эта дробь положительна, слѣдовательно, функціи $f(a+h)$ и $f'(a+h)$ одного знака, при h отрицательномъ дробь отрицательна, слѣдовательно, функціи $f(a-h)$ и $f'(a-h)$ разныхъ знаковъ.

§ 43. Обращаемся теперь къ доказательству теоремы Sturm'а.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что двѣ рядомъ стоящія функціи V_i, V_{i+1} не могутъ обращаться одновременно въ нуль при $x = c$, потому что тогда при этомъ значеніи c на основаніи равенствъ (2) § 41 обращались бы въ нуль всѣ послѣдующія функціи

$$V_{i+2}, V_{i+3}, \ldots V_n,$$

что противорѣчитъ предположенію, ибо V_n постоянное число, отличное отъ нуля. Во-вторыхъ, мы замѣчаемъ, что, если одна изъ функцій Sturm'а обращается въ нуль, то двѣ смежныя функціи имѣютъ противоположные знаки. Это также легко усматривается изъ формулъ (2) § 41.

Теорема Sturm'а будетъ доказана, если мы покажемъ, что, во-первыхъ, число перемѣнъ знака въ ряду функцій Sturm'а не мѣняется при переходѣ x черезъ значеніе, обращающее въ нуль одну или нѣсколько среднихъ функцій, во-вторыхъ, всякій разъ когда x переходитъ черезъ значеніе, обращающее въ нуль начальную функцію $f(x)$, теряется одна перемѣна знака.

Пусть при $x = \alpha$ обращается въ нуль средняя функція $V_\kappa(x)$. По первому свойству функцій Sturm'а смежныя функціи при $x = \alpha$ въ нуль обратиться не могутъ. Выбравъ настолько малое число h, чтобы въ предѣлахъ $(\alpha - h, \alpha + h)$ функція $V_\kappa(x)$ не имѣла ни одного корня кромѣ α, и чтобы въ тѣхъ же предѣлахъ не имѣли ни одного корня функціи $V_{\kappa-1}(x)$ и $V_{\kappa+1}(x)$, разсмотримъ слѣдующіе три ряда значеній функцій $V_{\kappa-1}$, V_κ и $V_{\kappa+1}$:

$$\begin{array}{lll} V_{\kappa-1}(\alpha-h), & V_\kappa(\alpha-h), & V_{\kappa+1}(\alpha-h); \\ V_{\kappa-1}(\alpha), & V_\kappa(\alpha), & V_{\kappa+1}(\alpha); \\ V_{\kappa-1}(\alpha+h), & V_\kappa(\alpha+h), & V_{\kappa+1}(\alpha+h). \end{array}$$

Во второмъ рядѣ на основаніи второго свойства функцій Sturm'a есть одна перемѣна знаковъ, а именно $V_{\kappa-1}(\alpha)$ и $V_{\kappa+1}(\alpha)$ имѣютъ разные знаки. Функція $V_{\kappa-1}(x)$ имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ во всѣхъ рядахъ, ибо по предположенію она не имѣетъ корней въ промежуткѣ $(\alpha-h, \alpha+h)$. Точно такъ же сохраняетъ свой знакъ функція $V_{\kappa+1}(x)$. Поэтому функціи $V_{\kappa-1}(x)$ и $V_{\kappa+1}(x)$ во всѣхъ рядахъ имѣютъ знаки различные. Слѣдовательно, каковы бы ни были знаки функцій $V_\kappa(\alpha-h)$ и $V_\kappa(\alpha+h)$, какъ въ первомъ, такъ и въ третьемъ рядахъ будетъ по одной перемѣнѣ знаковъ. Такимъ образомъ мы видимъ, что число перемѣнъ знаковъ въ ряду функцій Sturm'a не мѣняется при переходѣ x черезъ значенія, обращающія въ нуль одну изъ среднихъ функцій.

Совсѣмъ иное мы видимъ, когда x переходитъ черезъ значеніе α, обращающее въ нуль начальную функцію $f(x)=V$. Выбравъ h настолько малымъ, чтобы въ промежуткѣ $(\alpha-h, \alpha+h)$ функція $f(x)$ не имѣла другихъ корней кромѣ α, и чтобы въ этомъ промежуткѣ не имѣла ни одного корня производная $f'(x)=V_1(x)$, мы видимъ, что на основаніи доказанной леммы функціи $f(x-h)$ и $f'(x-h)$ имѣютъ различные знаки, такъ что составляютъ *одну перемѣну*, функціи же $f(x+h)$ и $f'(x+h)$ имѣютъ знаки одинаковые, т. е. *перемѣны знаковъ нѣтъ*. Слѣдовательно, при переходѣ x черезъ корень α функціи $f(x)$ пропала одна перемѣна, что и требовалось доказать.

Допустимъ теперь, что въ рядѣ (3) § 41 функцій Sturm'a на m перемѣнъ знаковъ больше, чѣмъ въ рядѣ (4). Число перемѣнъ знаковъ по доказанному не можетъ измѣниться отъ перехода черезъ корни среднихъ функцій; онѣ пропадаютъ только при переходѣ черезъ корень данной функціи $f(x)$. Слѣдовательно, чтобы въ рядѣ (3) было на m перемѣнъ знаковъ больше, чѣмъ въ рядѣ (4), функція $f(x)$ должна перейти черезъ m корней, т. е. въ промежуткѣ (a, b) она должна имѣть m корней. Такимъ образомъ, теорема Sturm'a доказана.

§ 44. Пояснимъ изложенную теорію примѣромъ. Предложимъ себѣ отдѣлить корни уравненія

$$f(x)=x^3-6x+2=0.$$

Сохраняя предыдущія обозначенія, найдемъ

$$\frac{1}{3}f'(x)=\frac{V_1}{3}=x^2-2,\ \frac{V_2}{2}=2x-1,\ V_3=+7.$$

Число перемѣнъ знаковъ опредѣляемъ изъ слѣдующей таблицы.

	$f(x)$	V_1	V_2	V_3	
$x = -\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 перемѣны.
$x = 0$	$+$	$-$	$-$	$+$	2 перемѣны.
$x = +\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	ни одной.

Слѣдовательно ,при переходѣ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ пропадаютъ три перемѣны, и данное уравненіе имѣетъ три вещественныхъ корня, другими словами, всѣ корни его вещественные. Изъ нихъ одинъ меньше нуля и два больше нуля, ибо при переходѣ x черезъ всѣ значенія, меньшія нуля, отъ $-\infty$ до нуля пропадаетъ одна перемѣна, а при переходѣ x отъ нуля до $+\infty$ пропадаютъ двѣ перемѣны.

Подставляя вмѣсто x рядъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots$, найдемъ

	$f(x)$	V_1	V_2	V_3	
$x = 0$	$+$	$-$	$-$	$+$	2 перемѣны.
$x = 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	1 перемѣна.
$x = 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	1 перемѣна.
$x = 3$	$+$	$+$	$+$	$+$	ни одной.

Отсюда мы видимъ, что предѣлы одного корня суть 0 и 1, другого 2 и 3.

Подставляя вмѣсто x рядъ чиселъ $0,1; 0,2; 0,3; \ldots 0,9$, мы сузили бы еще болѣе предѣлы перваго корня; точно такъ же могли бы опредѣлить болѣе узкіе предѣлы для второго положительнаго и для отрицательнаго корня.

Приближенное вычисленіе корней.

Regula falsi.

§ 45. Приступая къ разсмотрѣнію главнѣйшихъ пріемовъ приближеннаго вычисленія корней, мы должны обратить вниманіе, что эти пріемы по характеру своему таковы, что могутъ прилагаться какъ къ алгебраическимъ, такъ и къ трансцендентнымъ уравненіямъ.

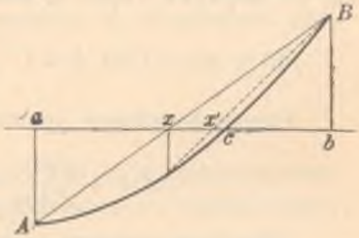
Начнемъ со стараго правила, носившаго названіе „regula falsi". Дадимъ для ясности этому правилу геометрическое толкованіе. Разсмотримъ кривую линію AB (черт. 72), опредѣляемую уравненіемъ

$$y = f(x), \tag{1}$$

гдѣ $f(x)$ первая часть уравненія

$$f(x) = 0, \tag{2}$$

подлежащаго нашему разсмотрѣнію. Корень этого уравненія c соотвѣтствуетъ абсциссѣ точки, въ которой кривая AB пересѣкаетъ ось x-овъ. Мы будемъ предполагать, что корень отдѣленъ, т. е. найдены два числа a и b, между которыми заключается одинъ только этотъ корень c уравненія (2). Очевидно, что два значенія $f(a)$ и $f(b)$ должны быть разныхъ знаковъ, ибо эти значенія соотвѣтствуютъ точкамъ A и B, лежащимъ по разныя стороны относительно оси x-овъ.



Черт. 72.

Чѣмъ меньше промежутокъ (a, b), тѣмъ часть AB разсматриваемой алгебраической линіи будетъ ближе къ прямой. Поэтому первая мысль, которая можетъ явиться при приближенномъ вычисленіи, состоитъ въ томъ, чтобы кривую линію AB замѣнить ея хордой. При этомъ мы считаемъ за приближенное значеніе корня c абсциссу x точки встрѣчи съ осью x-овъ хорды AB. Такъ какъ координаты точки A суть $(a, f(a))$, а координаты точки b суть $(b, f(b))$, то уравненіе хорды будетъ имѣть видъ

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{3}$$

Полагая $y=0$, получаемъ изъ уравненія (3) приближенное значеніе корня

$$x=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Повторяя операцію для значенія x и для одного изъ значеній a и b, получаемъ другое значеніе x', болѣе близкое къ искомому корню c. Такое вычисленіе, повторенное достаточное число разъ, даетъ возможность вычисленія корней съ любой точностью.

Способъ Newton'а.

§ 46. Уже Newton'омъ указанъ весьма важный способъ приближеннаго вычисленія, дающій возможность болѣе быстраго приближенія къ искомому корню.

Пусть извѣстно нѣкоторое приближенное значеніе a корня. Тогда, обозначая черезъ u поправку, которую нужно придать къ a, чтобы получить корень $a+u$ уравненія $f(x)=0$, и раскладывая по формулѣ Taylor'а, получаемъ

$$f(a+u)=f(a)+uf'(a)+\frac{u^2}{1\,.\,2}f''(u)+\,.\;.\;.=0$$

Рѣшая послѣднее уравненіе относительно u, мы имѣемъ

$$u=-\frac{f(a)}{f'(a)}-u^2\frac{f''(a)}{f'(a)}-\;.\;.\;.$$

Если приближенное значеніе a достаточно близко къ корню, то число u будетъ малое, его высшими степенями можно пренебречь въ первомъ приближеніи. Тогда можно будетъ предположить

$$u=-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Отсюда получается для корня послѣ первой поправки такое приближенное значеніе

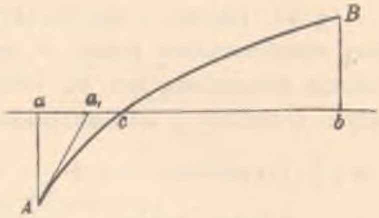
$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Поступая съ этимъ новымъ приближеніемъ a_1 по предыдущему, получимъ новое приближеніе

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

и такимъ образомъ повтореніемъ этой операціи мы будемъ приближаться сколь угодно близко къ корню.

§ 47. Легко убѣдиться, что первое приближеніе a_1 къ корню c, вычисленное по способу Newton'а, состоитъ въ томъ, что мы вмѣсто точки пересѣченія кривой съ осью x-овъ ищемъ точку пересѣченія касательной, проведенной къ кривой $y=f(x)$ въ точкѣ A (черт. 73), имѣющей координаты $(a, f(a))$.



Черт. 73.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе касательной въ этой точкѣ можетъ быть написано такъ:

(1) $\quad y-f(a)=m(x-a),$

гдѣ угловой коэффиціентъ m есть, какъ извѣстно (§ 84 гл. III), не что иное, какъ производная, и, слѣдовательно, уравненіе касательной можетъ быть написано въ видѣ

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

Полагая $y=0$ и рѣшая относительно x, получаемъ дѣйствительно

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

§ 48. Способъ regula falsi и способъ Newton'а являются частными случаями широкаго пріема, употребляемаго въ математикѣ и носящаго названіе метода *итераціи* или повторенія операцій.

Замѣчательный примѣръ такого рода повторенія операціи представляетъ число, названное Gauss'омъ *ариѳметически-геометрической средней* величиной изъ двухъ положительныхъ чиселъ a и b.

Составляемъ рядъ чиселъ

$$a_1=\frac{1}{2}(a+b), \qquad b_1=\sqrt{ab},$$

$$a_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1), \qquad b_2=\sqrt{a_1 b_1},$$

$$a_3=\frac{1}{2}(a_2+b_2), \qquad b_3=\sqrt{a_2 b_2},$$

. . . .

тогда числа a_n и b_n имѣютъ при возрастаніи значка n общій предѣлъ; свойства этого предѣла связаны съ теоріей эллиптическихъ функцій.

Способъ Lagrange'a.

§ 49. Lagrange предлагаетъ вычислять приближенную величину вещественнаго корня съ вещественными коэффиціентами при помощи разложенія его въ *непрерывную дробь*. Пусть уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ λ положительныхъ корней между цѣлыми числами g и $g+1$; полагая $x=g+\frac{1}{x_1}$, получимъ новое уравненіе $f_1(x_1)=0$ для x_1, которое имѣетъ λ корней большихъ единицы; подберемъ цѣлое число g_1 такъ, чтобы въ промежуткѣ между g_1 и g_1+1 былъ по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія $f_1(x_1)=0$, тогда, полагая $x_1=g_1+\frac{1}{x_2}$, получимъ для x_2 новое уравненіе $f_2(x_2)=0$, имѣющее корень большій единицы. Продолжая такія операціи мы приходимъ къ разложенію корня заданнаго уравненія $f(x)=0$ въ непрерывную дробь

$$x=g+\cfrac{1}{g_1+\cfrac{1}{g_2+\ddots}}$$

§ 50. Эта метода имѣетъ то преимущество, что, если разлагаемый корень x соизмѣримый, то послѣ конечнаго числа операцій мы его находимъ, ибо въ этомъ случаѣ дробь будетъ конечная.

Въ элементарномъ курсѣ мы видѣли, что при помощи конечныхъ непрерывныхъ дробей можно рѣшить вопросъ о рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленныхъ уравненій первой степени

$$ax+by+cz+\ldots=f,$$

гдѣ коэффиціенты $a, b, c, \ldots f$ числа цѣлыя.

§ 51. Если непрерывная дробь окажется *періодическою*, то корень x заданнаго уравненія будетъ также удовлетворять квадратному уравненію

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

съ цѣлыми коэффиціентами.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ *чистую* періодическую дробь, т. е. такую, у которой періодъ начинается съ перваго числа g.

$$x = g + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \ddots + \cfrac{1}{g_{k-1} + \cfrac{1}{g + \cfrac{1}{g_1 + \ddots}}}}}$$

Можно будетъ написать такое равенство

$$x = g + \cfrac{1}{g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \ddots + \cfrac{1}{g_{k-1} + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Обращая правую часть въ обыкновенную дробь, получимъ

$$x = \frac{Ax + B}{Cx + D},$$

гдѣ A, B, C, D цѣлыя числа, вычисляемыя въ качествѣ числителей и знаменателей подходящихъ дробей по правиламъ, излагаемымъ въ элементарномъ курсѣ.

Итакъ x удовлетворяетъ квадратному уравненію

$$Cx^2 + (D - A)x - B = 0.$$

Если дробь *смѣшанная* періодическая, то можно написать

$$x = g + \cfrac{1}{g_1 + \ddots + \cfrac{1}{g_s + \cfrac{1}{y}}}, \tag{2}$$

гдѣ y обозначаетъ для сокращенія чистую періодическую дробь.

Дробь y есть корень квадратнаго уравненія, а значитъ, выражая y черезъ x при помощи уравненія (2), получимъ и для x квадратное уравненіе вида (1).

Lagrange доказалъ также обратное предложеніе, а именно, что корень всякаго уравненія вида (1) разлагается въ періодическую непрерывную дробь.

§ 52. Подобно тому какъ *конечныя* непрерывныя дроби помогаютъ при рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ уравненій *первой* степени, такъ *періодическія* дроби играютъ первостепенную роль въ теоріи неопредѣленныхъ уравненій *второй* степени. Въ этой теоріи имѣетъ особенное значеніе уравненіе

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{1}$$

носящее названіе уравненія Pell'я.

Число D предполагается цѣлымъ числомъ, не представляющимъ полнаго квадрата цѣлаго числа.

Будемъ раскладывать въ непрерывную дробь $\sqrt{D}$, получаемъ

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{\omega}, \tag{2}$$

гдѣ ω чистая періодическая дробь. Пусть періодъ этой дроби заключаетъ n звеньевъ, такъ что

$$\sqrt{D} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\omega}}}}. \tag{3}$$

Обозначая конечныя дроби

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}, \qquad \frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}},$$

получимъ изъ равенства (3) слѣдующее

$$\sqrt{D} = \frac{\omega P_{n+1} + P_n}{\omega Q_{n+1} + Q_n}; \tag{4}$$

исключая ω изъ двухъ уравненій (2) и (4) получимъ

$$\sqrt{D} = \frac{P_{n+1} + P_n(\sqrt{D} - a_0)}{Q_{n+1} + Q_n(\sqrt{D} - a_0)}.$$

Освобождаясь отъ дроби и сравнивая раціональныя и ирраціональныя части, получимъ два равенства

(5) $$P_n = Q_{n+1} - Q_n a_0,$$

(6) $$DQ_n = P_{n+1} - P_n a_0;$$

умножая уравненіе (5) на P_n, а уравненіе (6) на $-Q_n$ и складывая, получимъ

$$P_n^2 - DQ_n^2 = (-1)^n,$$

ибо на основаніи элементарнаго курса мы имѣемъ

$$P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1} = (-1)^n.$$

Число n мы можемъ предполагать четнымъ, ибо, если періодъ состоитъ изъ нечетнаго числа звеньевъ, то достаточно взять двойной періодъ.

Итакъ, мы получаемъ

$$P_n^2 - D Q_n^2 = 1,$$

и уравненіе Pell'я (1) рѣшено

$$x = P_n,\ y = Q_n.$$

Напримѣръ, требуется найти рѣшеніе уравненія

$$x^2 - 10y^2 = 1.$$

Раскладывая $\sqrt{10}$ въ непрерывную дробь, мы имѣемъ

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}$$

Такъ какъ наименьшій періодъ состоитъ изъ одного звена 6, то надо будетъ взять два періода.

Откидывая изъ двойнаго періода послѣднее звено, получаемъ

$$3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6},$$

откуда

$$x = 19,\ y = 6.$$

§ 53. Послѣ Lagrange'а проходитъ черезъ все XIX столѣтіе тенденція обобщить алгоритмъ непрерывныхъ дробей. Въ частности желали получить періодическій алгоритмъ для вычисленія корней кубическаго уравненія

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

съ цѣлыми коэффиціентами. При этомъ желали получить такой алгоритмъ, который бы для кубической области игралъ роль, аналогичную роли непрерывныхъ дробей для квадратичной.

Эта задача успѣшно рѣшена лишь въ послѣднее время (1896) русскимъ ученымъ Г. Θ. Воронымъ.

Нужно признать, что идея обобщенія уже найдена, и дальнѣйшія обобщенія на алгебраическія числа, опредѣленныя уравненіями высшихъ степеней, есть дѣло времени.

Способъ Graeffe.

§ 54. Пусть задано уравненіе $f(x) = 0$, корни котораго $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ всѣ вещественные и различные.

Переписавъ заданное уравненіе въ такомъ видѣ

$$\varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0,$$

получимъ уравненіе

(1) $$[\varphi(x^2)]^2 - x^2[\psi(x^2)]^2 = 0.$$

Если мы подставимъ $x^2 = y$, то получимъ уравненіе

(2) $$[\varphi(y)]^2 - y[\psi(y)]^2 = 0,$$

имѣющее корни

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots \alpha_n^2.$$

Повторяя нѣсколько разъ операцію составленія уравненій (1) и (2) придемъ къ уравненію

$$p_0 u^n + p_1 u^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

съ корнями

$$\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \ldots \alpha_n^\nu,$$

гдѣ $\nu = 2^\lambda$.

Если корни заданнаго уравненія удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3| > \ldots > |\alpha_n|,$$

то можно будетъ приближенно положить

$$\alpha_1^\nu = -\frac{p_1}{p_0}, \alpha_2^\nu = -\frac{p_2}{p_1}, \ldots \alpha_n^\nu = -\frac{p_n}{p_{n-1}},$$

и приближенныя значенія корней найдены.

Эта метода Graeffe была разработана Encke, причемъ получилась возможность такъ видоизмѣнить способъ, чтобы рѣшать уравненія въ случаѣ кратныхъ и мнимыхъ корней.

Способъ Graeffe есть лучшій способъ въ практическомъ отношеніи и очень удобенъ для логариѳмическихъ вычисленій. Въ моемъ курсѣ Алгебраическаго анализа можно найти способъ Graeffe въ изложеніи профессора Морской Академіи А. Н. Крылова.

Теорія группъ.

§ 55. Хотя понятіе о группѣ надо считать столь же старымъ, какъ и понятіе о математической мысли вообще, но впервые это понятіе является ясно формулированнымъ и облеченнымъ въ видѣ конкретной теоріи у Lagrange'а.

Разсматривая извѣстные до него пріемы рѣшенія уравненій первыхъ четырехъ степеней, Lagrange стремился уловить общія идеи этихъ пріемовъ съ цѣлью выработать правила для рѣшенія уравненій болѣе высокихъ степеней.

Хотя его попытки не привели къ нахожденію общихъ способовъ рѣшенія уравненій выше 4-ой степени, тѣмъ не менѣе они дали понять, въ чемъ должна состоять суть такого рѣшенія въ тѣхъ случаяхъ, когда оно возможно.

Lagrange показалъ, что дѣло сводится къ разсмотрѣнію вопроса, какъ мѣняется видъ раціональной функціи

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

отъ корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ заданнаго уравненія n-ой степени при всевозможныхъ перестановленіяхъ корней.

Эти операціи, состоящія въ перестановленіи корней мы будемъ называть *подстановками* корней.

Очевидно, что число всѣхъ возможныхъ подстановокъ n корней будетъ

$$N = 1.2.3 \ldots n.$$

§ 56. Lagrange обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что совокупность подстановокъ, не мѣняющихъ вида нѣкоторой раціональной функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что результатъ производства надъ функціей одной за другою двухъ изъ числа подстановокъ разсматриваемой совокупности даетъ также подстановку, не мѣняющую вида функціи. Выражаясь современнымъ языкомъ, можемъ сказать, что подстановки, не мѣняющія вида функціи, образуютъ *группу*.

Опредѣленіе группы.

§ 57. Пусть задана система G какихъ либо элементовъ. Эти элементы могутъ быть какими угодно предметами, числами, формулами, математическими операціями, геометрическими движеніями и тому подобное.

Мы устанавливаемъ понятіе о *символическомъ произведеніи*

$$A\,B$$

двухъ элементовъ A и B системы; т. е. мы даемъ правила, по которымъ каждымъ двумъ элементамъ A и B сопоставляется третій C, причемъ мы пишемъ

$$C = A\,B.$$

§ 58. Опредѣленіе группы можетъ быть формулировано такъ.

Элементы системы G составляютъ *группу* если:

1) Символическое произведеніе двухъ элементовъ G принадлежитъ также къ G.

2) Символическое умноженіе есть операція, обладающая *) распредѣлительнымъ закономъ

$$(AB)\,C = A\,(BC).$$

3) Въ системѣ G существуетъ элементъ I, обладающій такимъ свойствомъ, что для всякаго элемента A системы G существуетъ равенство $AI = A$ (элементъ I называется *единицей* группы).

4) Если существуютъ элементы I, то для одного опредѣленнаго изъ нихъ I и для всякаго A уравненіе $AX = I$ допускаетъ рѣшеніе относительно X, причемъ X принадлежитъ также къ системѣ G и называется *обратнымъ элементомъ* относительно A.

§ 59. Группа называется *конечной*, если она состоитъ изъ конечнаго числа элементовъ. Это число называется *порядкомъ группы*.

§ 60. Если символическое умноженіе всѣхъ элементовъ группы обладаетъ закономъ *перемѣстительнымъ*

$$AB = BA,$$

то группа называется *абелевой* или *коммутативной*.

§ 61. Примѣръ *безконечной не-абелевой* группы представляетъ совокупность всѣхъ преобразованій координатъ въ пространствѣ.

---

*) Вообще говоря символическое умноженіе есть дѣйствіе неперестановочное, т. е. AB не равно BA.

Въ этомъ случаѣ подъ символическимъ произведеніемъ AB двухъ преобразованій A и B разумѣется результатъ послѣдовательнаго производства одного за другимъ этихъ двухъ преобразованій, причемъ первымъ совершается преобразованіе A.

Примѣръ *конечной не-абелевой* группы даютъ подстановки корней $x_1, x_2, \ldots x_n$, не мѣняющія вида функціи $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$.

Какъ на примѣръ *безконечной абелевой* группы можно указать на совокупность всѣхъ *комплексныхъ чиселъ* $a+ib$, причемъ *обыкновенное сложеніе* этихъ чиселъ разсматривается какъ символическое умноженіе, опредѣляющее группу. Эта группа имѣетъ единственную единицу $I=0$. Всякому элементу $(a+ib)$ соотвѣтствуетъ ему обратный $-(a+ib)$.

Конечную абелеву группу получаемъ, разсматривая совокупность чиселъ

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1},$$

гдѣ $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, причемъ символическимъ умноженіемъ является обыкновенное умноженіе.

§ 62. Абстрактное понятіе о группѣ имѣетъ дѣло, если такъ можно выразиться, лишь съ внутренней структурой группы, то есть съ тѣми законами, по которымъ при символическомъ умноженіи воспроизводятся элементы группы; что представляютъ изъ себя эти элементы сами по себѣ, является второстепеннымъ для теоріи группъ. Могутъ существовать двѣ группы, элементы которыхъ будутъ различной природы, между тѣмъ эти группы будутъ имѣть одинаковую структуру. Подобныя группы называются *изоморфными* и считаются за одну группу.

Пусть элементу A_i одной группы G соотвѣтствуетъ элементъ A'_i другой G'; тогда изоморфизмъ двухъ группъ можно выразить совмѣстнымъ существованіемъ двухъ равенствъ

$$A_k A_l = A_m, \; A'_k A'_l = A'_m,$$

при всевозможныхъ k, l и соотвѣтствующемъ m.

§ 63. Пояснимъ сказанное на одномъ важномъ примѣрѣ. Разсмотримъ группу подстановокъ четырехъ элементовъ

$$1, 2, 3, 4.$$

Получаемъ 24 подстановки, состоящія въ переходѣ отъ одного изъ 24 слѣдующихъ перемѣщеній:

	1234	2134	3124	4123
	1243	2143	3142	4132
(1)	1324	2314	3214	4213
	1342	2341	3241	4231
	1423	2413	3412	4312
	1432	2431	3421	4321.

Если мы обозначимъ знакомъ

$$(a_1 a_2 a_3 \; . \; . \; . \; a_\kappa)$$

такъ называемую *циклическую* подстановку, которая замѣняетъ элементъ a_1 на a_2, a_2 на a_3 и такъ далѣе и наконецъ послѣдній элементъ a_κ на первый a_1, то переходъ отъ перваго изъ перемѣщеній (1) ко всѣмъ остальнымъ можно будетъ написать въ видѣ слѣдующей таблицы подстановокъ

	1	(12)	(132)	(1432)
	(34)	(12)(34)	(1342)	(142)
(2)	(23)	(123)	(13)	(143)
	(234)	(1234)	(134)	(14)
	(243)	(1243)	(13)(24)	(1423)
	(24)	(124)	(1324)	(14)(23).

Знакомъ 1 обозначена *тождественная* подстановка, переводящая перемѣщеніе 1 2 3 4 въ то же самое 1 2 3 4, другими словами, подстановка, неперемѣщающая элементовъ. Это есть единица группы. Элементы, которые остаются на своихъ мѣстахъ, на таблицѣ (2) не указаны, такъ напримѣръ, при подстановкѣ (34) элементы 1 и 2 не мѣняютъ своего мѣста.

Подъ символическимъ произведеніемъ $S_1 S_2$ двухъ подстановокъ мы будемъ разумѣть новую подстановку, которая получается, какъ результатъ перемѣщеній буквъ, полученный, если сначала буквы перемѣстимъ на основаніи подстановки S_1, а потомъ на основаніи S_2.

Такъ напримѣръ, пусть будетъ

$$S_1 = (1432), \; S_2 = (142).$$

Чтобы составить $S_1 S_2$, начнемъ съ какого нибудь элемента, напримѣръ 1. Этотъ элементъ переходитъ по подстановкѣ S_1 въ 4, а послѣдній по подстановкѣ S_2 переходитъ въ 2, такъ что подстановка $S_1 S_2$ переводитъ 1 въ 2. Разсматриваемъ далѣе переходъ элемента 2 по нашимъ подстановкамъ и продолжаемъ далѣе, пока не исчерпаемъ всѣ элементы.

Получаемъ

$$S_1 S_2 = (1243).$$

Перемножая подстановки S_1 и S_2 въ обратномъ порядкѣ, получаемъ

$$S_2 S_1 = (1324);$$

мы видимъ, слѣдовательно, что $S_1 S_2$ не равно $S_2 S_1$.

Простое вычисленіе показываетъ, что таблица (2) подстановокъ четырехъ элементовъ можетъ быть представлена въ видѣ слѣдующихъ цикловъ

$$(3)\quad \begin{aligned} &\sigma_1 = (1234), \sigma_1^2 = (13)(24), \sigma_1^3 = (1432), \sigma_1^4 = 1,\\ &\sigma_2 = (1243), \sigma_2^2 = (14)(23), \sigma_2^3 = (1342), \sigma_2^4 = 1,\\ &\sigma_3 = (1324), \sigma_3^2 = (12)(34), \sigma_3^3 = (1423), \sigma_3^4 = 1; \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} &\tau_1 = (123), \tau_1^2 = (132), \tau_1^3 = 1,\\ &\tau_2 = (124), \tau_2^2 = (142), \tau_2^3 = 1,\\ &\tau_3 = (134), \tau_3^2 = (143), \tau_3^3 = 1,\\ &\tau_4 = (234), \tau_4^2 = (243), \tau_4^3 = 1; \end{aligned}$$

$$(5)\quad \begin{aligned} &\rho_1 = (12), \rho_1^2 = 1; \rho_4 = (23), \rho_4^2 = 1;\\ &\rho_2 = (13), \rho_2^2 = 1; \rho_5 = (24), \rho_5^2 = 1;\\ &\rho_3 = (14), \rho_3^2 = 1; \rho_6 = (34), \rho_6^2 = 1. \end{aligned}$$

§ 64. Разсмотримъ теперь вращеніе правильнаго тѣла *октаэдра* около центра. Если будемъ разсматривать только тѣ вращенія, послѣ которыхъ октаэдръ сливается со своимъ первоначальнымъ положеніемъ, причемъ одни грани накладываются на другія, то очевидно, что эти вращенія образуютъ группу. Очевидно, что эта группа 24-го порядка, ибо октаэдръ имѣетъ 8 граней, каждая грань есть треугольникъ, слѣдовательно на всемъ октаэдрѣ будетъ 24 угла граней. Совмѣщая одинъ опредѣленный изъ этихъ угловъ со всѣми остальными и съ самимъ собою, получимъ всѣ 24 вращенія, образующія группу. Эта группа оказывается изоморфной съ разобранной нами группой подстановокъ четырехъ элементовъ. Для сличенія структуры обѣихъ группъ достаточно указать, чему соотвѣствуютъ циклы (3), (4) и (5) предыдущаго §-а.

Четверные циклы вращенія (3) мы получимъ, если будемъ разсматривать вращенія октаэдра вокругъ осей, соединяющихъ противоположныя вершины. Такъ какъ вершинъ октаэдръ имѣетъ шесть, то, соединяя попарно, получаемъ три оси вращенія. Такъ какъ около каждой вершины сходятся четыре грани, то при непрерывномъ вращеніи октаэдра на уголъ въ 360^0 октаэдръ четыре раза сольется съ первоначальнымъ своимъ положеніемъ, ибо одна изъ его четырехъ сходящихся на оси вращенія граней займетъ послѣдовательно положенія остальныхъ граней и на четвертый разъ совпаденія вернется въ первоначальное положеніе.

Тройные циклы (4) мы получимъ, если будемъ разсматривать вращенія около осей, соединяющихъ центры противоположныхъ граней, ибо при вращеніи около такой оси треугольная грань, черезъ центръ которой проходитъ ось, на третьемъ своемъ совпаденіи возвращается въ первоначальное свое положеніе. Такъ какъ граней октаэдръ имѣетъ 8, то, соединяя попарно, получимъ 4 оси вращенія октаэдра, что соотвѣтствуетъ четыремъ цикламъ (4). Двойные циклы (5) мы получимъ, взявъ за оси вращенія середины противоположныхъ реберъ.

§ 65. Оказывается, что часть группы подстановокъ четырехъ элементовъ, а именно часть, состоящая изъ подстановокъ

$$1, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \tau_1, \tau_1^2, \tau_2, \tau_2^2, \tau_3, \tau_3^2, \tau_4, \tau_4^2,$$

сама образуетъ группу и эта группа оказывается изоморфной съ группой вращенія тетраэдра.

§ 66. Группы вращеній многогранниковъ сводятся къ тремъ группамъ, группѣ тетраэдра, группѣ октаэдра и группѣ икосаэдра, ибо вращенія куба даютъ, какъ легко догадаться, ту же группу, что и вращенія октаэдра, а додекаэрдъ даетъ ту же группу, что и икосаэдръ.

§ 67. Группа икосаэдра состоитъ изъ 60 элементовъ, ибо икосаэдръ имѣетъ 20 граней, а каждая грань, будучи треугольникомъ, имѣетъ три угла. Если мы разсмотримъ группу подстановокъ изъ 5 элементовъ, то мы получимъ группу порядка

$$120 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.$$

Замѣчательно, что группа икосаэдра, состоящая изъ 60 элементовъ, играетъ ту же роль относительно общей группы 120 подстановокъ пяти элементовъ, какую играетъ группа тетраэдра относительно группы октаэдра.

Группа икосаэдра имѣетъ, слѣдовательно, громадное значеніе при разсмотрѣніи уравненій пятой степени. Невозможность рѣшенія уравненія пятой степени въ радикалахъ обнаруживается съ наглядностью изъ свойствъ группы икосаэдра. Оказывается, что въ теоріи уравненій четвертой степени играютъ роль группы октаэдра и тетраэдра, для уравненія же пятой степени происходитъ слѣдующее: общая группа 120 подстановокъ пяти корней не имѣетъ геометрическаго аналога, группа же икосаэдра, аналогичная группѣ тетраэдра для уравненій четвертой степени, имѣетъ структуру, подчиненную совершенно другимъ закономъ.

Уравненія пятой степени играютъ совершенно исключительную роль среди уравненій различныхъ степеней. Съ одной стороны, эти уравненія не имѣютъ общаго радикальнаго рѣшенія, значитъ, они кореннымъ образомъ отличаются по свойствамъ отъ уравненій первыхъ четырехъ степеней. Съ другой стороны, уравненія пятой степени имѣютъ нѣчто общее съ уравненіями низшихъ степеней, ибо въ ихъ теоріи фигурируетъ группа правильнаго многогранника икосаэдра, и, слѣдовательно, геометрическія соображенія, которыя играютъ роль въ теоріи уравненій четвертой степени, продолжаются въ нѣкоторомъ отношеніи и въ теоріи уравненій пятой степени. Въ виду такого промежуточнаго положенія уравненій пятой степени, они очень часто въ высшемъ университетскомъ преподаваніи служатъ предметомъ особаго курса. Можно указать на книгу проф. Klein'a „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ (1884).

Симметрическія функціи и теорія Galois.

§ 68. Возвращаясь къ теоріи Lagrange'a, мы замѣчаемъ, что первый вопросъ, который является при разсмотрѣніи значеній, принимаемыхъ функціей при различныхъ подстановкахъ корней, состоитъ въ *числѣ* этихъ значеній. Тутъ могутъ быть два крайнихъ случая: или при всѣхъ подстановкахъ корней функція имѣетъ только одно значеніе, и тогда функція называется *симметрической*, или же всѣ N ея значеній различны между собою; тогда функція называется *функціей Galois.*

Относительно промежуточныхъ случаевъ Lagrange доказалъ теорему, что число различныхъ значеній функціи при подстановкахъ корней должно быть непремѣнно дѣлителемъ числа.

$$N=1\,.\,2\,.\,3\,.\,\,.\,\,.\,n,$$

гдѣ n степень буквеннаго уравненія.

§ 69. Что касается симметрическихъ функцій отъ корней уравненія

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

то простѣйшими такими функціями являются, очевидно, коэффиціенты самого уравненія, ибо

$$(1) \qquad \begin{aligned} p_1 &= -\Sigma x_i, \\ p_2 &= \Sigma x_i x_k, \\ p_3 &= -\Sigma x_i x_k x_e, \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n, \end{aligned}$$

гдѣ въ правыхъ частяхъ равенствъ стоятъ суммы сочетаній изъ всѣхъ корней по одному, по два, по три и т. д.

Въ справедливости формулъ (1) мы убѣдимся, раскрывая первую часть уравненія

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

по степенямъ x и сравнивая съ первой частью заданнаго уравненія.

Замѣчательно, что всѣ раціональныя симметрическія функціи отъ корней выражаются раціонально черезъ эти коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$. Отсюда получается такое общее заключеніе.

Если считать заданные коэффиціенты числами раціональными, то окажется раціональнымъ числомъ всякая симметрическая функція отъ корней нашего уравненія.

§ 70. Въ теоріи рѣшенія уравненій въ радикалахъ задача рѣшенія уравненія трактуется обыкновенно такъ. Требуется подвергнуть систему n уравненій (1) предыдущаго §-а съ n неизвѣстными такимъ преобразованіямъ, чтобы послѣ ряда ихъ получились уравненія вида

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(p_1, p_2, \ldots p_n), \\ x_2 &= f_2(p_1, p_2, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(p_1, p_2, \ldots p_n), \end{aligned}$$

причемъ функціи $f_1, f_2, \ldots f_n$ должны быть функціями, образованными изъ коэффиціентовъ p при помощи конечнаго числа дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія радикаловъ.

Оказывается, что такое преобразованіе системы (1) § 69 въ систему (2) невозможно при $n > 4$, если $p_1, p_2, \ldots p_n$ предполагаются перемѣнными независимыми. Это было въ первый разъ показано Abel'емъ. Но мы видѣли въ § 42 гл. I примѣръ уравненія пятой степени съ опредѣленными численными коэффиціентами, которое допускаетъ рѣшеніе въ радикалахъ. Отсюда является важнымъ разсмотрѣть *численныя* уравненія и ихъ рѣшимость въ радикалахъ.

Полная теорія такихъ уравненій была создана знаменитымъ математикомъ Evariste Galois, умершимъ въ возрастѣ 21 года. Заслуга Galois состоитъ главнымъ образомъ въ томъ, что онъ былъ родоначальникомъ современной теоріи группъ. Что касается алгебраическихъ уравненій, то тутъ заслуга Galois состоитъ въ обобщеніи теоріи Lagrange'a. При этомъ Galois получилъ теорію, обнимающую какъ буквенныя, такъ и численныя уравненія, причемъ теорія Lagrange'a буквенныхъ уравненій оказывается какъ бы частнымъ случаемъ этой болѣе общей теоріи.

Чтобы показать въ двухъ словахъ характерныя черты теоріи Galois, мы должны обратить вниманіе на слѣдующее. Если мы желаемъ перейти отъ буквенныхъ уравненій къ численнымъ, то должны будемъ вмѣсто алгебраической неизмѣнности функцій при подстановкахъ корней, т. е. другими словами вмѣсто неизмѣнности вида функцій (теорія Lagrange'a) разсматривать неизмѣнность численнаго значенія функцій.

Простой примѣръ покажетъ намъ, что подстановки корней, не мѣняющія численнаго значенія функціи, могутъ и не образовывать группы. Пусть напримѣръ, будетъ задано уравненіе

$$\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

корни котораго суть (см. § 31 гл. I)

$$x_\kappa=e^{\frac{2\kappa\pi i}{7}}.$$

Очевидно, что

$$x_1 x_6=1.$$

Произведеніе $x_1 x_6$ не мѣняетъ своей численной величины, т. е. остается равнымъ единицѣ, при двухъ подстановкахъ

$$S=(x_1 x_2)(x_6 x_5),\ \ T=(x_1 x_6)(x_2 x_3),$$

ибо отъ подстановки S оно переходитъ въ

$$x_2 x_5=1,$$

а отъ подстановки T оно переходитъ въ

$$x_6 x_1=1.$$

Подстановка же

$$ST$$

переводитъ первоначальную функцію $x_1 x_3$ въ $x_3 x_5$, а эта величина уже не равна единицѣ, и, значитъ, произведеніе подстановокъ S и T, не мѣняющихъ численнаго значенія функціи, представляетъ подстановку, уже мѣняющую численное значеніе.

Galois показалъ, что если мы для численнаго уравненія вмѣсто общей группы всѣхъ подстановокъ будемъ разсматривать нѣкоторую опредѣленную группу, которую онъ называетъ группой самого уравненія и правила составленія которой онъ указываетъ, то теорія Lagrange'а остается справедливой для этой группы. Оказывается, что изъ подстановокъ группы, указанной Galois, тѣ подстановки, которыя не мѣняютъ численнаго значенія функціи, образуютъ также группу.

§ 71. Несмотря на большой прогрессъ алгебры, связанный съ изслѣдованіями Lagrange'а, Gauss'а, Abel'я и Galois, вопросъ о рѣшеніи численныхъ уравненій въ радикалахъ остается до сихъ поръ не вполнѣ рѣшеннымъ. Мы здѣсь обратимъ вниманіе читателя только на главнѣйшіе результаты, полученные вышеуказанными авторами.

Существуетъ большой классъ уравненій, рѣшающихся въ радикалахъ и носящихъ названіе Abel'евыхъ уравненій. Это тѣ уравненія, которыя обладаютъ свойствомъ, что одинъ изъ корней выражается раціонально черезъ другой. Эти уравненія называются Abel'евыми, потому что Abel показалъ способъ ихъ рѣшенія. Если мы примѣнимъ къ Abel'евымъ уравненіямъ теорію группъ Galois, то оказывается, что этимъ уравненіямъ соотвѣтствуетъ коммутаціонная группа, отсюда коммутаціонныя группы получили названіе Abel'евыхъ.

Затѣмъ большую важность представляетъ теорема Galois, относящая къ рѣшенію въ радикалахъ уравненій простыхъ степеней 5, 7, 11, . . . а именно, уравненіе простой степени тогда и только тогда рѣшается въ радикалахъ, когда одинъ изъ корней выражается раціонально черезъ два другихъ.

Исключеніе перемѣнныхъ.

§ 72. Въ элементарной алгебрѣ устанавливается понятіе объ исключеніи нѣкоторой буквы, напр. x, изъ двухъ уравненій, причемъ указываются, главнымъ образомъ, два пріема такого исключенія. Одинъ изъ этихъ пріемовъ носитъ названіе пріема подстановки, другой—пріема сравненія неизвѣстныхъ. Напримѣръ, если требуется исключить букву x изъ двухъ уравненій.

$$ax+by+c=0 \text{ и } lg\,x=y,$$

то, рѣшая второе уравненіе относительно x, получаемъ $x=e^y$ и подставляемъ въ первое уравненіе. Получаемъ искомый результатъ исключенія въ такомъ видѣ:

$$a\,e^y+by+c=0.$$

Способъ сравненія неизвѣстныхъ состоитъ въ томъ, что мы рѣшаемъ оба уравненія относительно x; получаемъ

$$x=e^y \text{ и } x=-\frac{by+c}{a},$$

откуда сравненіе даетъ

$$e^y=-\frac{by+c}{a}.$$

§ 73. Вопросъ объ исключеніи буквъ изъ нѣсколькихъ уравненій является весьма важнымъ вопросомъ анализа, не только алгебраическаго, но и трансцендентнаго. Какъ общій принципъ, взятый по аналогіи съ простѣйшими случаями исключенія, извѣстными изъ элементарной математики, выставляется слѣдующее предложеніе. Если мы желаемъ изъ n уравненій исключить k величинъ, то въ результатѣ получается $n-k$ уравненій, связывающихъ остальныя не исключенныя величины. При этомъ число k предполагается, очевидно, меньшимъ числа n.

Механизмъ исключенія обыкновенно предполагается такой. Рѣшаемъ k изъ n уравненій относительно k неизвѣстныхъ и подставляемъ полученныя выраженія въ остальныя $n-k$ уравненій. То, что получится послѣ подстановки, и будетъ результатомъ исключенія. Иногда бываетъ возможно исключить k величинъ изъ меньшаго, чѣмъ k, числа уравненій.

§ 74. Такъ какъ въ большинствѣ случаевъ уравненія, какъ алгебраическія, такъ и особенно трансцендентныя не рѣшаются относительно тѣхъ величинъ, которыя мы желаемъ исключить, то вопросъ объ исключеніи требуетъ прежде всего опредѣленія, что значитъ сдѣлать такое исключеніе.

Трансцендентный анализъ не даетъ отвѣта на то, что понимать въ общемъ случаѣ подъ исключеніемъ перемѣнныхъ изъ уравненій. Алгебраическій же анализъ не только вполнѣ точно опредѣляетъ, что значитъ исключить k перемѣнныхъ изъ n алгебраическихъ уравненій, но и указываетъ пріемы такого исключенія.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными x, y. Поднимая вопросъ объ исключеніи перемѣнной x, мы можемъ наши заданныя два уравненія написать въ видѣ

$$f(x)=0, \tag{1}$$

$$\varphi(x)=0, \tag{2}$$

причемъ f и φ считаются цѣлыми функціями отъ x. Мы предполагаемъ, что другая буква y заключается въ коэффиціентахъ.

Пусть первыя части нашихъ уравненій въ раскрытомъ видѣ будутъ

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n,$$
$$\varphi(x)=x^m+q_1x^{m-1}+\ldots+q_m,$$

такъ что коэффиціенты p_i и q_i суть цѣлыя функціи отъ буквы y.

Алгебраическій анализъ беретъ за исходный пунктъ разъясненія понятія объ исключеніи буквы x изъ двухъ уравненій (1) и (2) правило сравненія неизвѣстныхъ, причемъ устанавливается такое опредѣленіе результата исключенія.

Подъ результатомъ исключенія буквы x изъ двухъ уравненій (1) и (2) разумѣется такое соотношеніе между коэффиціентами p_i и q_i *обоихъ уравненій, которое представляетъ собою условіе необходимое и достаточное для существованія у двухъ уравненій одинаковаго корня x.*

Для того чтобы указанное опредѣленіе осуществить на самомъ дѣлѣ, поступаютъ обыкновенно такъ. Если искомый результатъ исключенія выражается равенствомъ,

$$R=0, \tag{3}$$

гдѣ R есть раціональная функція отъ коэффиціентовъ, то эта функція R носитъ названіе *результанта* двухъ уравненій (1) и (2). Значитъ, вопросъ исключенія приводится къ вопросу вычисленія результанта.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ будутъ корни уравненія (1), а $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ корни уравненія (2). Тогда легко видѣть, что два выраженія

$$f(\beta_1)f(\beta_2)\ldots f(\beta_m) \tag{4}$$

и

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n), \tag{5}$$

могутъ отличаться между собою только знакомъ, ибо очевидно, что выраженіе (4) есть не что иное, какъ произведеніе $\Pi(\beta_j-\alpha_\kappa)$, а выраженіе (5) есть $\Pi(\alpha_\kappa-\beta_j)$, гдѣ произведеніе Π распространяется на всѣ корни α_κ уравненія (1) и на всѣ корни β_j уравненія (2).

Очевидно, что за результантъ R можно принять одно изъ выраженій (4), (5), такъ что получимъ

$$R=f(\beta_1)f(\beta_2)\ .\ .\ .\ f(\beta_m), \tag{6}$$

ибо уравненія (1) и (2) будутъ имѣть тогда и только тогда общій корень, когда одинъ изъ множителей,

$$f(\beta_1), f(\beta_2),\ .\ .\ .\ f(\beta_m)$$

равенъ нулю.

Выраженіе R изъ формулы (6) представляетъ собою, очевидно, цѣлую раціональную функцію отъ коэффиціентовъ p_i и q_i. Что коэффиціенты p_i входятъ раціонально въ выраженіе R, слѣдуетъ изъ того, что каждый изъ множителей $f(\beta_e)$ содержитъ эти коэффиціенты раціонально, а что въ эту функцію R входятъ раціонально коэффиціенты q_i, слѣдуетъ изъ того, что выраженіе (6) есть симметрическая функція отъ корней $\beta_1, \beta_2,\ .\ .\ .\ \beta_m$, ибо при подстановкѣ корней перемѣщаются множители, произведеніе же остается безъ перемѣны.

§ 75. Покажемъ вычисленіе результата на примѣрѣ. Пусть

$$f(x)=x^3+p_1x^2+p_2x+p_3,$$
$$\varphi(x)=x^2+q_1x+q_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}R=f(\beta_1)f(\beta_2)=&[\beta_1^3+p_1\beta_1^2+p_2\beta_1+p_3][\beta_2^3+p_1\beta_2^2+p_2\beta_2+p_3]=\\ =&\beta_1^3\beta_2^3+p_1\beta_1^2\beta_2^2(\beta_1+\beta_2)+p_2\beta_1\beta_2(\beta_1^2+\beta_2^2)+p_3(\beta_1^3+\beta_2^3)+\\ &+p_1^2\beta_1^2\beta_2^2+p_1p_2\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)+p_1p_3(\beta_1^2+\beta_2^2)+p_2p_3(\beta_1+\beta_2)+\\ &+p_2^2\beta_1\beta_2+p_3^2.\end{aligned}$$

Извѣстно, что

$$\beta_1+\beta_2=-q_1,$$
$$\beta_1\beta_2=q_2,$$

а также

$$\beta_1^2+\beta_2^2=(\beta_1+\beta_2)^2-2\beta_1\beta_2=q_1^2-2q_2$$
$$\beta_1^3+\beta_2^3=(\beta_1+\beta_2)^3-3\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)=-q_1^3+3q_1q_2.$$

Подставляя эти значенія, получимъ для R выраженіе

$$R = q_2^3 - p_1 q_2^2 q_1 + p_2 q_1^2 q_2 - 2 p_2 q_2^2 - p_3 q_1^3 + 3 p_3 q_1 q_2 +$$
$$+ p_1^2 q_2^2 - p_1 p_2 q_1 q_2 + p_1 p_3 q_1^2 - 2 p_1 p_3 q_2 + p_2^2 q_2 - p_2 p_3 q_1 + p_3^2.$$

Теорія инваріантовъ.

§ 76. Задачи алгебраическаго анализа, а также задачи аналитической геометріи алгебраическихъ линій и поверхностей привели къ разсмотрѣнію слѣдующей общей задачи, относящейся къ алгебраическимъ формамъ.

Пусть разсматривается форма

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

нѣкоторый степени m отъ n перемѣнныхъ.

Перемѣнныя подвергаются нѣкоторому линейному преобразованію

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^{(1)} x_1' + \alpha_2^{(1)} x_2' + \ldots + \alpha_n^{(1)} x_n' \\ x_2 &= \alpha_1^{(2)} x_1' + \alpha_2^{(2)} x_2' + \ldots + \alpha_n^{(2)} x_n' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_1^{(n)} x_1' + \alpha_2^{(n)} x_2' + \ldots + \alpha_n^{(n)} x_n', \end{aligned}$$

гдѣ $x_1', x_2', \ldots x_n'$ новыя перемѣнныя, а коэффиціенты $\alpha_i^{(k)}$ суть заданныя числа. Опредѣлитель

$$\rho = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, & \ldots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_2^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, & \ldots & \alpha_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, & \ldots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

мы будемъ называть *модулемъ преобразованія*.

Вопросъ идетъ о нахожденіи такъ называемыхъ инваріантовъ формы φ. Подъ *инваріантомъ* разумѣется нѣкоторая функція $\Omega(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ отъ коэффиціентовъ $A_1, A_2, A_2, \ldots$ формы φ, которая удовлетворяетъ уравненію

$$\Omega(A_1, A_2, A_3, \ldots) = \rho^l\, \Omega(A_1', A_2', A_3', \ldots),$$

гдѣ $A_1', A_2', \ldots$ новые коэффиціенты формы, т. е. тѣ коэффиціенты, которые форма получаетъ послѣ преобразованія. Другими словами, инваріантомъ формы называется такая функція ея коэффиціентовъ, которая послѣ линейнаго преобразованія получаетъ множитель, равный степени модуля преобразованія.

§ 77. Напримѣръ, форма

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2$$

имѣетъ инваріантъ

$$B^2 - AC,$$

потому что, если сдѣлаемъ преобразованіе

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

модуль котораго

$$\rho = \alpha \delta - \beta \gamma,$$

то получимъ новую форму

$$A' x'^2 + 2 B' x' y' + C' y'^2,$$

въ которой

$$A' = A\alpha^2 + 2 B\alpha\gamma + C\gamma^2,$$
$$B' = A\alpha\beta + B(\alpha\delta - \beta\gamma) + C\gamma\delta,$$
$$C' = A\beta^2 + 2 B\beta\delta + C\delta^2.$$

Простыя выкладки убѣждаютъ въ справедливости равенства

$$B'^2 - A' C' = \rho^2 (B^2 - AC),$$

выражающаго то свойство, что $B^2 - AC$ есть инваріантъ.

§ 78. *Коваріантомъ* называется такая функція

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, A_1, A_2, \ldots)$$

отъ независимыхъ перемѣнныхъ и отъ первоначальныхъ коэффиціентовъ формы, которая послѣ линейнаго преобразованія перемѣнныхъ получаетъ множителемъ степень модуля преобразованія.

Основная задача теоріи инваріантовъ состоитъ въ нахожденіи всѣхъ инваріантовъ и коваріантовъ для формъ данной степени и даннаго числа перемѣнныхъ.

§ 79. Понятіе объ инваріантахъ линейныхъ преобразованій обобщается, и мы приходимъ къ понятію объ инваріантахъ нѣкоторой группы преобразованій. Подъ инваріантомъ группы разумѣется выраженіе, не мѣняющееся отъ преобразованій группы.

Sophus Lie и Klein разсматривали всю геометрію, какъ теорію инваріантовъ преобразованія координатъ.

ГЛАВА V.

Теорія чиселъ.

§ 1. Основанія теоріи чиселъ находятся въ извѣстной книгѣ Эвклида, названной „Начала“ (Στοιχεῖα). Здѣсь мы встрѣчаемъ вполнѣ научное изложеніе началъ ученія о натуральныхъ числахъ. Эти начала въ настоящее время вводятся въ курсы ариѳметики среднихъ учебныхъ заведеній.

Въ основаніи теоріи Эвклида лежитъ ученіе о *дѣлимости* чиселъ.

§ 2. Числа, дѣлящіяся только на самихъ себя и единицу носятъ названіе *простыхъ*. Получается безконечный рядъ такихъ простыхъ чиселъ.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

Законъ, по которому эти простыя числа слѣдуютъ одно за другимъ, остается въ продолженіе 2000 лѣтъ неразгаданнымъ. Въ XIX столѣтіи появились замѣчательныя изслѣдованія Чебышева и Riemann'а о простыхъ числахъ, гдѣ разсматриваются свойства функціи $\theta(x)$, представляющей число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ числа x, такъ, напримѣръ,

$$\theta(10) = 5, \theta(20) = 9, \ldots$$

Въ послѣднее время вышло въ свѣтъ большое сочиненіе профессора Landau „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen“.

§ 3. Существуютъ таблицы простыхъ чиселъ, проведенныя до 9000000.

Эратосѳену принадлежитъ способъ составленія таблицъ простыхъ чиселъ, состоящій въ вычеркиваніи изъ написанныхъ подрядъ натуральныхъ чиселъ кратныхъ сначала числу 2, оставляя число 2 незачеркнутымъ, затѣмъ кратныхъ слѣдующему незачеркнутому числу 3, далѣе кратныхъ слѣдующему незачеркнутому числу 5 и т. д. Послѣ вычеркиванія этихъ кратныхъ остаются только простыя числа. Этотъ способъ носитъ названіе *рѣшета Эратосѳена.*

Нужно признаться, что до сихъ поръ этотъ способъ остается единственнымъ способомъ для составленія таблицъ простыхъ чиселъ, причемъ усовершенствованы только его детали.

§ 4. Простыя числа являются тѣми элементами, изъ которыхъ составляются другія числа, такъ называемыя составныя. Всякое составное число единственнымъ способомъ раскладывается на простые множители. Получается формула

$$n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots, \tag{1}$$

выражающая, что цѣлое число n имѣетъ α множителей, равныхъ p, β множителей, равныхъ q, γ множителей, равныхъ r, и т. д. Когда число разложено на простые множители, тогда рѣшаются очень просто различные вопросы. Напримѣръ, всякій дѣлитель числа (1) можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ:

$$d = p^\lambda q^\mu r^\nu \ldots,$$

гдѣ

$$\lambda \leqq \alpha, \mu \leqq \beta, \nu \leqq \gamma, \ldots$$

Если мы напишемъ такіе многочлены:

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1},$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^\beta = \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}, \tag{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и перемножимъ эти равенства, то получимъ

$$\Sigma d = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1} \ldots, \tag{3}$$

гдѣ въ первой части находится сумма всѣхъ дѣлителей числа n, включая въ число дѣлителей единицу и само число n.

Такъ какъ при перемноженіи многочленовъ, стоящихъ въ лѣвыхъ частяхъ равенствъ (2) никакихъ сокращеній членовъ не происходитъ, то число членовъ въ суммѣ Σd будетъ, очевидно,

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots \tag{4}$$

т. е. равно произведенію чиселъ членовъ во всѣхъ перемножаемыхъ многочленахъ.

Итакъ, формула (4) даетъ число различныхъ дѣлителей заданнаго числа n, а формула (3) сумму этихъ дѣлителей.

Въ XVIII столѣтіи называли *совершенными* такія числа, у которыхъ сумма дѣлителей равняется удвоенному самому числу, напримѣръ.

$$2 \cdot 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 \,.$$

§ 5. Что касается разложенія числа на простые множители, то это задача, которую надо считать трудною, потому что до сихъ поръ мы не имѣемъ другого способа для рѣшенія ея, какъ пробовать дѣлить число на всѣ простыя числа, не превосходящія корня квадратнаго изъ этого числа. Нетрудно убѣдиться, что если число достаточно велико, то такая проба вслѣдствіе большого числа вычисленій можетъ потребовать времени, которымъ мы располагать не можемъ.

§ 6. Простою является задача нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ заданныхъ чиселъ. Она совпадаетъ по характеру съ задачей нахожденія общей мѣры двухъ отрѣзковъ, изложенной въ § 11 гл. I.

Эта задача рѣшается при помощи алгоритма послѣдовательныхъ дѣленій, называемаго нынѣ *алгоритмомъ Эвклида*; этотъ алгоритмъ излагается во всѣхъ курсахъ элементарной математики.

О сравненіяхъ.

§ 7. Несмотря на блестящія изслѣдованія и открытія, сдѣланныя въ теоріи чиселъ Fermat, Lagrange'емъ, Euler'омъ, нужно считать за начало теоріи чиселъ, какъ науки, геніальное сочиненіе Gauss'а „Disquisitiones arithmeticae".

Одно изъ весьма важныхъ нововведеній, сдѣланныхъ Gauss'омъ состоитъ въ понятіи о такъ называемыхъ сравненіяхъ.

§ 8. Если разность $a-b$ двухъ цѣлыхъ чиселъ a и b дѣлится на k, то Gauss такія два числа называетъ *сравнимыми между собою по модулю* k и вводится обозначеніе

$$a \equiv b \; (mod\, k)\,, \tag{1}$$

причемъ эта формула носитъ названіе *сравненія* *).

---

*) Нѣкоторые авторы предлагаютъ знакомъ $a \equiv b$ обозначать тождественное равенство въ отличіе отъ обыкновеннаго равенства $a = b$. Въ виду первостепенной важности въ математикѣ Gauss'овскаго понятія о

Напримѣръ

$$17 \equiv 2 \, (mod\, 3).$$

Оказывается, что сравненія обладаютъ свойствами, аналогичными свойствамъ уравненій алгебры. Такъ, напримѣръ, два сравненія можно почленно складывать, вычитать и умножать, т. е. изъ двухъ сравненій

$$a \equiv b \, (mod\, k),$$
$$a_1 \equiv b_1 \, (mod\, k),$$

вытекаютъ, какъ слѣдствія, слѣдующія три сравненія:

$$a + a_1 \equiv b + b_1 \, (mod\, k),$$
$$a - a_1 \equiv b - b_1 \, (mod\, k),$$
$$aa_1 \equiv bb_1 \, (mod\, k).$$

§ 9. Изъ соображеній предыдущаго §-а вытекаетъ, что обѣ части сравненія можно умножать на одно и то же число, а также возвышать въ какую угодно цѣлую положительную степень, т. е. изъ сравненія

$$a \equiv b \, (mod\, k)$$

получается

$$ca \equiv cb \, (mod\, k)$$

и

$$a^n \equiv b^n \, (mod\, k).$$

Вообще говоря, если мы обозначимъ черезъ $f(x)$ цѣлую функцію отъ x съ цѣлыми коэффиціентами, напримѣръ

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \; . \; \; . \; \; . + p_n,$$

гдѣ $p_0, p_1, \; . \; \; . \; \; . \; p_n$ числа цѣлыя, то изъ сравненія

$$x \equiv a \, (mod\, k)$$

получаемъ

$$f(x) \equiv f(a) \, (mod\, k).$$

§ 10. Если задано сравненіе

(1) $$f(x) \equiv 0 \, (mod\, k),$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами, то можетъ быть поставлена задача о рѣшеніи этого сравненія, задача, аналогичная задачѣ рѣшенія уравненія въ алгебрѣ.

сравненія едва ли можно рекомендовать употреблять знакъ сравненія для обозначенія тождества, тѣмъ болѣе, что, по моему мнѣнію, особенной надобности въ подчеркиваніи различія между равенствомъ и тождествомъ нѣтъ.

Подъ корнемъ сравненія (1) мы будемъ, очевидно, разумѣть также цѣлое число a, при которомъ

$$f(a) \equiv 0 \, (mod \, k).$$

Напримѣръ, сравненіе

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 \, (mod \, 7)$$

имѣетъ корнемъ $x = 5$, ибо послѣ подстановки вмѣсто x числа 5 получимъ тождественное сравненіе

$$21 \equiv 0 \, (mod \, 7).$$

На основаніи соображеній предыдущаго §-а мы замѣчаемъ, что если сравненіе (1) имѣетъ корень a, то это сравненіе можно переписать такъ

$$f(x) = f(a) \, (mod \, k),$$

а тогда послѣднему сравненію будетъ удовлетворять всякое число x, удовлетворяющее сравненію

$$x \equiv a \, (mod \, k). \tag{2}$$

Различныя числа x, удовлетворяющія сравненію (2), представляютъ собою безконечный рядъ чиселъ

$$\ldots a - 2k, a - k, a, a + k, a + 2k, \ldots, \tag{3}$$

распространяющійся въ обѣ стороны. Числа (3) представляютъ собою такъ называемый *классъ чиселъ по модулю* k.

Мы видимъ, слѣдовательно, что съ точки зрѣнія рѣшенія сравненій всѣ числа класса (3) можно считать какъ бы за одно число. Значитъ, когда въ теоріи чиселъ идетъ вопросъ о нахожденіи всѣхъ рѣшеній сравненія (1), то дѣло идетъ о нахожденіи различныхъ классовъ чиселъ.

Очевидно, что среди чиселъ класса (3) существуетъ всегда одно и только одно число, которое заключается среди чиселъ

$$0, 1, 2, 3, \ldots, k \quad 1. \tag{4}$$

Это число носитъ названіе *вычета по модулю* k всѣхъ чиселъ разсматриваемаго класса, и его можно принять за представителя класса.

Итакъ, задача рѣшенія сравненія 1) приводится къ нахожденію тѣхъ изъ чиселъ (4), которыя удовлетворяютъ сравненію (1). Очевидно, что эта задача рѣшается при помощи конечнаго числа пробъ, стоитъ только перепробовать подставить въ заданное сравненіе вмѣсто x всѣ числа (4). Конечно, рѣшеніе вопроса при помощи пробъ дѣлается неудобнымъ при большомъ значеніи модуля.

§ 11. Замѣчательно, что для сравненій развивается теорія, совершенно аналогичная теоріи уравненій алгебры. Надо отмѣтить тотъ замѣчательный фактъ, что аналогія въ своемъ полномъ видѣ идетъ только для случая простого модуля, въ случаѣ же сложнаго модуля аналогія затемняется.

Существуетъ такое предложеніе. Какъ показалъ Lagrange, *всякое сравненіе степени n по простому модулю не можетъ имѣть болѣе n корней.*

Случай, когда сравненіе имѣетъ какъ разъ n корней, аналогиченъ случаю всѣхъ вещественныхъ корней уравненія. Когда число корней сравненія меньше степени его, то, какъ показалъ Galois, можно развить теорію мнимыхъ корней сравненія, аналогичную теоріи мнимыхъ корней уравненія.

§ 12. При разсмотрѣніи показательныхъ сравненій

$$a^x \equiv b \pmod k$$

получается теорія, аналогичная теоріи логариѳмовъ. Скажемъ нѣсколько словъ объ этой теоріи.

Пусть a число взаимно простое съ модулемъ k. Разсмотримъ рядъ степеней

$$a, a^2, a^3, a^4, \ldots \tag{1}$$

Всѣ эти степени дадутъ числа, взаимно простыя съ модулемъ k.

Существуетъ конечное число классовъ чиселъ по модулю k, взаимно простыхъ съ k. Число такихъ классовъ, которое мы обозначимъ $\varphi(k)$, очевидно, равняется числу чиселъ, находящихся въ рядѣ

$$0, 1, 2, \ldots k-1 \tag{2}$$

и взаимно простыхъ съ k. Очевидно, поэтому, что всѣ числа безконечнаго ряда (1) не могутъ принадлежать къ различнымъ классамъ, ибо классовъ только конечное число. Слѣдовательно, въ рядѣ (1) непремѣнно должны быть числа, принадлежащія къ одному классу, и мы получаемъ

$$a^{n+m} \equiv a^n \pmod k;$$

откуда, раздѣляя обѣ части на a^n, имѣемъ

$$a^m \equiv 1 \pmod k. \tag{3}$$

Итакъ, мы видимъ, что всегда должно существовать нѣкоторое число m, удовлетворяющее сравненію (3).

Euler называетъ число a *принадлежащимъ къ показателю* m, если m наименьшее число, при которомъ имѣетъ мѣсто сравненіе (3), и показываетъ затѣмъ, что показатель, къ которому принадлежитъ число a, взаимно простое съ модулемъ k, долженъ быть дѣлителемъ числа

$$\varphi(k)=\lambda.$$

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ изъ ряда (2) всѣ числа, взаимно простыя съ k. Пусть эти числа будутъ

$$a_1, a_2, \quad a_\lambda.$$

Тогда разсмотримъ произведенія

(4) $$aa_1, aa_2, \quad aa_\lambda$$

и обозначимъ черезъ $b_1, b_2, \quad b_\lambda$ вычеты чиселъ (4) по модулю k. Получимъ сравненія

(5) $$\begin{gathered} aa_1 \equiv b_1 \,(mod\, k), \\ aa_2 \equiv b_2 \,(mod\, k), \\ \cdots\cdots \\ aa_\lambda \equiv b_\lambda \,(mod\, k). \end{gathered}$$

Такъ какъ числа $b_1, b_2, \ldots b_\lambda$ должны быть различными числами изъ ряда (2), взаимно простыми съ k, то очевидно, что эти числа совпадаютъ съ числами $a_1, a_2 \ldots a_\lambda$ и могутъ отличаться отъ нихъ только порядкомъ.

Перемножая сравненія (5) и сокращая обѣ части на одно и то же произведеніе, получаемъ

$$a^\lambda \equiv 1 \,(mod\, k)$$

или

(6) $$a^{\varphi(k)} \equiv 1 \,(mod\, k).$$

Это равенство представляетъ собою извѣстную теорему Euler'а. Если k простое число p, то очевидно, что

$$\varphi(p)=p-1,$$

ибо всѣ числа

$$1, 2, 3, \quad p-1,$$

меньшія p, суть числа взаимно простыя съ p. Отсюда теорема Euler'а принимаетъ видъ

(7) $$a^{p-1} \equiv 1 \,(mod\, p).$$

Въ этомъ видѣ теорема высказана Fermat'омъ.

§ 13. Число a Euler называетъ *первообразнымъ корнемъ* модуля k, если оно принадлежитъ къ показателю $\varphi(k)$.

Если модуль простое число p, то всегда существуютъ первообразные корни, т. е. такія числа a, не дѣлящіяся на p, которыя принадлежатъ къ показателю $p-1$; другими словами, по теоремѣ Fermat'а существуетъ сравненіе

$$a^{p-1} \equiv 1 \,(mod\, p)$$

и не существуетъ никакого числа m, меньшаго $p-1$, при которомъ было бы

$$a^m \equiv 1 \,(mod\, p).$$

§ 14. Оказывается, что если a будетъ первообразный корень числа p, то показательное сравненіе

$$a^x \equiv b \,(mod\, p)$$

можно рѣшить при всякомъ числѣ b, не дѣлящемся на p.

Число x носитъ названіе *индекса* числа b, а первообразный корень a называется *основаніемъ индексовъ*.

Индексы въ теоріи чиселъ даютъ возможность достигать вычислительныхъ выгодъ, аналогичныхъ тѣмъ, которыя даютъ логарифмы, а именно, умноженіе чиселъ замѣняется сложеніемъ индексовъ, возвышеніе въ степень замѣняется умноженіемъ индекса на число. Извѣстнымъ математикомъ *Jacobi* составлены таблицы индексовъ для всѣхъ простыхъ модулей до 1000 *).

Сравненія различныхъ степеней съ простымъ модулемъ.

§ 15. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію сравненій различныхъ степеней по простому модулю.

Что касается сравненій *первой степени*

$$ax + b \equiv 0 \,(mod\, p),$$

то очевидно, что если a не дѣлится на p, то сравненіе имѣетъ всегда *одно* рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, если мы въ выраженіе $ax+b$ вмѣсто x будемъ подставлять числа

$$0, 1, 2, \ldots p-1,$$

то будемъ получать числа

(1) $$b, a+b, a.2+b, \ldots a(p-1)+b,$$

*) Таблицы Jacobi продолжены по моему предложенію студентами Кіевскаго Университета для простыхъ модулей до 2000. При вычисленіяхъ пользовались счетными машинами. Эти таблицы до сихъ поръ не опубликованы.

которыя, очевидно, принадлежатъ къ различнымъ классамъ, потому что разность между каждыми двумя изъ чиселъ (1) не можетъ дѣлиться на p. Слѣдовательно, среди этихъ чиселъ навѣрное одно принадлежитъ къ классу, сравнимому съ нулемъ по модулю p, и заданное сравненіе имѣетъ одинъ и только одинъ корень.

§ 16. Сравненія *квадратныя*, по аналогіи съ уравненіями, всегда могутъ быть приведены къ неполнымъ квадратнымъ сравненіямъ вида

$$x^2 \equiv q\,(mod\,p), \tag{1}$$

причемъ оказывается, что такое сравненіе или имѣетъ два корня, или ни одного.

Если сравненіе (1) имѣетъ два корня, т. е. другими словами, если оно возможно, то число q носитъ названіе *квадратичнаго вычета* модуля p. Если же сравненіе (1) невозможно, тогда число q называется *квадратичнымъ невычетомъ* числа p. Legendre ввелъ въ науку весьма полезный символъ

$$\left(\frac{q}{p}\right),$$

который опредѣляется равенствомъ

$$\left(\frac{q}{p}\right) = +1,$$

если q вычетъ, и равенствомъ

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1,$$

если q невычетъ.

Уже задолго до появленія „Disquisitiones arithmeticae“ сдѣлалась ясной важность разсмотрѣнія такой задачи: даны два простыхъ числа p и q; требуется разсмотрѣть два сравненія

$$x^2 \equiv q\,(mod\,p),$$
$$x^2 \equiv p\,(mod\,q)$$

и найти условія возможности ихъ рѣшенія.

Эта задача привела къ весьма важному въ наукѣ закону, носящему названіе *закона взаимности двухъ простыхъ чиселъ*.

Gauss былъ первымъ, который далъ вполнѣ удовлетворительное доказательство этого закона. Первое доказательство Gauss'а находится въ „Disquisitiones arithmeticae“ art. 131. Признавая большое значеніе закона взаимности, Gauss далъ ему еще шесть другихъ доказательствъ. Доказательства Gauss'a видоизмѣнены и упрощены послѣдующими математиками.

Законъ взаимности формулируется въ трехъ равенствахъ

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

гдѣ q и p нечетныя простыя числа.

Ариѳметическая теорія алгебраическихъ величинъ.

§ 17. Желая обобщить законъ взаимности квадратичныхъ вычетовъ для высшихъ степеней, причемъ подъ вычетомъ степени n числа p разумѣется такое число q, при которомъ возможно сравненіе

$$x^n \equiv q \,(mod\, p),$$

Gauss сдѣлалъ важное по своей мысли нововведеніе, а именно расширилъ кругъ чиселъ, съ которыми имѣетъ дѣло теорія чиселъ. Разсматривая такъ называемые биквадратичные вычеты, т. е. вычеты четвертой степени, Gauss ввелъ въ разсмотрѣніе числа *цѣлыя комплексныя*, т. е. числа вида

$$a+b\sqrt{-1}, \tag{1}$$

гдѣ a и b цѣлыя числа.

Оказывается, что если мы будемъ называть числа вида (1) цѣлыми, если у нихъ вещественная часть a и мнимая часть b цѣлыя числа, и дробными въ томъ случаѣ, если оба или одно изъ чиселъ a и b дробное, то для такихъ цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ вся эвклидовская теорія дѣлимости, вытекающая изъ алгоритма общаго наибольшаго дѣлителя, остается въ силѣ.

Теоремы Gauss'a были окончательно доказаны Eisenstein'омъ въ бытность послѣдняго студентомъ университета. Eisenstein обобщилъ далѣе разсужденія Gauss'a на случай кубическихъ вычетовъ, причемъ эти обобщенія были продолжены и для вычетовъ высшихъ степеней.

§ 18. Разсматривая цѣлыя комплексныя числа вида

$$x = a + b\sqrt{-1},$$

мы замѣчаемъ, что они суть корни уравненія

$$(x - a)^2 + b^2 = 0$$

или

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

т. е. уравненія вида

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

гдѣ при старшемъ членѣ коэффиціентъ единица, а другіе два коэффиціента A и B суть числа цѣлыя.

Въ настоящее время еще болѣе расширенъ кругъ чиселъ, надъ которыми оперируетъ теорія чиселъ, и введены такъ называемыя *цѣлыя алгебраическія числа*.

Подъ цѣлымъ алгебраическимъ числомъ разумѣется корень всякаго уравненія вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

гдѣ коэффиціентъ при старшей степени равенъ единицѣ, всѣ же остальные коэффиціенты числа цѣлыя въ обыкновенномъ смыслѣ слова. Число алгебраическое носитъ названіе дробнаго, если оно удовлетворяетъ уравненію

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n = 0,$$

причемъ всѣ коэффиціенты цѣлые, не имѣющіе общаго дѣлителя, и коэффиціентъ при старшемъ членѣ не равенъ единицѣ.

Легко убѣдиться, что всякое дробное алгебраическое число умноженіемъ на нѣкоторое натуральное число обращается въ цѣлое алгебраическое.

Въ самомъ дѣлѣ, если алгебраическое число ω не цѣлое, то оно удовлетворяетъ уравненію

(1) $$\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

гдѣ раціональные коэффиціенты $A_1, A_2, \ldots A_n$ не всѣ цѣлые. Обозначивъ черезъ a общій знаменатель всѣхъ дробныхъ коэффиціентовъ, уравненіе (1) можно представить въ такомъ видѣ:

$$(a\omega)^n + A_1 a (a\omega)^{n-1} A_2 a^2 (a\omega)^{n-2} + \ldots + A_n a^n = 0,$$

и, значитъ, число $a\omega$ будетъ цѣлымъ алгебраическимъ.

§ 19. Обыкновенно разсматриваются числа нѣкоторой опредѣленной *области*, причемъ подъ областью чиселъ разумѣется совокупность всѣхъ раціональныхъ функцій $\varphi(\Theta)$ съ цѣлыми въ обыкновенномъ смыслѣ коэффиціентами, гдѣ Θ есть цѣлое алгебраическое число, т. е. корень нѣкотораго неприводимаго уравненія

$$\Theta^n + a_1 \Theta^{n-1} + a_2 \Theta^{n-1} + \ldots + a^n = 0.$$

Такъ напримѣръ, цѣлыя комплексныя числа Gauss'а суть числа области, опредѣляемой уравненіемъ

$$\Theta^2 + 1 = 0.$$

Разсматривая для каждаго числа $\varphi(\Theta)$ данной области то алгебраическое уравненіе, которому оно удовлетворяетъ, мы можемъ узнать, будетъ ли это число цѣлымъ алгебраическимъ или дробнымъ. Всѣ числа области раздѣляются на цѣлыя и дробныя.

Основною задачей является убѣдиться, остаются ли въ силѣ основныя положенія теоріи дѣлимости для цѣлыхъ чиселъ алгебраическихъ данной области. Оказывается, что лишь для немногихъ областей сохраняются основные законы ариѳметики, большинство же областей представляютъ новыя явленія.

Оказывается, что вообще говоря, разложеніе цѣлаго алгебраическаго числа на простые множители, далѣе неразлагаемые, можетъ происходить не однимъ способомъ, т. е. часто въ областяхъ справедливо тождество вида

(1) $$\alpha\beta = \gamma\delta,$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ различныя между собою цѣлыя числа области, не разложимыя далѣе на множители.

У Kummer'а явилась счастливая мысль ввести новыя несуществующія, такъ называемыя *идеальныя* числа, причемъ эти числа, группируясь въ произведенія, могутъ давать числа существующія. Потому двойное разложеніе на простые множители, выражаемое равенствомъ (1), можно себѣ объяснить такъ, что въ данномъ случаѣ число раскладывается на четыре идеальныхъ множителя $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1$, причемъ

$$\alpha = \alpha_0 \alpha_1, \beta = \beta_0 \beta_1, \gamma = \alpha_0 \beta_0, \delta = \alpha_1 \beta_1.$$

Теорія идеальныхъ чиселъ представляетъ собою кульминаціонный пунктъ современной теоріи чиселъ. Въ этой теоріи получили извѣстность Dedekind, Kronecker и Hensel.

Вмѣсто идеальныхъ чиселъ Dedekind ввелъ новое понятіе объ „идеалѣ", причемъ подъ идеалами разумѣются нѣкоторые числовые ансамбли.

Школа Kronecker'a, въ которой особенно выдѣлились Weber, Frobenius и Hensel, сблизила теорію идеаловъ съ теоріей алгебраическихъ функцій. Hensel'ю, принадлежитъ честь введенія въ науку новыхъ символовъ, названныхъ имъ *p-адическими* числами.

Аналитическая теорія чиселъ.

§ 20. Въ XIX столѣтіи при развитіи идей Gauss'a, находящихся въ его сочиненіи „Disquisitiones arithmeticae", произошло сближеніе теоріи чиселъ съ анализомъ безконечно малыхъ. Это сближеніе выразилось въ появленіи особенной части теоріи чиселъ, которая въ настоящее время называется *аналитической теоріей чиселъ*.

Несомнѣнно, что первыя начала этой теоріи были положены Dirichlet, который связалъ Gauss'овскую задачу опредѣленія числа классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ съ вопросами теоріи рядовъ и интегральнаго исчисленія. Подъ вліяніемъ изслѣдованій Eisenstein'a и Kronecker'a явились изслѣдованія, сблизившія теорію чиселъ съ теоріей эллиптическихъ функцій и служившія обобщеніемъ теоріи двучленныхъ уравненій. Наконецъ, необходимо упомянуть о начатыхъ Чебышевымъ изслѣдованіяхъ о числѣ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго предѣла. Чебышевъ показалъ приложенія къ этому вопросу разсмотрѣнія интеграла

$$\int \frac{dx}{lg\, x}.$$

Изслѣдованія Чебышева были продолжены Riemann'омъ.

ГЛАВА VI.

Различныя теченія въ геометріи.

Analysis situs.

§ 1. Геометрія положенія, названная Leibnitz'омъ и Euler'омъ *analysis situs* и называемая въ настоящее время также *топологіей*, представляетъ изъ себя доктрину, получившую теперь большое развитіе и имѣющую рядъ важныхъ приложеній. Давать полную характеристику этой части геометріи представляло бы задачу, не соотвѣтствующую цѣлямъ нашего изложенія; мы ограничимся лишь указаніемъ на нѣкоторыя задачи, разсматриваемыя въ этой части геометріи, которыя могутъ служить для характеристики методовъ, употребляемыхъ въ геометріи положенія. Въ настоящее время при систематическомъ изложеніи геометріи положенія ее дѣлятъ обыкновенно на три части, которымъ дали слѣдующія названія: 1) *complexus*, 2) *nexus* и 3) *connexus*.

§ 2. Геометрію положенія можно характеризовать, хотя не совсѣмъ строго, такъ: эта геометрія изучаетъ тѣ свойства геометрическихъ объектовъ, которыя не зависятъ отъ точнаго вида и точныхъ размѣровъ разсматриваемаго объекта. Лучше всего мы укажемъ на характеръ вопросовъ геометріи положенія, разсмотрѣвши задачи, приведенныя ниже.

Теорема Euler'а о многогранникахъ.

§ 3. Будемъ разсматривать произвольно выбранный сомкнутый многогранникъ. Грани этого многогранника могутъ быть совершенно произвольными плоскими многоугольниками, и число этихъ граней можетъ быть совершенно произвольно выбраннымъ. Несмотря на такую произвольность формы многогранника существуетъ замѣчательное соотношеніе между слѣдующими тремя числами: числомъ A реберъ (arêtes), числомъ F граней (faces) и числомъ S вершинъ (sommets) многогранника.

Euler показалъ, что независимо отъ вида многогранника, всегда существуетъ слѣдующее соотношеніе

$$A+2=F+S. \tag{1}$$

Приведемъ здѣсь очень простое доказательство теоремы Euler'a, указанное Cauchy. Вынемъ изъ многогранника нѣсколько смежныхъ между собой граней и назовемъ такую фигуру открытымъ многогранникомъ; легко убѣдиться, что для всякаго открытаго многогранника будетъ имѣть мѣсто формула

$$A+1=F+S. \tag{2}$$

Докажемъ формулу (2) по индукціи: мы замѣчаемъ, что она справедлива въ томъ случаѣ, когда открытый многогранникъ состоитъ изъ одной грани, представляющей многоугольникъ съ n сторонами. Для такого случая $F=1$, а какъ число вершинъ S, такъ и число реберъ A равно n, значитъ равенство (2) удовлетворяется. Покажемъ теперь, что если фомула (2) будетъ справедливой для нѣкотораго числа F граней, то она останется справедливой, если мы къ открытому многограннику приставимъ еще одну грань. Пусть эта грань будетъ m-угольникъ и пусть она приставлена къ остальнымъ p сторонами, такъ что эти p сторонъ совпадаютъ со сторонами другихъ граней, а $m-p$ сторонъ остаются свободными. Тогда очевидно, что совпадутъ $p+1$ вершинъ послѣдней грани съ вершинами предыдущихъ граней. Обозначимъ для новаго открытаго многогранника числа граней, реберъ и вершинъ черезъ F', A', S'. Очевидно, будетъ

$$F'=F+1, \tag{3}$$

такъ какъ въ новомъ многранникѣ число граней на одну больше. Подобнымъ же образомъ

$$A'=A+m-p \tag{4}$$

и, наконецъ,

$$S'=S+m-(p+1). \tag{5}$$

Мы замѣчаемъ отсюда, что, если имѣетъ мѣсто равенство (2), то числа F', A' и S' удовлетворяютъ тому же равенству (2), т. е.

$$A'+1=F'+S',$$

въ чемъ легко убѣдиться.

Итакъ, равенство (2) оказывается всегда справедливымъ. Чтобы перейти къ теоремѣ Euler'a, предположимъ, что въ открытомъ многогранникѣ существуетъ только одно отверстіе, состоящее въ удаленіи одной грани. Это удаленіе одной грани не уменьшаетъ ни числа реберъ, ни числа вершинъ, только число граней дѣлается на единицу меньше; поэтому въ формулу (2) надо подставить вмѣсто F число $F-1$, и мы получимъ формулу Euler'a (1).

§ 4. Теорема Euler'a даетъ возможность очень просто получить цѣлый рядъ весьма важныхъ заключеній, относящихся къ произвольнымъ замкнутымъ многогранникамъ. Мы считаемъ полезнымъ привести наиболѣе важныя изъ такихъ свойствъ. Распредѣлимъ грани многогранника по числу ихъ сторонъ. Пусть t будетъ число треугольныхъ граней, q — четыреугольныхъ, p — пятиугольныхъ, h — шестиугольныхъ, h' — семиугольныхъ, o — восьмиугольныхъ и т. д. Подобнымъ же образомъ обозначимъ T, Q, P, H, H', O, и т. д. число вершинъ или число тѣлесныхъ угловъ многогранника, имѣющихъ 3, 4, 5 и т. д. реберъ. Тогда мы получаемъ слѣдующій рядъ очевидныхъ формулъ:

(1) $F=t+q+p+h+h'+o+\ldots$

(2) $2A=3t+4q+5p+6h+7h'+8o+\ldots$

(3) $S=T+Q+P+H+H'+O+\ldots$

(4) $2A=3T+4Q+5P+6H+7H'+8O+\ldots$

Въ формулахъ (2) и (4) въ первой части появляется при числѣ A множитель 2 потому, что на каждомъ ребрѣ сходятся двѣ грани, и каждое ребро соединяетъ двѣ вершины.

Первое слѣдствіе, которое можно вывести изъ формулъ (2) и (4) состоитъ въ томъ, что двѣ суммы

$$t+p+h'+\ldots$$

и

$$T+P+H'+\ldots$$

суть числа четныя.

Исключая числа A и S изъ формулы Euler'a и изъ формулъ (3) и (4) мы получимъ

(5) $2F=4+T+2Q+3P+4H+5H'+6O+\ldots$

Подобнымъ же образомъ, исключая числа A и F изъ формулы Euler'a и изъ формулъ (1) и (2) мы получимъ

(6) $2S=4+t+2q+3p+4h+5h'+6o+\ldots$

Умножая формулу Euler'a на 4, получаемъ

(7) $$4F+4S=4A+8.$$

Подставляемъ въ это равенство выраженія F и S изъ уравненій (1) и (3); въ первой части равенства получаемъ:

$$4(t+T)+4(q+Q)+4(p+P)+\ldots,$$

для составленія же второй части равенства (7) складываемъ равенства (2) и (4); получаемъ выраженіе

$$8+3(t+T)+4(q+Q)+5(p+P)+\ldots;$$

отсюда

(8) $$t+T=8+(p+P)+2(h+H)+3(h'+H')+4(o+O)+\ldots$$

Равенство (8) показываетъ, что

(9) $$t+T\geqslant 8;$$

мы приходимъ, слѣдовательно, къ такой теоремѣ.

Во всякомъ многогранникѣ должны находиться или треугольныя грани или трехгранные углы, такъ какъ на основаніи неравенствъ (9) числа t и T оба сразу не могутъ равняться нулю.

§ 5. На основаніи равенствъ (3) и (4) предыдущаго §-а мы имѣемъ неравенство

$$2A\geqslant 3S;$$

подставляя сюда вмѣсто A и S ихъ значенія изъ равенствъ (2) и (6) получимъ

$$3t+4q+5p+\ldots\geqslant\frac{3}{2}(4+t+2q+3p+\ldots),$$

откуда

(1) $$3t+2q+p\geqslant 12+h'+2o+\ldots.$$

Формула (1) показываетъ, что не могутъ равняться нулю одновременно всѣ три числа t, q и p, и мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *не можетъ существовать многогранникъ, всѣми гранями котораго служатъ многоугольники съ числомъ сторонъ бо́льшимъ, чѣмъ пять.*

§ 6. На основаніи соображеній, аналогичныхъ соображеніямъ предыдущаго §-а, получаемъ

$$2A\geqslant 3F,$$

откуда вытекаетъ

(1) $$3T+2Q+P\geqslant 12+H'+2O+\ldots$$

Мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *не можетъ существовать многогранникъ, всѣ тѣлесные углы котораго имѣли бы число реберъ бо́льшее, чѣмъ пять.*

§ 7. Читатель уже замѣтилъ, конечно, взаимность, существующую между тѣлесными углами многогранника и соотвѣтствующими имъ вершинами съ одной стороны и гранями его съ другой.

§ 8. Поставимъ себѣ задачей найти всѣ многогранники, имѣющіе гранями n—угольники, при вершинахъ которыхъ находятся тѣлесные углы, заключающіе всѣ, положимъ, m реберъ; получаемъ въ этомъ случаѣ

$$nF = 2A, \tag{1}$$

$$mS = 2A; \tag{2}$$

присоединяя къ этимъ равенствамъ равенство Euler'а

$$A + 2 = F + S, \tag{3}$$

можемъ рѣшить уравненія (1), (2) и (3) относительно трехъ неизвѣстныхъ A, F и S:

$$F = \frac{4m}{2(n+m) - nm}. \tag{4}$$

Разсмотримъ сначала случай $n = 3$, т. е. тотъ случай, когда всѣ грани многогранника треугольники; тогда

$$F = \frac{4m}{6-m};$$

для числа m мы получаемъ три возможныхъ значенія:

$$m = 3, m = 4, m = 5;$$
$$F = 4, F = 8, F = 20.$$

Получаемъ тетраэдръ, октаэдръ и икосаэдръ. Обращаясь къ случаю $n = 4$, т. е. къ тѣлу, ограниченному четыреугольниками, мы получаемъ

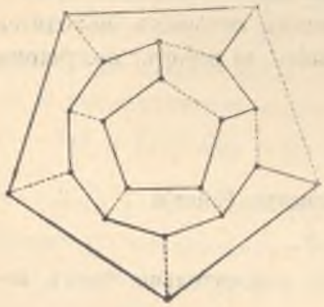
$$F = \frac{2m}{4-m};$$

единственный возможный случай получимъ при $m = 3$, $F = 6$; получается гексаэдръ. Наконецъ при $n = 5$, т. е. если тѣло ограничено пятиугольниками мы имѣемъ

$$F = \frac{4m}{10 - 3m};$$

единственный возможный случай при $m = 3, F = 12$; получается додекаэдръ.

§ 9. Мы вошли въ нѣкоторыя подробности относительно вопросовъ, связанныхъ съ теоремой Euler'а о многогранникахъ, въ виду ихъ большой важности. Но къ геометріи положенія относится очень много вопросовъ аналогичнаго характера, которые часто задавались, какъ математическія развлеченія, и рядъ задачъ, предлагавшихся для испытанія ясности пространственныхъ представленій. Я упомяну о двухъ изъ нихъ; въ первой задачѣ Euler'а, извѣстной подъ именемъ задачи Кенигсбергскихъ мостовъ, разсматривается рядъ мостовъ черезъ отдѣльные рукава дельты нѣкоторой рѣки, причемъ требуется непрерывнымъ движеніемъ обойти всѣ эти мосты, не пройдя дважды ни по одному изъ нихъ; вторая задача, на которую я обращаю вниманіе, есть такъ называемая игра съ додекаэдромъ Hamilton'а. Дѣло идетъ о непрерывномъ обходѣ по ребрамъ додекаэдра такимъ образомъ, чтобы пройти по одному разу черезъ всѣ вершины. Рѣшеніе этой задачи показано на чертежѣ 74.



Черт. 74.

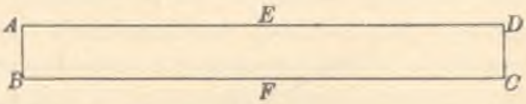
Односторонняя поверхность Möbius'а.

§ 10. Существуетъ два различныхъ вида поверхностей въ трехмѣрномъ пространствѣ: двухстороннія и одностороннія.

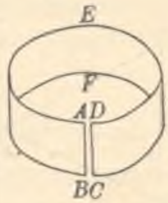
Если мы разсмотримъ, напримѣръ, шаровую поверхность, то мы отличаемъ въ ней двѣ стороны: внѣшнюю и внутреннюю, лицевую и изнанку; если мы разрѣжемъ резиновый мячъ, на которомъ нарисованы красками фигуры, то обнаружимъ его изнанку, которая остается незакрашеной. Möbius обратилъ первый вниманіе на существованіе одностороннихъ поверхностей, т. е. такихъ, относительно которыхъ не можетъ быть установлено различіе между лицевой стороной и изнанкой. Можно по примѣру Möbius'а дать очень простой и наглядный примѣръ односторонней поверхности.

Вырѣжемъ изъ бумаги прямоугольникъ $ABCD$ (черт. 75). Если мы его согнемъ въ цилиндрическое кольцо такъ, что совмѣстимъ D съ A и C съ B, то получимъ обыкновенную цилиндрическую поверхность, имѣющую двѣ стороны. Если же мы воспользуемся гибкостью бумаги и изогнемъ нашу полосу въ такое кольцо, чтобы уголъ D совпалъ съ угломъ B, а C съ A, тогда получится такая поверхность, по которой непрерывнымъ движеніемъ по лицевой сторонѣ можно попасть на изнанку. Легко убѣдиться еще въ такомъ отличіи поверхности 3 отъ кольца 2. Кольцо 2 имѣетъ двѣ граничныя кривыя, два края AED и BFC, а поверхность 3 имѣетъ только одинъ край $AEDBFCA$.

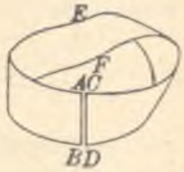
§ 11. Оканчивая нашъ краткій обзоръ геометріи положенія мы должны обратить вниманіе читателя на то обстоятельство, что эта геометрія во второй половинѣ XIX столѣтія получила большое значеніе въ теоріи алгебраическихъ функцій вслѣдствіе весьма важнаго открытія, сдѣланнаго Riemann'омъ. Riemann ввелъ въ разсмотрѣніе при изученіи алгебраическихъ функцій и интеграловъ отъ нихъ особеннаго рода поверхности, носящія названіе Римановыхъ поверхностей. Оказывается, что въ теоріи алгебраическихъ функцій имѣютъ значеніе не сами по себѣ эти поверхности, а лишь такія ихъ свойства, которыя относятся къ геометріи положенія.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



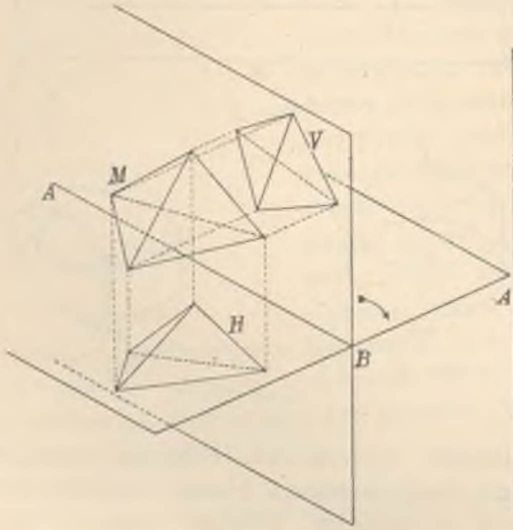
Фиг. 3.

Черт. 75.

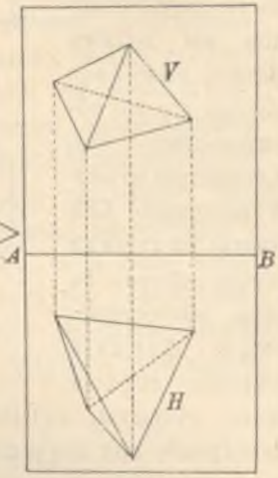
Начертательная геометрія.

§ 12. Подъ названіемъ *начертательной геометріи* мы разумѣемъ въ настоящее время пріемы изученія пространственныхъ фигуръ при помощи плоскихъ построеній. Изобрѣтеніе начертательной геометріи принадлежитъ извѣстному математику Monge'у. Основная идея этой геометріи въ высшей степени проста.

Возьмемъ въ пространствѣ двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости (черт. 76 на слѣд. стр.), пересѣкающіяся по прямой AB. Пусть одна изъ нихъ будетъ, напримѣръ, горизонтальна, а другая вертикальна. Возьмемъ въ пространствѣ нѣкоторую фигуру и будемъ проектировать точки этой фигуры на обѣ плоскости при помощи перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ этихъ точекъ на разсматриваемыя плоскости. Мы получимъ двѣ проекціи нашей фигуры M на двухъ плоскостяхъ: одну проекцію V на вертикальной, а другую H на горизонтальной; назовемъ проекцію V вертикальной проекціей фигуры M, а проекцію H горизонтальной проекціей фигуры M. Откинемъ вертикальную плоскость на горизонтальную при помощи



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Черт. 76.

поворота на 90° около прямой AB. Тогда у насъ получится фигура 2, причемъ проекціи V и H будутъ находиться уже на одной плоскости. Начертательная геометрія учитъ по виду проекцій V и H, начерченныхъ на одной плоскости, и по ихъ расположенію относительно линіи AB составлять полное представленіе относительно той пространственной фигуры M, которая послужила основаніемъ для построенія проекцій. Мы не будемъ распространяться болѣе подробно о пріемахъ начертательной геометріи, такъ какъ эти пріемы очень просты и непосредственно вытекаютъ изъ той задачи, которую ставитъ себѣ начертательная геометрія.

§ 13. Плоскій чертежъ, представляющій изъ себя совокупность двухъ проекцій, вертикальной и горизонтальной, пространственнаго предмета, носитъ названіе *эпюры*. Въ виду первостепенной важности для техника умѣнья читать эпюры, т. е. переходить отъ разсмотрѣнія эпюры къ тѣмъ пространственнымъ предметамъ, которые онъ изучаетъ, начертательная геометрія является однимъ изъ самыхъ важныхъ предметовъ преподаванія въ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ и по справедливости носитъ названіе глаза техника.

§ 14. Что касается проектированія пространственныхъ предметовъ на плоскости проекцій, то въ настоящее время въ начертательной геометріи не ограничиваются *ортогональной проекціей*, т. е. проектированіемъ при помощи перпендикуляровъ, а разсматриваютъ самые разнообразные виды проектированія; наиболѣе замѣчательны проектированіе линіями, параллельными между собою, такъ называемая *аксонометрическая проекція*, и проектированіе линіями, выходящими изъ одной точки—*линейная или коническая перспектива*.

Проективная геометрія.

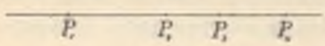
§ 15. Послѣ изобрѣтенія аналитической геометріи было вскорѣ замѣчено, что при всѣхъ своихъ достоинствахъ аналитическій способъ имѣетъ серьезные недостатки, состоящіе въ томъ, что при рѣшеніи геометрическихъ задачъ вводятся трудности вычислительнаго алгебраическаго характера, и часто трудности геометрической задачи такимъ путемъ преувеличиваются. Въ виду этого явилось у математиковъ направленіе, опозиціонное аналитической геометріи, которое выставило тезисомъ необходимость возвращенія къ чисто геометрическимъ методамъ рѣшенія задачъ. Математика этого направленія стремились создать новую, такъ называемую *синтетическую* геометрію, которая, оставаясь въ области чистой геометріи, давала бы общіе методы для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ. Сторонники синтетической геометріи думали возстановить геометрическій анализъ древнихъ грековъ, такъ какъ по нѣкоторымъ сочиненіямъ древне-греческихъ математиковъ, дошедшихъ до насъ въ отрывкахъ, можно было предполагать, что греческіе математики, сдѣлавшіе столько дошедшихъ до насъ открытій въ геометріи, повидимому, обладали нѣкоторыми общими методами изслѣдованія. На такія мысли наводятъ дошедшіе до насъ отрывки книги Эвклида подъ названіемъ „Поризмы". Особенно большое развитіе синтетическихъ пріемовъ въ геометріи имѣло мѣсто въ XIX столѣтіи, и самымъ яркимъ представителемъ этого направленія былъ французскій математикъ Chasles, написавшій исторію геометріи и выпустившій большую книгу подъ названіемъ „Синтетическая Геометрія". Въ послѣднее время антагонизмъ между аналитической и синтетической геометріей значительно уменьшился, такъ какъ распространяется все болѣе убѣжденіе о полезности пользованія при рѣшеніи задачъ самыми разнообразными пріемами, будутъ ли они аналитическими или синтетическими. Съ другой стороны выяснилось, что методы синтетической геометріи не такъ разнообразны и приводятъ главнымъ образомъ къ преобразованію фигуръ при помощи перспективы. Въ виду этого въ настоящее время синтетической геометріи даютъ чаще названіе *проективной* геометріи.

§ 16. Начала проективной геометріи относятся уже къ изслѣдованію Appolonius'а о коническихъ сѣченіяхъ. Если мы помѣстимъ точку глаза въ вершинѣ прямого кругового конуса, то коническое сѣченіе окажется перспективой круга основанія конуса на сѣкущей плоскости. Отсюда является одной изъ важныхъ задачъ проективной геометріи вывести свойства коническаго сѣченія изъ свойствъ круга. Чтобы характеризовать въ небольшомъ числѣ словъ задачи проективной геометріи, а также методы, которыми она пользуется, мы дадимъ понятіе о такъ называемомъ *ангармоническомъ или двойномъ отношеніи* четырехъ точекъ на прямой.

Будемъ называть двойнымъ отношеніемъ четырехъ точекъ P_1, P_2, P_3, P_4 (черт. 77) такую формулу:

$$\frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} : \frac{P_4 P_1}{P_4 P_2}. \tag{1}$$

При этомъ подъ знакомъ $P_3 P_1$ разумѣется отрѣзокъ, имѣющій началомъ P_3, а концомъ P_1 или же соотвѣтствующее ему число (см. § 16 гл. II). Двойное отношеніе (1) оказывается всецѣло нѣкоторымъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, могущимъ обращаться въ 0 или въ ∞, судя по тому, обращается ли въ 0 отрѣзокъ, стоящій въ числителѣ или знаменателѣ.



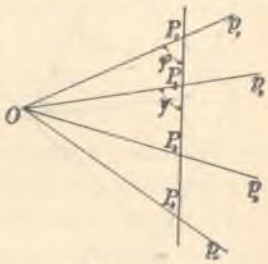
Черт. 77.

§ 17. Основная теорема проективной геометріи состоитъ въ томъ, что при перспективѣ одной плоской фигуры на другую плоскость двойное отношеніе всякихъ четырехъ точекъ, лежащихъ на прямой, не мѣняется; это обстоятельство иначе выражаютъ словомъ, что двойное отношеніе есть *инваріантъ* перспективнаго преобразованія фигуры. Элементарную планиметрію можно характеризовать, какъ геометрію, изучающую тѣ свойства плоскихъ фигуръ, которыя не мѣняются отъ перемѣщенія фигуръ съ одной части плоскости на другую; къ числу такихъ не мѣняющихся свойствъ относятся разстоянія между точками, углы, площади и т. д. Проективная же геометрія изучаетъ такія преобразованія, при которыхъ длины и углы могутъ измѣняться, неизмѣннымъ же остается двойное отношеніе.

§ 18. Чтобы проще доказать теорему предыдущаго §-а введемъ въ разсмотрѣніе двойное отношеніе четырехъ лучей Op_1, Op_2, Op_3, Op_4, выходящихъ изъ одной точки O (черт. 78). Подъ двойнымъ отношеніемъ такихъ четырехъ лучей мы разумѣемъ выраженіе:

$$\frac{\sin(p_3 p_1)}{\sin(p_3 p_2)} : \frac{\sin(p_4 p_1)}{\sin(p_4 p_2)},$$

гдѣ подъ знакомъ $(p_3 p_1)$ разумѣется уголъ между лучомъ Op_3 и Op_1, причемъ этотъ уголъ отсчитывается отъ Op_3 въ сторону къ Op_1. Выбирается нѣкоторое положительное направленіе отсчета угловъ, напримѣръ въ сторону движенія часовой стрѣлки, а тогда знакъ угла $(p_3 p_1)$, а значитъ и знакъ соотвѣтствующаго синуса легко узнать.



Черт. 78.

Возьмемъ произвольную сѣкущую прямую P, и пусть точки P_1, P_2, P_3 и P_4 будутъ точками встрѣчи ея съ лучами Op_1, Op_2, Op_3 и Op_4. Покажемъ, что двойное отношеніе четырехъ точекъ P_1, P_2, P_3, P_4 будетъ равно двойному отношенію соотвѣтственныхъ лучей p_1, p_2, p_3, p_4. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{P_3 P_1}{Op_3} = \frac{\sin(p_3 p_1)}{\sin\varphi};$$

$$\frac{P_3 P_2}{Op_3} = \frac{\sin(p_3 p_2)}{\sin\psi};$$

отсюда

(1) $$\frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} = \frac{\sin(p_3 p_1)}{\sin(p_3 p_2)} : \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ выведемъ изъ треугольниковъ OP_4P_1 и OP_4P_2:

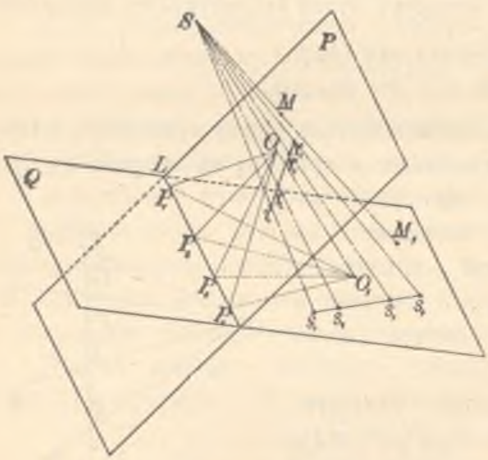
(2) $$\frac{P_4 P_1}{P_4 P_2} = \frac{\sin(p_4 p_1)}{\sin(p_4 p_2)} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Дѣля почленно равенство (1) на равенство (2) получимъ

$$\frac{P_3P_1}{P_3P_2}:\frac{P_4P_1}{P_4P_2}=\frac{sin\,(p_3p_1)}{sin\,(p_3p_2)}:\frac{sin\,(p_4p_1)}{sin\,(p_4p_2)},\tag{3}$$

что и требовалось доказать.

§ 19. Для доказательства общаго положенія, что при перспективѣ сохраняется двойное отношеніе, представимъ себѣ двѣ плоскости P и Q (черт. 79), пересѣкающіяся по нѣкоторой прямой L. Разсмотримъ нѣкоторый пучекъ четырехъ лучей (1) OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 на плоскости P, имѣющій вершину въ точкѣ O; чтобы получить перспективу этого пучка на плоскости Q, придется взять нѣкоторую точку S пространства за точку глаза. Тогда получимъ, какъ перспективу, такой пучекъ, который имѣетъ вершиной точку O_1 встрѣчи луча SO съ плоскостью Q.



Черт. 79.

Такъ какъ лучи (1) проектируются при помощи плоскостей, выходящихъ изъ точки глаза S, то очевидно, что эти лучи пучка будутъ представлять изъ себя не что иное, какъ лучи (2) $O_1P_1, O_1P_2, O_1P_3, O_1P_4$ т. е. другими словами лучи (1) заданнаго пучка будутъ встрѣчаться со своими перспективными изображеніями на прямой L. Изъ сказаннаго очевидно, что двойное отношеніе пучка O, лежащаго въ плоскости P, будетъ равняться двойному отношенію перспективнаго пучка O_1 на плоскости Q, такъ какъ оба эти пучка опираются на одну и ту же систему четырехъ точекъ, такъ что двойныя отношенія обоихъ пучковъ равны

$$\frac{P_1P_3}{P_2P_3}:\frac{P_1P_4}{P_2P_4}.$$

§ 20. Совершенно подобнымъ же образомъ мы убѣдимся, что двойное отношеніе четырехъ точекъ r_1, r_2, r_3, r_4, лежащихъ на прямой въ одной плоскости P (черт. 79), будетъ равно двойному отношенію соотвѣтствующихъ имъ четырехъ точекъ, s_1, s_2, s_3, s_4 на перспективной плоскости Q, потому что оба этихъ двойныхъ отношенія равны двойному отношенію четырехъ проектирующихъ лучей.

§ 21. Разсмотримъ въ плоскости P (черт. 79) нѣкоторую систему координатъ x, y. Подобнымъ же образомъ возьмемъ нѣкоторую другую систему координатъ x_1, y_1 въ плоскости Q. Если мы зададимъ нѣкоторую точку M въ плоскости P ея координатами x и y, то этой точкѣ M будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая опредѣленная перспективная точка M_1 на плоскости Q. Очевидно, что координаты x_1 и y_1 должны быть нѣкоторыми функціями координатъ x и y, т. е.

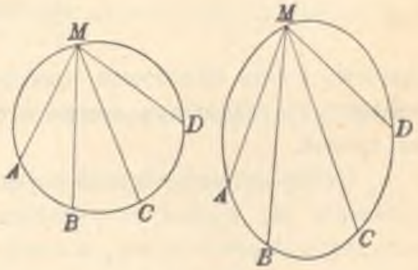
$$x_1 = \varphi(x, y);\ y_1 = \psi(x, y).$$

Разнымъ функціямъ φ и ψ будутъ соотвѣтствовать разные виды изображенія точекъ плоскости P на плоскости Q. Перспективѣ соотвѣтствуютъ слѣдующія выраженія функцій φ и ψ:

$$x_1 = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma};\ y_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}.$$

§ 22. Особенное значеніе методы проективной геометріи имѣютъ въ приложеніи къ тѣмъ линіямъ, которыя мы называемъ коническими сѣченіями и которыя мы разсматривали въ §§ 71—84 гл. II. Очевидно, что если мы примемъ вершину прямого кругового конуса за точку глаза, то коническое сѣченіе можно разсматривать, какъ перспективу въ сѣкущей плоскости круга основанія конуса. Отсюда является важнымъ получить черезъ проектированіе при помощи перспективы свойства коническихъ сѣченій изъ соотвѣтствующихъ свойствъ круга.

Мы ограничимся здѣсь доказательствомъ одной изъ основныхъ теоремъ проективной теоріи коническихъ сѣченій.



Черт. 80.

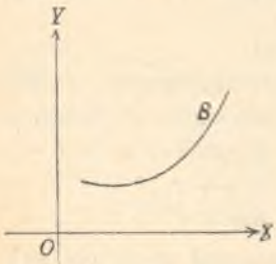
Теорема Chasles'я. *Если заданы четыре точки A, B, C, D (черт. 80) на коническомъ сѣченіи, то гдѣ бы ни была взята пятая точка M на немъ, двойное отношеніе четырехъ лучей MA, MB, MC, MD не мѣняется.*

Если коническое сѣченіе есть кругъ, то неизмѣнность двойного отношенія очевидна, потому что отъ перемѣщенія точки M по кругу углы между лучами MA, MB, MC, MD не мѣняются, а значитъ двойное отношеніе четырехъ лучей не будетъ мѣняться и въ перспективѣ круга, въ произвольномъ коническомъ сѣченіи.

Дифференціальная геометрія.

О касательной и нормали къ кривымъ линіямъ.

§ 23. Пусть нѣкоторая кривая S (черт. 81) отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ x, y, причемъ ея уравненіе въ этихъ координатахъ



Черт. 81.

(1) $$f(x, y) = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно y, можно представить его въ видѣ

(2) $$y = F(x).$$

Кривая S можетъ быть еще задана третьимъ способомъ. Такъ какъ x въ уравненіи (2) есть перемѣнная независимая, то мы можемъ положить

(3) $$x = \varphi(t),$$

гдѣ φ произвольно выбранная функція отъ новой перемѣнной независимой t. Подставляя выраженіе (3) для независимой перемѣнной x въ уравненіе (2), получимъ

$$y = F(\varphi(t)),$$

откуда, обозначая функцію $F(\varphi(t))$ черезъ $\psi(t)$, представимъ нашу кривую S въ такъ называемомъ *параметрическомъ* видѣ

(4) $$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),$$

причемъ t есть нѣкоторый *произвольный параметръ*, различнымъ численнымъ значеніямъ котораго соотвѣтствуютъ различныя точки на кривой.

Очень важный частный случай такого параметрическаго представленія (4) кривой встрѣчается въ механикѣ. Тамъ за этотъ параметръ берется время, и считается извѣстнымъ движеніе нѣкоторой точки въ плоскости, если координаты x и y этой точки указаны, какъ функціи отъ времени. Съ измѣненіемъ времени t мѣняются значенія функціи φ и ψ, и точка двигается въ плоскости по кривой S. Въ этомъ случаѣ кривая S носитъ названіе *траекторіи движенія*.

Какъ на примѣръ параметрическаго представленія кривой, можно указать на уравненіе эллипса

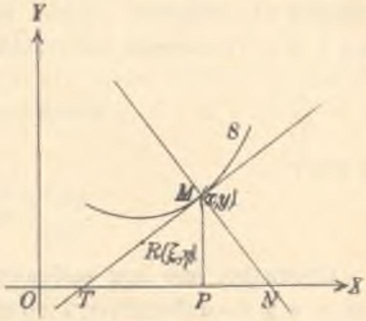
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое можно представить въ видѣ такихъ двухъ параметрическихъ уравненій:

(5)
$$x=a\cos t,$$
$$y=b\sin t.$$

Исключая параметръ t изъ двухъ уравненій (4) мы возвращаемся къ первоначальному уравненію (1) линіи S.

§ 24. Проведемъ касательную къ кривой S въ точкѣ M (черт. 82), соотвѣтствующей ординатѣ PM; если мы продолжимъ эту касательную до пересѣченія въ точкѣ T съ осью x-овъ, то отрѣзокъ MT носитъ названіе *длины касательной*, а отрѣзокъ TP называется *подкасательной*. Если мы въ точкѣ M касанія проведемъ перпендикуляръ MN къ касательной, то этотъ перпендикуляръ носитъ названіе *нормали* кривой S въ точкѣ M. Если мы обозначимъ черезъ N точку встрѣчи нормали съ осью x-овъ, то отрѣзокъ MN будетъ называться *длиною нормали*, а отрѣзокъ PN *поднормалью*.



Черт. 82.

§ 25. Напишемъ теперь уравненіе касательной къ кривой S, заданной уравненіемъ

(1)
$$y=F(x),$$

причемъ за точку касанія возьмемъ нѣкоторую точку x_0, y_0 этой кривой.

Касательная, какъ прямая, проходящая черезъ точку x_0, y_0, будетъ имѣть уравненіе (§ 43 гл. II)

(2)
$$y-y_0=m(x-x_0).$$

На основаніи соображеній § 84 гл. III угловой коэффиціентъ m, какъ тангенсъ угла касательной съ осью x-овъ долженъ равняться значенію производной

$$m = F'(x_0),$$

и мы получаемъ такое уравненіе касательной

$$y - y_0 = F'(x_0)(x - x_0),$$

или окончательно

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что коэффиціенты уравненія касательной заключаютъ одинъ произвольный параметръ x_0, представляющій абсциссу точки касанія. Если мы будемъ мѣнять этотъ параметръ, то коэффиціенты уравненія (**3**) будутъ мѣняться, прямая (3) будетъ перемѣщаться по плоскости, оставаясь постоянно касательной къ кривой S, или, какъ говорятъ, эта прямая будетъ *огибать* кривую S.

Будемъ перемѣнный параметръ x_0 обозначать черезъ x, а соотвѣтствующую ему координату y_0 черезъ y; вмѣсто x и y въ уравненіи (3) возьмемъ какія нибудь другія обозначенія, напримѣръ ξ и η; уравненіе касательной приметъ видъ

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \tag{4}$$

или иначе

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}. \tag{5}$$

Очевидно, что при выбранныхъ нами обозначеніяхъ координаты x и y соотвѣтствуютъ точкѣ касанія и удовлетворяютъ уравненію кривой (1), а ξ и η суть координаты какой нибудь точки R на касательной, причемъ не указывается, какой именно.

§ 26. Если уравненія линіи S, заданной въ параметрическомъ видѣ,

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

тогда уравненіе касательной можно будетъ написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)}. \tag{1}$$

Для того, чтобы получить уравненіе касательной для общаго случая заданія кривой уравненіемъ $f(x, y) = 0$, будемъ дифференцировать это уравненіе; получаемъ

$$f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy = 0.$$

Мы получимъ уравненіе касательной, если изъ послѣдняго уравненія исключимъ дифференціалы dx, dy при помощи уравненія

(5) предыдущаго §-а. Получаемъ окончательное уравненіе касательной

$$(2) \qquad f'_x(x,y)(\xi - x) + f'_y(x,y)(\eta - y) = 0.$$

Въ послѣднемъ уравненіи входятъ два перемѣнныхъ параметра x и y. Но не надо забывать, что произвольнымъ остается только одинъ, потому что между этими параметрами существуетъ соотношеніе $f(x,y) = 0$, представляющее уравненіе кривой.

§ 27. Послѣ того, какъ указаны правила для составленія уравненія касательной, уравненіе нормали пишется, какъ уравненіе перпендикуляра къ касательной. Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе къ касательной написано въ такомъ видѣ:

$$(1) \qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

Уравненіе нормали, какъ прямой, проходящей черезъ точку (x, y) касанія, напишется такъ:

$$(2) \qquad \eta - y = m(\xi - x).$$

Угловой коэффиціентъ m нормали надо будетъ опредѣлить изъ условія перпендикулярности прямыхъ (1) и (2), т. е. изъ условія (§ 42, гл. II)

$$1 + m\frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$m = -\frac{dx}{dy},$$

и мы получаемъ уравненіе нормали:

$$(3) \qquad dx(\xi - x) + dy(\eta - y) = 0.$$

Для параметрическаго вида уравненій кривой, уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$\varphi'(t)[\xi - \varphi(t)] + \psi'(t)[\eta - \psi(t)] = 0,$$

и, наконецъ, для общаго вида уравненія $f(x,y) = 0$ кривой получаемъ уравненіе нормали

$$\frac{\xi - x}{f'_x(x,y)} = \frac{\eta - y}{f'_y(x,y)}.$$

§ 28. Составимъ теперь выраженіе для подкасательной и поднормали. Такъ какъ точка T (черт. 82), для которой $\eta = 0$, лежитъ на касательной, то очевидно, что подкасательная равна разности $x - \xi$ между абсциссой x точки касанія и абсциссой ξ точки T.

Подставляя поэтому $\eta = 0$ въ уравненіе (1) предыдущаго §-а получимъ для подкасательной $(x - \xi)$ выраженіе

$$\frac{ydx}{dy}. \tag{1}$$

Совершенно подобнымъ же образомъ выраженіе для поднормали получится, какъ разность $(\xi - x)$, взятая изъ уравненія (3) нормали послѣ подстановки въ него $\eta = 0$.

Мы получаемъ для поднормали выраженіе

$$\frac{ydy}{dx}. \tag{2}$$

§ 29. Длины касательной и нормали мы получимъ, какъ гипотенузы треугольниковъ TMP и PMN, имѣющихъ общимъ катетомъ ординату y. Получаемъ для длины касательной выраженіе

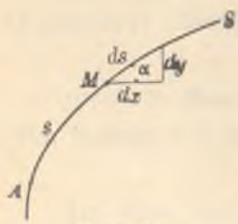
$$\sqrt{y^2 + y^2\frac{dx^2}{dy^2}} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

а для длины нормали выраженіе

$$\sqrt{y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2}} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Дифференціалъ дуги.

§ 30. Возьмемъ на кривой S (черт. 83) нѣкоторую точку A за начало счета дугъ, причемъ длину дуги AM обозначимъ черезъ s. Будемъ считать дугу положительною въ одномъ какомъ нибудь опредѣленномъ направленіи по разсматриваемой кривой S. Тогда при прямоугольной системѣ координатъ мы получаемъ



Черт. 83.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{1}$$

гдѣ ds есть дифференціалъ дуги, а dx и dy суть дифференціалы координатъ. Отсюда

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Знакъ передъ корнемъ не можетъ быть указанъ до тѣхъ поръ, пока не указана та независимая перемѣнная, при измѣненіи которой конецъ дуги M перемѣщается по кривой. Если же перемѣнная независимая указана, такъ что

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

то получаемъ

$$dx = \varphi'(t)\,dt, dy = \psi'(t)\,dt,$$

откуда

(2) $$ds = \pm\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt.$$

Очевидно, что въ послѣдней формулѣ надо будетъ поставить знакъ плюсъ въ томъ случаѣ, если съ возрастаніемъ перемѣнной t дуга возрастаетъ, и знакъ минусъ въ обратномъ случаѣ.

Черезъ интегрированіе получаемъ изъ формулы (2) слѣдующее выраженіе для конечной дуги кривой:

$$s = \int\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,dt.$$

§ 31. Если α будетъ обозначать уголъ, составляемый касательною въ точкѣ M съ осью x-овъ то мы получаемъ

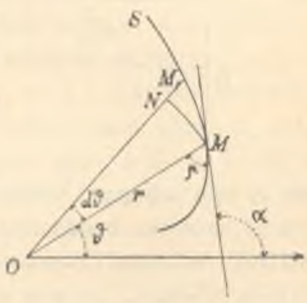
(1) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Касательныя въ полярныхъ координатахъ.

§ 32. Пусть кривая линія S (черт. 84) задана уравненіемъ

(1) $$r = f(\theta)$$

въ полярныхъ координатахъ r и θ. При этихъ координатахъ удобнѣе вычислять уголъ μ касательной съ радіусомъ векторомъ $r = OM$. Дадимъ полярному углу θ приращеніе $d\theta$, тогда получаемъ новый радіусъ векторъ OM_1. Если мы проведемъ дугу MN круга, имѣющаго центръ O и радіусъ, равный r, то отрѣзокъ NM_1 будетъ приращеніемъ радіуса r, т. е. dr. Дуга NM круга, равная углу, помноженному на радіусъ, выразится черезъ $rd\theta$.



Черт. 84.

Такъ какъ намъ придется разсматривать предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ, то мы имѣемъ право откидывать безконечно малыя высшаго порядка, причемъ приращенія замѣнять дифференціалами съ одной стороны, а съ другой стороны криволинейный треугольникъ MNM_1 при очень малыхъ значеніяхъ $d\theta$

считать за прямолинейный съ прямымъ угломъ при точкѣ N, причемъ для дифференціала дуги s мы получимъ формулу

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2. \tag{2}$$

Далѣе мы получаемъ

$$tg\,\mu = lim\, tg\, NM_1M = lim\,\frac{NM}{NM_1} = \frac{rd\vartheta}{dr},$$

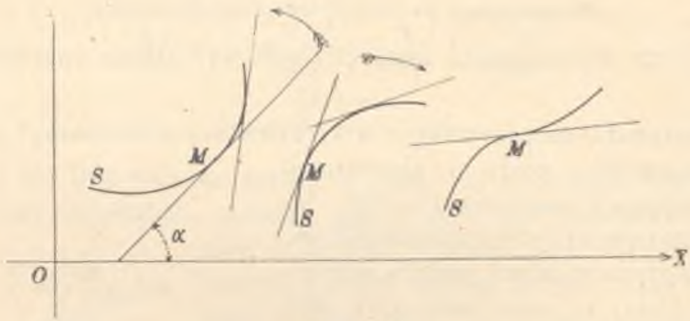
откуда получаемъ такую формулу:

$$tg\mu = \frac{rd\vartheta}{dr};$$

послѣдняя формула дастъ возможность вычислять уголъ μ, образованный касательною съ радіусомъ векторомъ.

О выпуклости и вогнутости линій.

§ 33. Будемъ разсматривать прямоугольную систему координатъ (черт. 85); будемъ перемѣщать точку касанія вдоль по ли-



Черт. 85.

ніи S при помощи увеличенія абсциссы x этой точки касанія. Тогда можетъ произойти одно изъ трехъ: 1) или уголъ α касательной съ осью x-овъ будетъ возрастать, 2) или этотъ уголъ будетъ убывать, 3) или происходитъ при точкѣ M смѣна возрастанія убываніемъ или обратно.

Въ первомъ случаѣ говорятъ, что *вогнутость* линіи S около точки касанія M обращена въ сторону положительныхъ y-овъ, а *выпуклость*—въ сторону отрицательныхъ y-овъ.

Во второмъ случаѣ происходитъ обратное явленія, а именно вогнутость обращена въ сторону отрицательныхъ y-овъ.

Въ третьемъ случаѣ при точкѣ M происходитъ такъ называемый *перегибъ* линіи, и точка M носитъ названіе *точки перегиба*.

§ 34. Если мы хотимъ узнать по виду уравненія $y=f(x)$, который изъ трехъ вышеприведенныхъ случаевъ имѣетъ мѣсто, то придется разсмотрѣть формулу $tg\alpha = y'$, откуда

$$\alpha = arctg\, y'.$$

Дифференцируя по x, получаемъ

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}.$$

Если вогнутость обращена въ сторону положительныхъ y-овъ, то уголъ α долженъ быть возрастающей функціей отъ x. Подобный случай будетъ имѣть мѣсто, когда производная $\frac{d\alpha}{dx}$ положительна, т. е. когда $y'' > 0$.

Подобнымъ же образомъ мы замѣчаемъ, что при неравенствѣ $y'' < 0$ вогнутость обращена въ сторону отрицательныхъ y-овъ.

Точки перегиба могутъ получаться, конечно, въ случаѣ $y'' = 0$, когда производная $\frac{d\alpha}{dx}$ мѣняетъ свой знакъ, проходя черезъ 0.

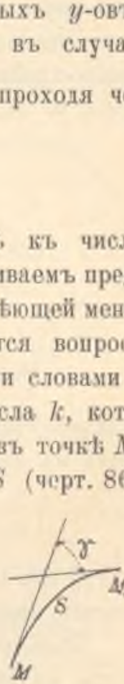
О кривизнѣ линій.

§ 35. Понятіе о кривизнѣ линій принадлежитъ къ числу первоначальныхъ. Изъ жизненнаго опыта мы устанавливаемъ представленіе о томъ, когда одну линію можно считать имѣющей меньшую кривизну, чѣмъ другая. Въ математикѣ является вопросъ лишь объ установленіи мѣры кривизны, т. е. другими словами о сопоставленіи всякой точкѣ M кривой нѣкотораго числа k, которое мы будемъ считать за мѣру кривизны кривой S въ точкѣ M.

§ 36. Если мы разсмотримъ дугу MM_1 кривой S (черт. 86), то уголъ γ между касательными въ ея концахъ мы будемъ называть *полной кривизной* дуги S. Отношеніе

$$\frac{\gamma}{\smile MM_1}$$

полной кривизны къ длинѣ самой дуги носитъ названіе *средней кривизны дуги*.



Черт. 86.

При одномъ и томъ же углѣ γ средняя кривизна той дуги будетъ меньше, длина которой будетъ больше. Это вполнѣ соотвѣтствуетъ обычному представленію о кривизнѣ, ибо тѣмъ меньше будетъ кривизна линіи въ обычномъ смыслѣ слова, чѣмъ на большемъ протяженіи дуги происходитъ данное отклоненіе касательной. Обратно, при одной и той же длинѣ дуги кривизна будетъ тѣмъ больше, чѣмъ на бо́льшій уголъ γ касательная отклоняется. Поэтому, является вполнѣ естественнымъ опредѣлить среднюю кривизну дуги какъ число, прямо пропорціональное отклоненію касательной и обратно пропорціональное длинѣ дуги.

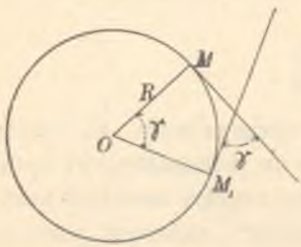
§ 37. Если мы будемъ точку M_1 приближать къ точкѣ M по кривой S, то естественно разсматривать предѣлъ

$$k = lim \frac{\gamma}{\smile MM_1}.$$

Этотъ предѣлъ k и носитъ названіе *кривизны линіи S въ точкѣ M.*

§ 38. Примѣнимъ приведенное понятіе о кривизнѣ къ случаю круга радіуса R.

Возьмемъ (черт. 87) на кругѣ нѣкоторую точку M и безконечно близкую къ ней точку M_1. Очевидно, что уголъ γ между касательной будетъ равняться углу между радіусами OM и OM_1; мы получаемъ



Черт. 87.

$$\smile MM_1 = \gamma R,$$

откуда для средней кривизны круга получаемъ

$$\frac{\gamma}{\smile MM_1} = \frac{1}{R},$$

т. е. средняя кривизна дугъ круга есть величина постоянная, а значитъ постоянною будетъ кривизна круга въ каждой его точкѣ, и мы получаемъ

$$k = \frac{1}{R}. \tag{1}$$

§ 39. Обращаемся теперь къ нахожденію кривизны для произвольной кривой.

Возьмемъ нѣкоторую опредѣленную точку M этой кривой. Пусть ея абсцисса будетъ x. Дадимъ этой абсциссѣ приращеніе dx; тогда уклоненіе касательной, соотвѣтствующее дугѣ ds, будетъ равняться $d\alpha$, гдѣ α выражается по формулѣ.

$$\alpha = arc\,tg\,y'.$$

вѣтствуетъ обычному представленію о кривизнѣ, ибо тѣмъ меньше будетъ кривизна линіи въ обычномъ смыслѣ слова, чѣмъ на большемъ протяженіи дуги происходитъ данное отклоненіе касательной. Обратно, при одной и той же длинѣ дуги кривизна будетъ тѣмъ больше, чѣмъ на бо́льшій уголъ γ касательная отклоняется. Поэтому, является вполнѣ естественнымъ опредѣлить среднюю кривизну дуги какъ число, прямо пропорціональное отклоненію касательной и обратно пропорціональное длинѣ дуги.

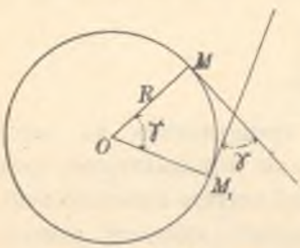
§ 37. Если мы будемъ точку M_1 приближать къ точкѣ M по кривой S, то естественно разсматривать предѣлъ

$$k = lim \frac{\gamma}{\smile MM_1}.$$

Этотъ предѣлъ k и носитъ названіе *кривизны линіи S въ точкѣ M*.

§ 38. Примѣнимъ приведенное понятіе о кривизнѣ къ случаю круга радіуса R.

Возьмемъ (черт. 87) на кругѣ нѣкоторую точку M и безконечно близкую къ ней точку M_1. Очевидно, что уголъ γ между касательной будетъ равняться углу между радіусами OM и OM_1; мы получаемъ



Черт. 87.

$$\smile MM_1 = \gamma R,$$

откуда для средней кривизны круга получаемъ

$$\frac{\gamma}{\smile MM_1} = \frac{1}{R},$$

т. е. средняя кривизна дугъ круга есть величина постоянная, а значитъ постоянною будетъ кривизна круга въ каждой его точкѣ, и мы получаемъ

(1) $$k = \frac{1}{R}.$$

§ 39. Обращаемся теперь къ нахожденію кривизны для произвольной кривой.

Возьмемъ нѣкоторую опредѣленную точку M этой кривой. Пусть ея абсцисса будетъ x. Дадимъ этой абсциссѣ приращеніе dx; тогда уклоненіе касательной, соотвѣтствующее дугѣ ds, будетъ равняться $d\alpha$, гдѣ α выражается по формулѣ.

$$\alpha = arc\,tg\,y'.$$

Приращеніе $d\alpha$ угла α касательной съ осью x-овъ называютъ *угломъ смежности*. Мы видимъ слѣдовательно, что кривизна линіи S въ точкѣ M будетъ выражаться по формулѣ

$$k = \frac{d\alpha}{ds}, \tag{1}$$

т. е. будетъ равна углу смежности, дѣленному на дифференціалъ дуги.

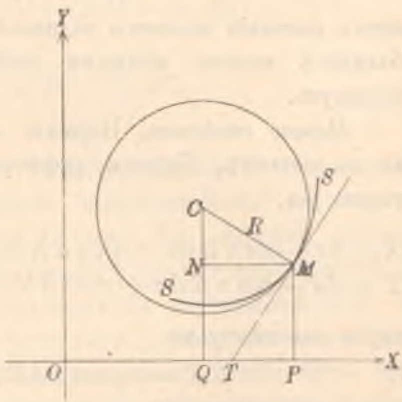
Для удобства вычисленія можно формулу (1) преобразовать такимъ образомъ:

$$k = \frac{d \operatorname{arc} tg\, y'}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{(\operatorname{arc} tg\, y')'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

О кругѣ кривизны.

§ 40. Построимъ (черт. 88) кругъ, обладающій слѣдующими свойствами: 1) онъ проходитъ черезъ точку M кривой S; 2) онъ имѣетъ съ кривою S общую касательную, такъ что его центръ C находится на нормали точки M; 3) этотъ кругъ имѣетъ кривизну, равную кривизнѣ кривой S въ точкѣ M.

Построенный такимъ образомъ кругъ называется *кругомъ кривизны*, соотвѣтствующимъ точкѣ M. Его радіусъ носитъ названіе *радіуса кривизны* кривой S въ точкѣ M. Центръ C круга кривизны носитъ названіе *центра кривизны*.



Черт. 88.

§ 41. На основаніи вышеизложеннаго легко вычислить радіусъ кривизны и координаты X, Y центра кривизны C. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая радіусъ кривизны черезъ R, получаемъ его выраженіе, если сравнимъ кривизну $\frac{1}{R}$ круга съ кривизной (2) предыдущаго §-а.

$$(1) \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

§ 42. Что касается координатъ X, Y центра кривизны, то мы имѣемъ изъ чертежа 88

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= OQ = OP - QP = x - R \sin \alpha \\ Y &= QC = PM + NC = y + R \cos \alpha. \end{aligned}$$

Припоминая съ одной стороны формулу $R = \frac{ds}{d\alpha}$, а съ другой стороны формулы (1) §-а 31, получаемъ окончательно слѣдующія выраженія для координатъ центра кривизнъ:

$$(2) \qquad X = x - \frac{dy}{d\alpha}; \; Y = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$

Эти формулы даютъ возможность выразить черезъ перемѣнный параметръ t координаты X и Y. Получается параметрическое представленіе линіи геометрическаго мѣста центровъ кривизны. Эта линія, опредѣляемая уравненіями

$$X = \Phi(t), Y = \Psi(t),$$

носитъ названіе *эволюты* заданной кривой S. Эволюта Σ (черт. 89) обладаетъ весьма важными свойствами, о которыхъ слѣдуетъ упомянуть.

Первое свойство. Нормаль заданной кривой есть касательная къ эволютѣ. Будемъ дифференцировать формулу (1) предыдущаго §-а.

$$\begin{aligned} dX &= dx - \cos\alpha\, R\, d\alpha - \sin\alpha\, d\, R = ds \cos\alpha - \cos\alpha\, R\, d\,\alpha - \sin\alpha\, d\, R, \\ dY &= dy - \sin\alpha\, R\, d\,\alpha + \cos\alpha\, d\, R = ds \sin\alpha - \sin\alpha\, R\, d\,\alpha + \cos\alpha\, d\, R, \end{aligned}$$

откуда окончательно

$$(2) \qquad d\,X = -\sin\alpha\, d\, R, \; d\, Y = \cos\alpha\, d\, R.$$

Легко убѣдиться, что изъ формулы (2) вытекаетъ, какъ слѣдствіе, тождество

$$(3) \qquad d\,x\, d\,X + d\,y\, d\,Y = 0,$$

выражающее справедливость высказанной теоремы, ибо

$$dx = ds \cos\alpha, \text{ а } dy = ds \sin\alpha.$$

Тождество (3) выражаетъ условіе перпендикулярности (см. § 41 гл. II) касательной къ эволютѣ и касательной къ заданной кривой.

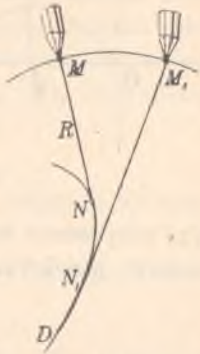
Второе свойство. Разность радіусовъ кривизны двухъ точекъ данной кривой равна дугѣ эволюты, заключающейся между этими радіусами.

Возвышая въ квадратъ и складывая равенства (2), получаемъ:

$$dX^2 + dY^2 = dR^2,$$

откуда

(4) $$ds^2 = dR^2,$$



Черт. 89.

гдѣ s есть длина дуги эволюты, отсчитываемая отъ нѣкоторой точки D. Изъ равенства (4) получаемъ $ds = \pm dR$, откуда, интегрируя, получаемъ

(5) $$s = \pm R + C,$$

гдѣ C—постоянная, вводимая интегрированіемъ. Примѣняя формулу (5) къ двумъ дугамъ DN и DN_1 эволюты, получаемъ

$$\smile DN = \pm NM + C, \quad \smile DN_1 = \pm N_1 M_1 + C,$$

откуда, вычитая, получимъ

$$\smile DN - \smile DN_1 = \pm (NM - N_1 M_1)$$

или окончательно

$$\smile NN_1 = \pm (NM - N_1 M_1),$$

что и требовалось доказать.

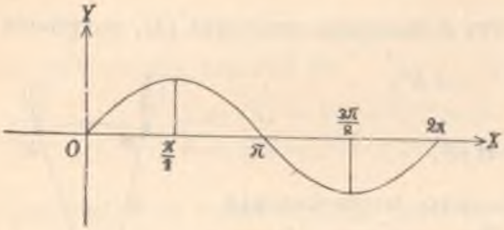
На послѣднемъ свойствѣ эволюты основанъ механическій способъ черченія заданной кривой, когда извѣстна ея эволюта. Закрѣпивъ въ нѣкоторой точкѣ D (черт. 89) эволюты нерастяжимую нить, наматываемъ ее на эволюту до нѣкоторой точки N, остальную же часть нити натягиваемъ по касательной NM. Въ нѣкоторой точкѣ M свободной части нити укрѣпляемъ карандашъ. Если мы поведемъ карандашъ такимъ образомъ, чтобы нить, оставаясь натянутой, сматывалась съ эволюты, то карандашъ опишетъ заданную кривую. Въ виду сказаннаго заданная кривая носитъ названіе *развертки* или *эвольвенты* по отношенію къ эволютѣ.

Синусоида.

§ 43. Разсмотримъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = \sin x.$$

Эта кривая есть трансцендентная, она носитъ названіе *синусоиды* и прилагается въ физикѣ при разсмотрѣніи гармоническихъ колебаній.



Черт. 90.

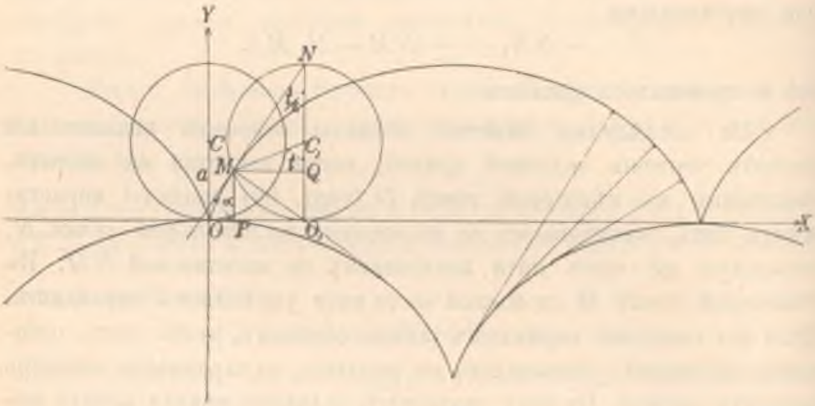
На чертежѣ 90 указанъ видъ этой линіи. Такъ какъ имѣетъ мѣсто равенство

$$y'' = -\sin x,$$

то опредѣляются точки перегиба по уравненію $\sin x = 0$, откуда получается безчисленное множество точекъ перегиба, опредѣляемыхъ равенствомъ $x = k\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое число.

Циклоида.

§ 44. *Циклоидой* называется кривая, образуемая движеніемъ какой либо точки окружности круга даннаго радіуса a, катящагося безъ скольженія по данной прямой. Примемъ данную прямую за ось x-овъ. Возьмемъ за начало координатъ точку O (черт. 91) каса-



Черт. 91.

нія катящагося круга въ тотъ моментъ, когда съ этой точкой касанія совпадаетъ описывающая циклоиду точка, за движеніемъ которой мы будемъ слѣдить. Возьмемъ за ось y-овъ радіусъ OC, гдѣ C есть центръ круга. Предположимъ, что разсматриваемый кругъ, прокатившись по оси x-овъ, занялъ новое положеніе O_1MN, причемъ O_1 новая точка касанія круга, M обозначаетъ положеніе на новомъ кругѣ точки, описывающей циклоиду, N есть точка, діаметрально противоположная точкѣ касанія.

Обозначимъ черезъ t уголъ, образованный радіусомъ MC_1 съ вертикальнымъ радіусомъ C_1O_1, тогда условіе каченія безъ скольженія состоитъ въ томъ, что дуга MO_1 круга должна равняться длинѣ OO_1, т. е., другими словами, точка касанія должна пройти одинаковыя длины по прямой и по кругу. Мы получаемъ, слѣдовательно

$$OO_1 = \smile MO_1 = at. \tag{1}$$

Прямоугольныя координаты x, y точки M найдутся по формуламъ

$$x = OP = OO_1 - PO_1 = OO_1 - MQ = at - a\sin t,$$
$$y = PM = C_1O_1 - C_1Q = a - a\cos t.$$

Итакъ, получаются слѣдующія параметрическія уравненія циклоиды

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned} \tag{2}$$

Для построенія касательной дифференцируемъ формулы (2); получаемъ

$$\begin{aligned} dx &= a(1 - \cos t)\,dt, \\ dy &= a\sin t\,dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = cotg\,\frac{t}{2},$$

а слѣдовательно

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}. \tag{4}$$

Эта формула даетъ простое построеніе касательной для циклоиды; оказывается, касательная проходитъ черезъ верхнюю точку круга, ибо

$$\angle MNO_1 = \frac{t}{2}.$$

Очевидно, что нормаль циклоиды проходитъ черезъ точку касанія.

§ 45. Для вычисленія радіуса кривизны циклоиды замѣтимъ, что этотъ радіусъ выражается по формулѣ

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Дифференціалъ $d\alpha$ можно вычислить, дифференцируя формулу (4) предыдущаго §-а; получаемъ

$$d\alpha = -\frac{dt}{2}.$$

Отсюда радіусъ кривизны вычислится по формулѣ

$$R = \frac{2\,ds}{dt}.$$

Знакъ — минусъ можно опустить, ибо дифференціалъ ds имѣетъ, какъ корень квадратный, два знака, и, слѣдовательно, окончательно придется выбрать у дифференціала ds тотъ знакъ, который даетъ для выраженія R значеніе положительное. Получаемъ далѣе:

$$R = \frac{2\,ds}{dt} = 2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} =$$

$$= 2\,a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 4\,a\sin\frac{t}{2} = 2\,MO_1.$$

Итакъ, мы приходимъ къ теоремѣ, что радіусъ кривизны циклоиды равенъ удвоенной нормали. Покажемъ, что эволюта циклоиды будетъ также циклоидой, только иначе расположенной. Мы видѣли уже, что эволюта опредѣляется уравненіями

$$X = x - \frac{dy}{d\alpha},\ Y = y + \frac{dx}{d\alpha},$$

или иначе

$$X = x + 2\frac{dy}{dt},\ Y = y - 2\frac{dx}{dt}.$$

Получаемъ

$$X = a(t - \sin t) + 2\,a\sin t = a(t - \sin t),$$
$$Y = a(1 - \cos t) - 2\,a(1 - \cos t) = -a(1 - \cos t).$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что, дѣйствительно, эволюта есть такая же циклоида, только расположенная такъ, какъ показано на чертежѣ.

Спираль Архимеда.

§ 46. *Спиралью Архимеда* называется кривая линія, опредѣляемая въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ

$$r = a\vartheta. \tag{1}$$

Кривая выходитъ изъ полюса O (черт. 92), въ которомъ она касается полярной оси, и описываетъ вокругъ полюса безчисленное множество завитковъ съ увеличивающимся до безконечности радіусомъ векторомъ. Для построенія касательной придется вычислить уголъ μ по формулѣ

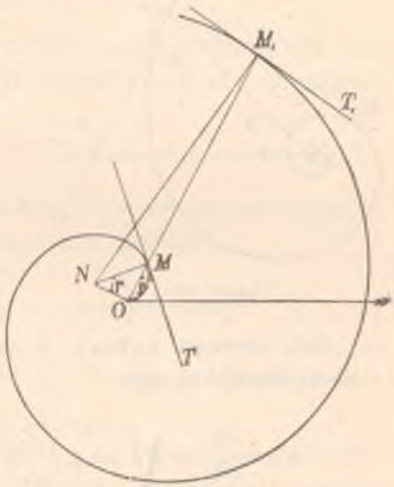
$$tg\,\mu = \frac{r\,d\vartheta}{dr};$$

но, дифференцируя уравненіе (1), получаемъ

$$dr = a\,d\vartheta,$$

слѣдовательно

$$tg\,\mu = \frac{r}{a} = \vartheta.$$



Черт. 92.

Проведемъ черезъ полюсъ O прямую ON, перпендикулярную къ радіусу вектору OM, равному r, до встрѣчи въ точкѣ N съ нормалью NM къ кривой. ON носитъ названіе *полярной поднормали*. Легко убѣдиться, что эта поднормаль есть величина постоянная для спирали Архимеда.

Въ самомъ дѣлѣ

$$ON = \frac{r}{tg\,\mu} = \frac{r\,dr}{r\,d\vartheta} = \frac{dr}{d\vartheta} = a.$$

Постоянство поднормали даетъ простой способъ построенія касательной къ спирали Архимеда.

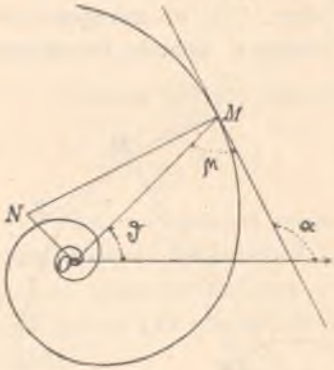
Логариѳмическая спираль.

§ 47. Названіе *логариѳмической спирали* (черт. 93) Iohann Bernoulli далъ кривой, опредѣляемой въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ:

$$r = e^{m\vartheta}.$$

Для построенія касательной находимъ уголъ μ

$$tg\,\mu = \frac{r d\vartheta}{dr} = \frac{e^{m\vartheta} d\vartheta}{m e^{m\vartheta} d\vartheta} = \frac{1}{m}.$$



Черт. 93.

Итакъ, мы видимъ, что касательная къ логариѳмической спирали составляетъ постоянный уголъ μ съ радіусомъ-векторомъ. Легко убѣдиться, что радіусъ кривизны логариѳмической спирали равенъ длинѣ *полярной нормали* MN ($ON \perp OM$). Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Изъ чертежа имѣемъ: $\alpha = \vartheta + \mu$, откуда $d\alpha = d\vartheta$, ибо число μ—постоянное; отсюда

$$R = \frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} = \sqrt{OM^2 + ON^2} = MN.$$

Очевидно, что полярное уравненіе эволюты, т. е. геометрическаго мѣста центра кривизны N, будетъ опредѣляться координатами

$$r_1 = ON, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta;$$

Но $ON = \frac{dr}{d\vartheta} = m\,e^{m\vartheta}$; отсюда получаемъ полярное уравненіе эволюты

(1) $$r_1 = m\,e^{m\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Легко убѣдиться, что эволюта логариѳмической спирали оказывается новой логариѳмической спиралью, которая можетъ быть совмѣщена съ заданной простымъ поворотомъ на нѣкоторый уголъ. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) можно написать такъ:

$$r_1 = e^{m\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right) + lg\, m},$$

стоитъ только положить

$$m\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right) + lg\, m = m\,\vartheta',$$

какъ уравненіе (1) обратится въ слѣдующее:

(2) $$r_1 = e^{m\vartheta'}.$$

Легко видѣть, что зависимость (2) представляетъ изъ себя простой поворотъ полярной оси на нѣкоторый уголъ, ибо мы имѣемъ

$$\vartheta_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}\,lg\, m = \vartheta'.$$

На могилѣ I. Bernoulli изображена логариѳмическая спираль, открытію свойствъ которой онъ придавалъ значеніе.

Поверхности и кривыя въ пространствѣ.

§ 48. Мы видѣли уже въ § 56 гл. II, что уравненіе вида

(1) $$f(x, y, z) = 0$$

между прямоугольными координатами x, y и z опредѣляетъ нѣкоторую поверхность въ пространствѣ. Рѣшивъ уравненіе (1) относительно одной изъ координатъ, напримѣръ относительно z, мы получимъ выраженіе этой координаты въ видѣ функціи отъ двухъ остальныхъ, что можно будетъ выразить уравненіемъ

(2) $$z = F(x, y).$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что поверхность опредѣляется всегда такъ, что остаются произвольными нѣкоторые два параметра, въ данномъ случаѣ координаты x и y. Самый общій видъ параметрическаго опредѣленія поверхности произойдетъ тогда, когда мы независимыя перемѣнныя x, y представимъ въ видѣ произвольныхъ функцій отъ двухъ параметровъ u, v, такъ что

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v).$$

Подставляя послѣднія выраженія въ уравненіе (2), мы выразимъ z черезъ параметры u и v. Въ самомъ дѣлѣ

$$z = F[\varphi(u,v), \psi(u,v)] = \omega(u,v),$$

гдѣ черезъ ω обозначенъ результатъ подстановки.

Резюмируя сказанное, мы видимъ, что получается нѣкоторая поверхность, если три координаты x, y, z заданы, какъ функціи отъ двухъ параметровъ u, v:

(3) $$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), z = \omega(u,v).$$

Уравненіе поверхности въ декартовыхъ координатахъ получается черезъ исключеніе изъ трехъ уравненій (3) двухъ параметровъ u, v.

§ 49. Линія въ пространствѣ задается, какъ пересѣченіе двухъ поверхностей, т. е. двумя уравненіями

(1) $$f(x,y,z) = 0, f_1(x,y,z) = 0.$$

Если мы рѣшимъ эти два уравненія относительно y, z, то получимъ уравненія линіи въ такомъ видѣ:

(2) $$y = F(x), z = F_1(x).$$

Полагая координату x произвольной функціей отъ нѣкотораго параметра t, т. е. $x = \varphi(t)$ и подставляя это выраженіе въ уравненія (2), получимъ двѣ другія координаты y, z, какъ функціи отъ параметра t. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ параметрическому представленію линіи въ пространствѣ:

(3) $$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t).$$

О касательной къ линіи въ пространствѣ.

§ 50. Возьмемъ на кривой нѣкоторую точку x, y, z, соотвѣтствующую нѣкоторому значенію t параметра. Дадимъ параметру t приращеніе Δt. Тогда получимъ новую точку на кривой, имѣющую приращенныя координаты $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$.

Уравненія сѣкущей, проведенной черезъ двѣ вышеуказанныя точки, можно будетъ написать такъ (§ 45 гл. II):

$$\frac{\xi - x}{(x + \Delta x) - x} = \frac{\eta - y}{(y + \Delta y) - y} = \frac{\zeta - z}{(z + \Delta z) - z},$$

гдѣ ξ, η, ζ — координаты произвольной точки на сѣкущей. Раздѣляя всѣ знаменатели на Δt, получимъ

$$\frac{\xi - x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\eta - y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Подводя приращеніе Δt къ нулю, получимъ слѣдующія уравненія касательной:

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dt}}. \tag{1}$$

Обозначивъ черезъ α, β, γ углы этой касательной съ осями координатъ, мы получимъ на основаніи соображеній § 44 гл. II слѣдующія пропорціи:

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz}, \tag{2}$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dy}{ds}, \tag{3}$$

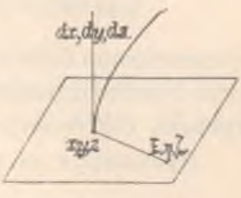
$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dz}{ds},$$

гдѣ s обозначаетъ дугу разсматриваемой кривой, ибо формула (1) § 30 обобщается для пространства въ такомъ видѣ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

§ 51. Если мы проведемъ черезъ точку касанія касательной плоскость, перпендикулярную къ этой касательной (черт. 94), то очевидно, что уравненіе этой плоскости будетъ имѣть видъ

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0. \tag{4}$$



Черт. 94.

Уравненіе (1) нормальной плоскости выражаетъ не что иное, какъ перпендикулярность элемента кривой dx, dy, dz, направленіе котораго указывается касательной, и прямой, соединяющей точку касанія x, y, z съ произвольной точкой ξ, η, ζ.

О кривизнѣ линій въ пространствѣ.

§ 52. Подъ кривизной линіи въ пространствѣ мы будемъ разумѣть предѣлъ, къ которому стремится отношеніе угла смежности, т. е. угла между двумя безконечно близкими касательными, къ дугѣ между ихъ точками касанія; иначе кривизною называется предѣлъ

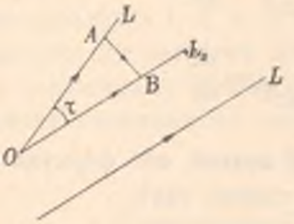
$$lim\left(\frac{\tau}{\Delta s}\right),$$

гдѣ τ уголъ смежности.

Пусть L (черт. 95) будетъ нѣкоторое положеніе касательной, опредѣляемое тремя косинусами (3) §-а 50. Дадимъ дугѣ, отсчитываемой отъ нѣкотораго опредѣленнаго начала до точки касанія, приращеніе Δs; тогда мы получимъ положеніе L_1 касательной, соотвѣтствующіе косинусы котораго будутъ

$$cos\,\alpha + \Delta\,cos\,\alpha,\ cos\,\beta + \Delta\,cos\,\beta,\ cos\,\gamma + \Delta\,cos\,\gamma.$$

Черезъ точку O касательной проведемъ прямую OL_{11}, параллельную новой касательной L_1; тогда искомый уголъ смежности τ будетъ LOL_{11}. На сторонахъ этого безконечно малаго угла отложимъ отрѣзки OA и OB, равные единицѣ длины и соединимъ прямою точки A и B. Придадимъ отрѣзку AB направленіе, идущее отъ прямой L къ прямой L_{11}, т. е. отъ начальнаго положенія касательной къ положенію приращенному. Такъ какъ уголъ τ безконечно малъ, то, пренебрегая безконечно малыми величинами высшихъ порядковъ, можно считать отрѣзокъ AB за дугу круга радіуса единицы, т. е. за τ. Отрѣзокъ OB будетъ замыкающей стороной ломанной линіи OAB.



Черт. 95.

Проектируя на три оси координатъ, получимъ три равенства

$$1.\,(cos\,\alpha + \Delta\,cos\,\alpha) = 1.\,cos\,\alpha + \tau\,cos\,\lambda,$$
$$1.\,(cos\,\beta + \Delta\,cos\,\beta) = 1.\,cos\,\beta + \tau\,cos\,\mu,$$
$$1.\,(cos\,\gamma + \Delta\,cos\,\gamma) = 1.\,cos\,\gamma + \tau\,cos\,\nu,$$

гдѣ λ, μ, ν суть углы, составляемые осями координатъ съ отрѣзкомъ AB. Эти уравненія проще написать, пренебрегая безконечно малыми величинами, въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \tau \cos\lambda &= d\cos\alpha, \\ \tau\cos\mu &= d\cos\beta, \\ \tau\cos\nu &= d\cos\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ

$$\tau^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2.$$

Отсюда получаемъ

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{d\cos\alpha}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\mu &= \frac{d\cos\beta}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{d\cos\nu}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Если мы проведемъ черезъ точку касанія прямую, образующую съ осями координатъ углы λ, μ, ν, то эта прямая будетъ, очевидно, перпендикулярна къ касательной, что слѣдуетъ уже изъ геометрическихъ соображеній, ибо безконечно малая прямая AB перпендикулярна къ прямой OA. Аналитически это можно доказать такъ. Дифференцируя равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

получаемъ

$$2\cos\alpha\,(d\cos\alpha) + 2\cos\beta\,(d\cos\beta) + 2\cos\gamma\,(d\cos\gamma) = 0,$$

откуда получается искомое условіе препендикулярности

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0.$$

Прямая, проведенная черезъ точку касанія и имѣющая углы λ, μ, ν, носитъ названіе *главной нормали* заданной линіи. Ея уравненія могутъ быть написаны такъ:

$$\frac{\xi - x}{\cos\lambda} = \frac{\eta - y}{\cos\mu} = \frac{\zeta - z}{\cos\nu}.$$

Итакъ, принимая во вниманіе уравненіе (3) § 50, получаемъ для кривизны линіи въ пространствѣ такое выраженіе:

$$\lim\left(\frac{\tau}{\Delta s}\right) = \frac{1}{ds}\sqrt{\left[d\frac{dx}{ds}\right]^2 + \left[d\frac{dy}{ds}\right]^2 + \left[d\frac{dz}{ds}\right]^2}. \tag{3}$$

Если за независимпрую перемѣнную принята дуга s, то формула кривизны напишется такъ:

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2},$$

гдѣ R будетъ радіусъ кривизны.

Соприкасающаяся плоскость.

§ 53. Плоскость, проведенная черезъ касательную и главную нормаль, называется *соприкасающейся плоскостью.* Легко написать уравненіе этой плоскости. Такъ какъ эта плоскость проходитъ черезъ точку касанія, то ея уравненіе можно написать такъ:

$$(1) \qquad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

Для того, чтобы эта плоскость проходила черезъ касательную и главную нормаль, нужно написать условія ея параллельности съ этими прямыми, т. е.

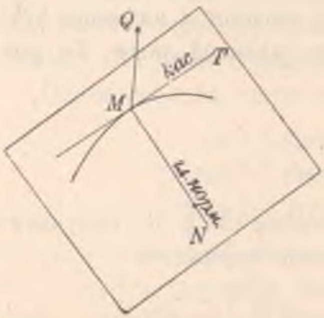
$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0,$$
$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = 0,$$

откуда

$$\frac{A}{\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu} = \frac{B}{\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu} =$$
$$= \frac{C}{\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda},$$

и уравненіе соприкасающейся плоскости напишется такъ:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(\cos\beta.\cos\nu - \cos\gamma.\cos\mu)(\xi - x) + \\ &+ (\cos\gamma.\cos\lambda - \cos\alpha.\cos\nu)(\eta - y) + \\ &+ (\cos\alpha.\cos\mu - \cos\beta.\cos\lambda)(\zeta - z) = 0. \end{aligned}$$



Черт. 96.

§ 54. По формуламъ (3) § 50 и по формуламъ (2) § 52 можно выразить всѣ косинусы, входящіе въ уравненіе соприкасающейся плоскости, въ видѣ функціи отъ основного перемѣннаго независимаго, черезъ которое выражены координаты x, y, z кривой линіи. Обозначимъ черезъ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ углы съ осями координатъ, образованные перпендикуляромъ MQ (черт. 96), возставленнымъ изъ точки касанія къ соприкасающейся плоскости. На основаніи уравненія (2) предыдущаго §-а будемъ имѣть

$$
\begin{aligned}
\cos \mathfrak{a} &= \cos\beta \cos\nu - \cos\gamma \cos\mu, \\
\cos \mathfrak{b} &= \cos\gamma \cos\lambda - \cos\alpha \cos\nu, \qquad (1) \\
\cos \mathfrak{c} &= \cos\alpha \cos\mu - \cos\beta \cos\lambda.
\end{aligned}
$$

При перемѣщеніи точки касанія M вдоль по кривой соприкающаяся плоскость измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ. Называютъ *второй кривизной* или *крученіемъ линіи* предѣлъ, къ которому стремится выраженіе

$$\frac{\tau_1}{\Delta s},$$

гдѣ τ_1 есть безконечно малый уголъ между двумя соприкасающимися плоскостями. При помощи разсужденій, аналогичныхъ приведеннымъ въ § 52, мы замѣчаемъ, что проекціи безконечно малой дуги τ_1 (радіуса единицы) пропорціональны числамъ

$$d\cos\mathfrak{a},\ d\cos\mathfrak{b},\ d\cos\mathfrak{c}.$$

Значитъ вторая кривизна выразится по формулѣ

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{ds}\sqrt{(d\cos\mathfrak{a})^2 + (d\cos\mathfrak{b})^2 + (d\cos\mathfrak{c})^2},$$

гдѣ T будетъ *радіусъ второй кривизны.*

§ 55. Покажемъ, что, если вторая кривизна равна нулю, то линія плоская. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ по формулѣ (2) предыдущаго §-а имѣемъ

$$(d\cos\mathfrak{a})^2 + (d\cos\mathfrak{b})^2 + (d\cos\mathfrak{c})^2 = 0.$$

Сумма трехъ вещественныхъ квадратовъ можетъ только тогда равняться нулю, когда всѣ эти три квадрата въ отдѣльности равны нулю; мы имѣемъ слѣдовательно

$$d\cos\mathfrak{a} = 0,\ d\cos\mathfrak{b} = 0,\ d\cos\mathfrak{c} = 0.$$

Значитъ, три косинуса $\cos\mathfrak{a}, \cos\mathfrak{b}, \cos\mathfrak{c}$ суть числа постоянныя и мы можемъ положить

$$\cos\mathfrak{a} = A,\ \cos\mathfrak{b} = B,\ \cos\mathfrak{c} = C,$$

гдѣ A, B, C постоянныя величины.

Вслѣдствіе перпендикулярности прямой MQ и касательной имѣемъ равенство (§ 53)

$$\cos\alpha\cos\mathfrak{a}+\cos\beta\cos\mathfrak{b}+\cos\gamma\cos\mathfrak{c}=0,$$

которое можно будетъ переписать такъ:

$$\frac{dx}{ds}A+\frac{dy}{ds}B+\frac{dz}{ds}C=0,$$

или иначе

$$d\,(Ax+By+Cz)=0.$$

Интегрируя, получаемъ

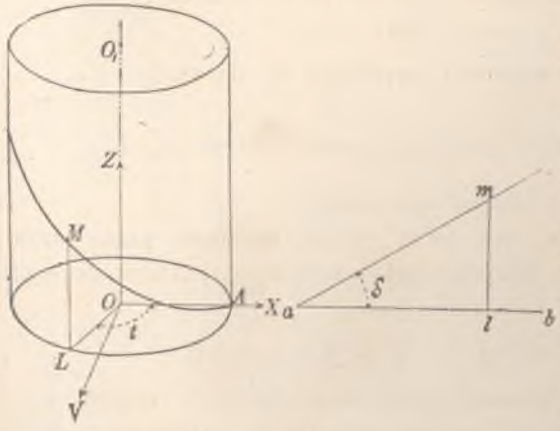
$$Ax+By+Cz=D,$$

гдѣ D постоянное число.

Послѣднее уравненіе есть не что иное, какъ уравненіе плоскости, въ которой должна лежать кривая линія.

Винтовая линія.

§ 56. Возьмемъ (черт. 97) прямой круговой цилиндръ и нѣкоторую плоскость, на которой начерченъ уголъ δ съ вершиной a. Будемъ, предполагая плоскость угла гибкою, напримѣръ листомъ бумаги, наматывать ее на цилиндръ, помѣстивъ точку a въ нѣкоторую точку A основанія цилиндра, такимъ образомъ, чтобы сторона ab угла пошла вдоль основанія цилиндра; тогда другая сторона ac угла расположится на цилиндрѣ по нѣкоторой кривой линіи, которую называютъ *винтовой линіей*. Поянимъ на примѣрѣ этой винтовой линіи все, что было раньше сказано относительно кривизны и крученія линіи. Напишемъ прежде всего уравненія винтовой линіи. Разсмотримъ нѣкоторую точку m на сторонѣ наматываемаго угла. Перпендикуляръ ml на цилиндръ обратится въ часть ML образующей цилиндра между основаніемъ и винтовой линіей. Возьмемъ прямоугольную систему координатъ, причемъ



Черт. 97.

за плоскость XY возьмемъ плоскость основанія цилиндра, начало координатъ O возьмемъ въ центрѣ основанія и за ось Z возьмемъ ось цилиндра OO_1. Ось X проведемъ черезъ точку A, а ось Y перпендикулярно къ ней. За независимую перемѣнную t возьмемъ уголъ AOL, образованный съ осью X радіусомъ OL. Обозначимъ черезъ ρ радіусъ основанія цилиндра; тогда очевидно, что, если мы обозначимъ черезъ x, y, z координаты точки M винтовой линіи, то будемъ имѣть:

$$x = OL\cos t, y = OL\sin t, z = LM.$$

Но

$$al = \smile AL = \rho t, LM = lm = al\, tg\, \delta = \rho t\, tg\, \delta,$$

и мы получаемъ слѣдующія окончательныя уравненія винтовой линіи

(1) $$x = \rho \cos t, y = \rho \sin t, z = \rho\, tg\, \delta . t.$$

Въ этихъ уравненіяхъ t есть независимая перемѣнная, а числа ρ и δ нѣкоторыя постоянныя величины.

Найдемъ длину дуги винтовой линіи. Дифференцируя уравненія (1), получаемъ

$$dx = -\rho \sin t\, dt, dy = \rho \cos t\, dt, dz = \rho\, tg\, \delta\, dt.$$

Отсюда

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 [\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t + \rho^2 tg^2 \delta] =$$
$$= dt^2 \rho^2 [1 + tg^2 \delta] = \rho^2 \sec^2 \delta\, dt^2;$$
$$ds = \rho \sec \delta\, dt.$$

Интегрируя отъ точки A, получимъ

$$s = \rho \sec \delta \int_0^t dt = \rho \sec \delta . t.$$

Эту формулу можно было бы сразу написать, исходя изъ того соображенія, что длина дуги винтовой линіи есть не что иное, какъ длина am стороны наматываемаго угла.

Найдемъ теперь направленіе касательной къ винтовой линіи въ точкѣ M. Имѣемъ

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{\rho \sin t . dt}{\rho \sec \delta . dt} = -\sin t \cos \delta,$$

(2) $$\cos \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\rho \cos t . dt}{\rho \sec \delta . dt} = \cos t \cos \delta,$$

$$cos\,\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\rho\, tg\,\delta.\, dt}{\rho\, sec\,\delta.\, dt} = sin\,\delta.$$

Оказывается, что касательная къ винтовой линіи образуетъ съ осью Z постоянный уголъ, что очевидно также изъ геометрическихъ соображеній.

Для нахожденія кривизны будемъ дифференцировать формулы (2):

$$d\,cos\,\alpha = -\,cos\,t\,cos\,\delta.\,dt,$$
$$d\,cos\,\beta = -\,sin\,t\,cos\,\delta.\,dt,$$
$$d\,cos\,\gamma = 0;$$

отсюда получаемъ выраженіе для кривизны

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{ds}\sqrt{dt^2(cos^2 t\,cos^2\delta + sin^2 t\,cos^2\delta)} = \frac{cos\,\delta.\,dt}{\rho\,sec\,\delta.\,dt} = \frac{cos^2\delta}{\rho}.$$

Итакъ, мы замѣчаемъ, что первая кривизна винтовой линіи есть величина постоянная.

Разсмотримъ теперь главную нормаль, получаемъ

$$cos\,\lambda = \frac{d\,cos\,\alpha}{\sqrt{(d\,cos\,\alpha)^2 + (d\,cos\,\beta)^2 + (d\,cos\,\gamma)^2}} =$$
$$= \frac{-\,cos\,\delta\,cos\,t.\,dt}{cos\,\delta.\,dt} = -\,cos\,t,$$

(3) $$cos\,\mu = \frac{d\,cos\,\beta}{\sqrt{(d\,cos\,\alpha)^2 + (d\,cos\,\beta)^2 + (d\,cos\,\gamma)^2}} =$$
$$= \frac{-\,cos\,\delta\,sin\,t.\,dt}{cos\,\delta.\,dt} = -\,sin\,t,$$
$$cos\,\nu = 0.$$

Эти формулы показываютъ, что главная нормаль есть не что иное, какъ перпендикуляръ, опущенный на ось цилиндра изъ точки M винтовой линіи.

Подставляя выраженія (2) и (3) въ уравненія

$$A\,cos\,\alpha + B\,cos\,\beta + C\,cos\,\gamma = 0,$$
$$A\,cos\,\lambda + B\,cos\,\mu + C\,cos\,\nu = 0,$$

получимъ

$$-\,A\,sin\,t + B\,cos\,t + C\,tg\,\delta = 0,$$
$$A\,cos t + B\,sin\,t = 0\,,$$

откуда

$$(4) \qquad \frac{A}{tg\,\delta \sin t} = \frac{B}{-tg\,\delta \cos t} = \frac{C}{1},$$

такъ что соприкасающаяся плоскость $A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$ получаетъ уравненіе

$$tg\,\delta \sin t\,(\xi - \rho \cos t) - tg\,\delta \cos t\,(\eta - \rho \sin t) + \zeta - \rho\, tg\,\delta .\, t = 0,$$

или окончательно

$$(5) \qquad tg\,\delta \sin t .\, \xi - tg\,\delta \cos t .\, \eta + \zeta - \rho\, tg\,\delta .\, t = 0.$$

Для полученія второй кривизны будемъ предполагать коэффиціенты A, B, C косинусами угловъ перпендикуляра къ соприкасающейся плоскости (5), т. е. предположимъ, что эти коэффиціенты кромѣ пропорціи (4) удовлетворяютъ еще равенству $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, тогда получимъ

$$\frac{A}{tg\,\delta \sin t} = \frac{B}{-tg\,\delta \cos t} = \frac{C}{1} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{tg^2\delta \sin^2 t + tg^2\delta \cos^2 t + 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{tg^2\delta + 1}} = \cos\delta,$$

откуда

$$A = \sin\delta \sin t,\ B = -\sin\delta \cos t,\ C = \cos\delta;$$

отсюда

$$d\,A = \sin\delta \cos t\, d\,t,\ d\,B = +\sin\delta \sin t\, d\,t,\ d\,C = 0,$$

и вторая кривизна принимаетъ видъ

$$\frac{\sqrt{dA^2 + dB^2 + dC^2}}{ds} = \frac{\sqrt{\sin^2\delta \cos^2 t + \sin^2\delta \sin^2 t}\, d\,t}{\rho \sec\delta\, dt} = \frac{\sin\delta \cos\delta}{\rho},$$

т. е. величина постоянная.

Итакъ, винтовая линія имѣетъ постоянными обѣ кривизны. Оказывается, что винтовая линія есть единственная линія съ постоянными обѣими кривизнами.

Касательная плоскость и нормаль къ поверхности.

§ 57. Возьмемъ поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

и на ней нѣкоторую точку $M(x, y, z)$ (черт. 98).

Касательныя къ различнымъ кривымъ, проведеннымъ по поверхности (1) черезъ точку M и касающіяся въ точкѣ M будутъ всѣ лежать въ одной плоскости, называемой *касательною плоскостью* къ поверхности въ точкѣ M.

Черт. 98.

Для проведенія по поверхности нѣкоторой кривой черезъ точку M пересѣкаемъ поверхность (1) другою поверхностью $\varphi(x, y, z) = 0$, проходящею черезъ точку M.

Мы видѣли уже, что касательная прямая къ кривой, опредѣляемой уравненіями

$$f(x, y, z) = 0 \text{ и } \varphi(x, y, z) = 0,$$

опредѣляется двумя уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta - z) = 0. \tag{3}$$

Если мы будемъ мѣнять функцію φ, т. е. проводить по поверхности (1) черезъ точку M различныя кривыя, то уравненіе (2) не мѣняется; оно и будетъ уравненіемъ касательной плоскости къ поверхности.

Итакъ уравненіе касательной плоскости къ поверхности (1) имѣетъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0. \tag{4}$$

§ 58. Положеніе перпендикуляра MN къ касательной плоскости, возставленнаго изъ точки касанія M будетъ, очевидно, опредѣляться уравненіями

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{1}$$

Этотъ перпендикуляръ носитъ названіе *нормали* поверхности.

Если уравненіе поверхности написано въ видѣ

$$z = F(x, y), \tag{2}$$

т. е. рѣшенномъ относительно z, то предыдущія соображенія приводятъ къ слѣдующимъ выкладкамъ: переписывая уравненіе (2) въ видѣ $z - F(x, y) = 0$, можемъ положить

$$f(x, y, z) = z - F(x, y); \tag{3}$$

обозначимъ для сокращенія двѣ частныя производныя отъ z по x и по y такъ:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}.$$

На основаніи (3) получаемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-p, \frac{\partial f}{\partial y}=-q, \frac{\partial f}{\partial z}=1.$$

Отсюда уравненіе касательной плоскости получаетъ видъ

(4) $$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y),$$

а уравненія нормали будутъ

(5) $$\frac{\xi-x}{-p}=\frac{\eta-y}{-q}=\frac{\zeta-z}{1}.$$

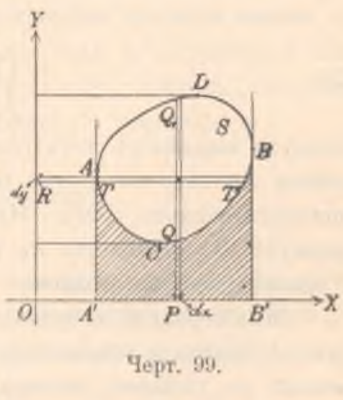
Приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи.

Квадратура площадей.

§ 59. Вопросъ о квадратурѣ площадей разобранъ нами уже въ §§ 147, 148 главы III.

Покажемъ теперь, какъ вычислить площадь какой-нибудь замкнутой фигуры.

Разсмотримъ сомкнутый контуръ S (черт. 99), относительно котораго предположимъ для простоты, что онъ пересѣкается всякой прямой, параллельной одной изъ осей, въ двухъ точкахъ.



Черт. 99.

Такъ, напримѣръ, пусть ордината PQQ_1, параллельная оси y-овъ, пересѣкаетъ контуръ S въ двухъ точкахъ Q и Q_1. Весь контуръ помѣщается между двумя ординатами AA' и BB', касающимися контура въ двухъ точкахъ A и B, и раздѣляется этими точками на двѣ части: нижнюю ACB и верхнюю ADB.

Пусть нижняя часть ACB опредѣляется уравненіемъ $y = \varphi(x)$, а верхняя уравненіемъ $y_1 = \varphi_1(x)$, тогда площадь $A'ACBB'$ опредѣляется интеграломъ

$$\int y\,dx,$$

а площадь $A'ADBB'$ интеграломъ

$$\int y_1\,dx.$$

Отсюда площадь искомаго сомкнутаго контура S будетъ выражаться такъ:

$$\int y_1\,dx - \int y\,dx = \int (y_1 - y)\,dx = \int_a^b [\varphi_1(x) - \varphi(x)]\,dx, \tag{1}$$

гдѣ a и b суть абсциссы крайнихъ ординатъ $A'A$ и $B'B$.

Замѣчая, что

$$y_1 - y = \int_y^{y_1} dy = \int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)} dy,$$

мы получаемъ для площади S выраженіе въ видѣ *двойного* интеграла

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)} dy.\,dx.$$

Итакъ, если мы не будемъ писать предѣловъ у интеграловъ, то всякая площадь выразится двойнымъ интеграломъ

$$\iint dx\,dy; \tag{2}$$

формула выражаетъ тотъ очевидный фактъ, что всякая криволинейная площадь есть сумма безконечнаго числа безконечно малыхъ прямоугольниковъ $dxdy$. Настоящее же вычисленіе площади по формулѣ (2) начинается съ того момента, когда указаны предѣлы у каждаго изъ интеграловъ.

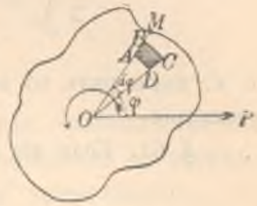
Мѣняя ролями координаты x и y, мы приходимъ къ слѣдующей важной формулѣ, выражающей правило измѣненія порядка интегрированія въ двойномъ интегралѣ:

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)} dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi(y)}^{\psi_1(y)} dx\right] dy,$$

гдѣ уравненіе $x=\psi(y)$ даетъ часть контура CAD, а уравненіе $x=\psi_1(y)$ даетъ часть контура DBC; C и D суть точки касанія прямыхъ, параллельныхъ оси x-овъ и опредѣляемыхъ уравненіями $y=c, y=d$.

§ 60. Разсмотримъ вычисленіе площадей въ полярныхъ координатахъ

$$OD=\rho, \angle DOP=\varphi.$$



Черт. 100.

Разсмотримъ безконечно малый криволинейный четыреугольникъ $ABCD$ (черт. 100), образованный двумя дугами BC, AD круговъ радіуса $\rho+d\rho$ и ρ, а также двумя прямыми AB и DC, соотвѣтствующими полярнымъ угламъ $\varphi+d\varphi$ и φ.

Отсюда

$$AB=d\rho, AD=\rho d\varphi.$$

Откидывая безконечно малыя высшаго порядка, отчего предѣлъ суммы не измѣняется, мы можемъ считать площадь фигуры равною суммѣ

$$\mathrm{S}\, ABCD=\int \rho\, d\varphi\, d\rho.$$

Производя интегрированіе по ρ, получаемъ

$$\int_0^{\rho_0} \rho\, d\rho=\frac{\rho_0^2}{2},$$

гдѣ ρ_0 есть значеніе ρ, соотвѣтствующее точкѣ M на контурѣ. Мы получаемъ уравненіе контура въ видѣ $\rho_0=\psi(\varphi)$. Значитъ, площади въ полярныхъ координатахъ опредѣляются по формулѣ

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\int \rho_0^2\, d\varphi=\frac{1}{2}\int [\psi(\varphi)]^2\, d\varphi.$$

Если полюсъ O лежитъ внутри сомкнутаго контура, площадь котораго подлежитъ опредѣленію, то мы получимъ всю площадь, мѣняя φ отъ 0 до 2π, такъ что такая площадь выразится формулой

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho_0^2\, d\varphi.$$

Примѣнимъ формулу (2) къ нахожденію площади круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ O; тогда $\rho_0 = a$, и мы получаемъ площадь круга по формулѣ

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a^2}{2}\, 2\pi = \pi a^2,$$

т. е. какъ разъ то выраженіе, которое извѣстно изъ элементарной геометріи.

§ 61. Если мы сравнимъ два выраженія

$$\iint dx\, dy, \iint \rho\, d\varphi\, d\rho$$

для площади фигуры, причемъ намъ извѣстно, что между прямоугольными координатами x, y съ одной стороны и полярными φ и ρ съ другой существуютъ соотношенія

(1) $$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,$$

то является весьма важная задача, преобразовать двойной интегралъ при помощи соотношеній (1), т. е., другими словами, догадаться, что подинтегральное выраженіе въ новыхъ координатахъ будетъ $\rho\, d\varphi\, d\rho$ на основаніи разсмотрѣнія только соотношеній (1), не прибѣгая къ геометрическимъ соображеніямъ предыдущаго §-а.

Эта задача была вполнѣ рѣшена для двойныхъ интеграловъ Euler'омъ.

Теорема Euler'а состоитъ въ слѣдующемъ:
если

(2) $$x = \psi(u, v),\ y = \omega(u, v),$$

то двойной интегралъ преобразуется по формулѣ

(3) $$\iint \Omega(x, y)\, dx\, dy = \iint \Omega\Big(\psi(u, v), \omega(u, v)\Big)\, \Delta\, d u\, dv,$$

гдѣ Δ есть такъ называемый *функціональный опредѣлитель* двухъ функцій φ и ψ, а именно

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Въ примѣненіи къ случаю уравненія (1) получаемъ

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\varphi . \rho\cos\varphi - [-\rho\sin\varphi]\sin\varphi = \rho.$$

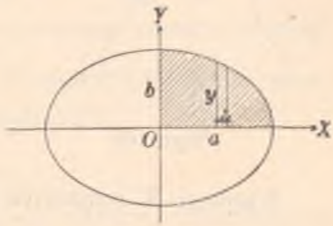
Слѣдовательно, при $\Omega = 1$ формула (3) обращается въ такую

$$\iint dx\,dy = \iint \rho\, d\varphi\, d\rho.$$

Формула (3) Euler'а была обобщена для тройныхъ интеграловъ Lagrange'емъ, и, наконецъ, Jacobi высказалъ ее окончательно для какого угодно числа перемѣнныхъ независимыхъ.

§ 62. Вычислимъ, напримѣръ, площадь эллипса (черт. 101)

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Черт. 101.

Четверть этой площади выразится интеграломъ

$$\frac{1}{4}V = \int_0^a y\,dx,$$

но изъ уравненія (1) получаемъ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

значитъ

$$\frac{1}{4}V = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx;$$

подставивъ въ этотъ интегралъ $x = a\sin t$, получимъ

$$\frac{1}{4}V = \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,.\ a\cos t\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{ab}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\right] =$$

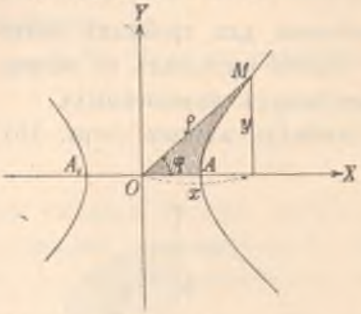
$$= \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{ab\pi}{4},$$

такъ какъ $\sin 2.0 = 0$ и $\sin 2\frac{\pi}{2} = \sin\pi = 0$.

Значитъ получаемъ окончательно

(2) $$V = \pi ab.$$

§ 63. Какъ второй примѣръ разсмотримъ *равностороннюю* гиперболу (черт. 102)



Черт. 102.

(1) $x^2 - y^2 = 1\ (AO = a = b = 1)$.

Найдемъ площадь V сектора AOM, соотвѣтствующаго углу φ.

Введемъ полярныя координаты

(2) $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$,

тогда по уравненію (1) получимъ $\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \rho^2\cos 2\varphi = 1$, откуда

(3) $$\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\varphi}.$$

Площадь V выразится такъ:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \rho^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} = -\frac{1}{4}\int_0^\varphi \frac{d\,tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} =$$

$$= -\frac{1}{4}\,lg\,tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right).$$

Отсюда

$$lg\,tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = -4V,$$

и

$$e^{-4V} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{1 - tg\varphi}{1 + tg\varphi} = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{\cos 2\varphi};$$

извлекая корень квадратный, имѣемъ на основаніи уравненій (2) и (3)

$$e^{-2V} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = x - y, \tag{4}$$

далѣе

$$e^{2V} = \frac{1}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y. \tag{5}$$

Изъ уравненій (4) и (5) получаемъ

$$x = \frac{e^{2V}+e^{-2V}}{2}, y = \frac{e^{2V}-e^{-2V}}{2}. \tag{6}$$

Эти функціи называются *гиперболическими*; функція $\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2}$ называется *гиперболическимъ косинусомъ* и обозначается знакомъ $\cosh yp\,\xi$, а функція $\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2}$ называется *гиперболическимъ синусомъ* и обозначается $\sinh yp\,\xi$. Равенство (6) можно переписать такъ:

$$x = coshyp\, 2V,\ y = sinhyp\, 2V.$$

Спрямленіе дугъ.

§ 64. Дуга плоской кривой, какъ мы видѣли, опредѣляется интеграломъ

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2} = \int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Дуга кривой двоякой кривизны въ трехмѣрномъ пространствѣ выражается интеграломъ

$$\int\sqrt{dx^2+dx^2+dz^2} = \int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

§ 65. Найдемъ, напримѣръ, дугу эллипса, опредѣляемаго уравненіями

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t\ ^{*});$$

$$\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^t\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt \text{ (}e\text{—эксцентриситетъ).}$$

---

*) Черезъ исключеніе t получается какъ разъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Подставляя сюда $\cos t = -z$, получимъ

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

и слѣдовательно дуга эллипса выражается интеграломъ

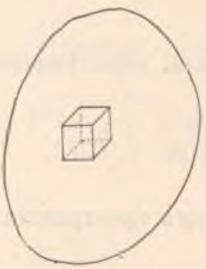
$$\int \frac{\sqrt{1-e^2 z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz,$$

не берущимся въ конечномъ видѣ.

Кубатура объемовъ.

§ 65. Объемы пространственныхъ тѣлъ вычисляются при помощи тройныхъ интеграловъ вида

(1) $$\iiint dx\, ay\, dz.$$


Черт. 103.

При этомъ искомый объемъ вычисляется, какъ сумма безконечнаго числа объемовъ безконечно малыхъ параллелепипедовъ $dx\,dy\,dz$ (черт. 103).

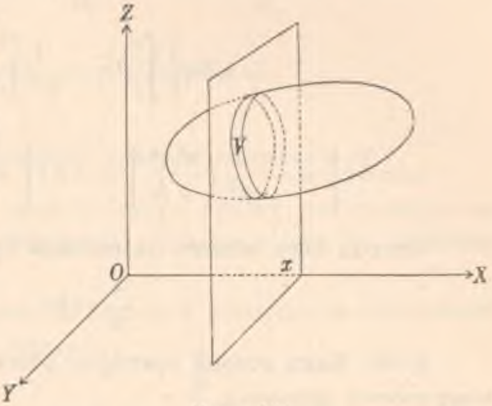
Совершенно подобно тому, что мы видѣли для площадей плоскихъ фигуръ, настоящее вычисленіе объема по интегралу (1) начинается съ того момента, когда устанавливаются предѣлы трехъ послѣдовательныхъ интегрированій по x, по y и по z. Эти предѣлы устанавливаются по виду поверхности, ограничивающей тѣло.

Мы не будемъ входить въ подробности установленія этихъ предѣловъ. Это задача легкая, и читатель, внимательно прочитавшій § 59, разберется безъ труда въ этомъ вопросѣ. Во всякомъ случаѣ эти подробности можно найти во всякомъ болѣе или менѣе полномъ курсѣ анализа.

§ 66. Часто можно бываетъ упростить вычисленіе объема тѣла на основаніи геометрическихъ свойствъ поверхности, ограничивающей этотъ объемъ.

Одинъ изъ важныхъ случаевъ такого рода имѣетъ мѣсто, когда изъ геометрическихъ соображеній намъ извѣстна площадь V сѣченія тѣла плоскостью $x=\alpha$ (черт. 104), гдѣ x одна изъ трехъ прямоугольныхъ координатахъ x, y, z. Очевидно, что площадь V будетъ функціей отъ α, тогда объемъ будетъ, очевидно, выражаться простымъ интеграломъ

$$\int V\,d\alpha.$$



Черт. 104.

§ 67. Найдемъ объемъ *эллипсоида* *)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \tag{1}$$

пересѣчемъ этотъ эллипсоидъ плоскостью $x=\alpha$, тогда, очевидно, получается въ сѣченіи эллипсъ, опредѣляемый уравненіемъ

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right)}=1. \tag{2}$$

Полуоси этого эллипса будутъ

$$b\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{a^2}}.$$

Площадь V эллипса на основаніи соображеній § 62 выразится по формулѣ

$$V=\pi\,b\,c\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right).$$

*) Эта поверхность (1) называется эллипсоидомъ, ибо получается эллипсъ во всякомъ ея плоскимъ сѣченіи.

Половина объема эллипсоида выразится по формулѣ

$$\int_0^a V\,d\alpha = \pi b c \int_0^a \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) d\alpha =$$

$$= \pi b c \left[\int_0^a d\alpha - \frac{1}{a^2} \int_0^a \alpha^2\, d\alpha \right] =$$

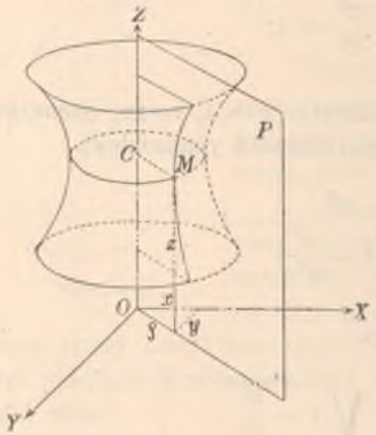
$$= \pi b c \left[a - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\alpha^3}{3} \right)_0^a \right] = \pi b c \left[a - \frac{1}{3} a \right] = \frac{2}{3} \pi abc.$$

Отсюда весь объемъ эллипсоида будетъ равенъ

$$\frac{4}{3} \pi abc.$$

§ 68. Какъ второй примѣръ, разсмотримъ вычисленіе объема *поверхности вращенія.*

Пусть около оси z (черт. 105) вращается плоскость P, тогда нѣкоторая кривая, расположенная въ этой плоскости, будетъ описывать вокругъ оси z-овъ нѣкоторую поверхность, называемую *поверхностью вращенія.*



Черт. 105.

Ось z-овъ будетъ для этой поверхности *осью вращенія.* Всякая точка M кривой будетъ описывать въ пространствѣ кругъ съ центромъ на оси z-овъ, и плоскость этого круга будетъ перпендикулярна къ этой оси. Этотъ кругъ называется *параллелью* поверхности, а всякое положеніе вращающейся кривой представляетъ такъ называемый *меридіанъ* поверхности.

Обозначимъ ρ радіусъ параллели точки M; пусть уравненіе меридіана въ его плоскости опредѣляется уравненіемъ между z и ρ

(1) $$\rho = f(z).$$

Такъ какъ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, то окончательное уравненіе поверхности вращенія будетъ

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z).$$

Площадь параллели, какъ площадь круга радіуса ρ, будетъ равна $\pi\rho^2$.

Слѣдовательно, объемъ поверхности вращенія вычислится при помощи интеграла

$$\int \pi\rho^2\, dz = \pi \int [f(z)]^2\, dz.$$

Нахожденіе площадей кривыхъ поверхностей.

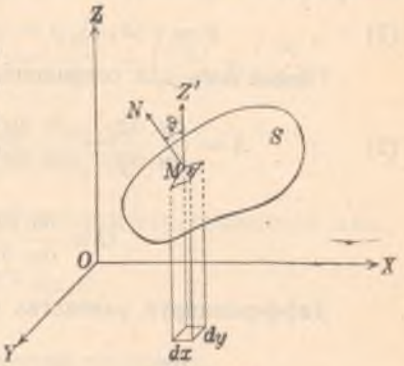
§ 69. Разсмотримъ прямоугольную призму, построенную параллельно оси z-овъ на основаніи прямоугольника со сторонами dx, dy (черт. 106).

Эта призма высѣкаетъ на заданной поверхности криволинейный безконечно малый четыреугольникъ.

Обозначимъ площадь этого четыреугольника черезъ ε, тогда кривая поверхность, ограниченная нѣкоторымъ сомкнутымъ контуромъ, выразится суммой

(1) $$\Sigma\,\varepsilon.$$

Чтобы перейти къ выраженію этой суммы черезъ интегралъ, замѣтимъ слѣдующее.



Черт. 106.

Площадь ε, вслѣдствіе ея безконечно малой величины, мы можемъ считать плоскою, причемъ ея плоскость можно считать за плоскость, касательную къ заданной поверхности въ какой либо ея точкѣ M, лежащей на этой площади. Пусть ϑ будетъ уголъ, который образуетъ касательная плоскость съ плоскостью XY, тогда, очевидно, площадь $dx\,dy$ будетъ проекціей на плоскость XY площади ε, такъ что будемъ имѣть

$$\varepsilon \cos\vartheta = dx\,dy,$$

откуда $\varepsilon = \dfrac{dx\,dy}{\cos\vartheta}$, и площадь всей кривой поверхности выразится двойнымъ интеграломъ

(2) $$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\vartheta}.$$

Очевидно, что уголъ ϑ касательной плоскости съ плоскостью XY равенъ углу γ, который образуетъ нормаль къ поверхности съ осью Z. На основаніи уравненій (5) § 58 мы получаемъ

$$\cos\vartheta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Отсюда интегралъ (2) получаетъ видъ

$$\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \tag{3}$$

Покажемъ теперь, какъ преобразовать интегралъ (3) предыдущаго §-а къ новымъ перемѣннымъ независимымъ u, v, если поверхность выражена уравненіями

$$x=\varphi(u,v),\; y=\psi(u,v),\; z=\omega(u,v). \tag{1}$$

Обозначимъ для сокращенія

$$A=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\; B=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{2}$$

$$C=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Дифференцируя равенства (1), получимъ

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\; dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv, \tag{3}$$

$$dz=p\,dx+q\,du=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv. \tag{4}$$

Подставляя выраженія (3) въ (4) получимъ

$$p\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+q\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv;$$

сравнивъ коэффиціенты при du и dv получаемъ

$$\begin{aligned} p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}&=\frac{\partial z}{\partial u},\\ p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}&=\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned} \tag{5}$$

откуда, рѣшая два уравненія (5) относительно двухъ неизвѣстныхъ p и q получимъ

$$p = \frac{-A}{C}, q = \frac{-B}{C}.$$

Въ этомъ случаѣ функціональный опредѣлитель Δ есть не что иное, какъ C, и мы получаемъ изъ интеграла (3) предыдущаго параграфа такой новый интегралъ

$$\iint \sqrt{1 + \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2}} \cdot \Delta\, du\, dv = \iint \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

На основаніи тождества Lagrange'а мы имѣемъ

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

гдѣ

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Поэтому интегралъ, выражающій поверхность, напишется такъ

$$(6) \qquad \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Приложенія къ сферической геометріи.

§ 70. Соединимъ вершины угловъ сферическаго треугольника A, B, C (черт. 107) прямыми съ центромъ O шара и обозначимъ стороны треугольника, противоположныя A, B, C, черезъ a, b, c. Изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на плоскость AOB и черезъ CD проведемъ плоскости, перпендикулярныя къ радіусамъ OA и OB. Эти плоскости пересѣкутъ плоскости граней AOB, AOC, BOC по линіямъ DE, CE, DF, CF; тогда $\angle\ CED = A$, $\angle\ CFD = B$.

Черт. 107.

Опустимъ еще изъ E перпендикуляръ EH на BO и изъ D перпендикуляръ DG на EH, тогда $\angle DEG = \angle AOB = c$.

Будемъ далѣе имѣть

$OF = OH + HF$, но $OF = \cos a, OH = OE \cos c = \cos b \cos c$,

$HF = DG = DE \sin DEG = CE \cos A \sin c = \sin b \sin c \cos A$,

слѣдовательно,

(1) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Теорема. *Косинусъ одной изъ сторонъ сферическаго треугольника равенъ произведенію косинусовъ другихъ двухъ сторонъ плюсъ произведеніе синусовъ тѣхъ же сторонъ на косинусъ угла, противолежащаго первой сторонѣ.*

Далѣе:

$$CD = CE \sin A = CF \sin B,$$

но

$$CE = \sin b, CF = \sin a,$$

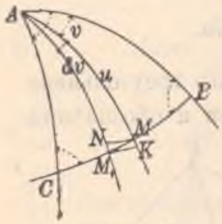
слѣдовательно

(2) $$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Теорема. *Синусы сторонъ относятся между собой, какъ синусы противоположныхъ угловъ.*

Эта теорема напоминаетъ подобную же теорему въ плоской тригонометріи.

§ 71. Найдемъ теперь площадь треугольника, составленнаго дугами большихъ круговъ (черт. 108), прилагая общую формулу (6) § 69.



Черт. 108.

Если мы положимъ $\rho = 1$ въ формулахъ (1) § 64 гл. II, то получимъ формулы

(1) $x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos u$,

выражающія шаръ радіуса единицы въ двухъ параметрахъ u и v.

Мы имѣемъ

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos u \cos v, \frac{\partial y}{\partial u} = \cos u \sin v, \frac{\partial z}{\partial u} = -\sin u,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\sin u \sin v, \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u \cos v, \frac{\partial z}{\partial v} = 0;$$

отсюда

$$E = 1, G = \sin^2 u, F = 0,$$

и интегралъ (6) § 69 принимаетъ видъ

(2) $$\iint \sin u \, du \, dv.$$

Предѣлы интегрированія, распространеннаго на площадь сферическаго треугольника, проще установить, если провести ось z-овъ черезъ вершину A треугольника, а главный меридіанъ (ZX) пустить по сторонѣ AB, тогда интегралъ можетъ быть съ предѣлами написанъ такъ

$$\int_0^A dv \int_0^u \sin u\, du.$$

Здѣсь A обозначаетъ величину угла при вершинѣ A. Верхній предѣлъ u внутренняго интеграла есть не что иное, какъ дуга AM произвольнаго меридіана, считаемая отъ вершины A до стороны BC.

Интегрируя по u получимъ

$$(3) \qquad \int_0^A (1-\cos u)\, dv = A - \int_0^A \cos u\, dv.$$

Разсмотримъ нѣкоторое перемѣнное значеніе долготы v и дадимъ углу v приращеніе dv. Уголъ AMB мы будемъ для простоты обозначать черезъ M. Приращенному значенію $v+dv$ долготы будетъ соотвѣтствовать меридіанъ AM_1, причемъ уголъ AM_1B при точкѣ M_1 будетъ приращеннымъ значеніемъ угла M, т. е. будетъ $M+dM$.

Проведемъ дуги параллелей MN и M_1K; первая имѣетъ радіусъ $\sin u$, а вторая $\sin(u+du)$.

Отсюда

$$NM = \sin u\, dv,\ M_1K = \sin(u+du)\, dv,$$
$$M_1N = du, \qquad MK = du.$$

Изъ треугольника MM_1K получаемъ

$$(4) \qquad tg\, M = \frac{M_1K}{MK} = \frac{\sin(u+du)\, dv}{du}.$$

Прилагая формулу синусовъ (2) § 70 къ треугольнику MM_1A получаемъ

$$\frac{\sin AM_1M}{\sin AMM_1} = \frac{\sin AM}{\sin AM_1}$$

или

$$\frac{\sin(M+dM)}{\sin M} = \frac{\sin u}{\sin(u+du)}.$$

Отсюда

(5) $$\sin(M+dM)\sin(u+du)-\sin u\sin M=0.$$

По формулѣ Taylor'а

$$\sin(M+dM)=\sin M+\cos M\,d\,M+\ .\ .\ .$$
$$\sin(u+du)=\sin u+\cos u\,du+\ .\ .\ .$$

Оставляя въ уравненіи (5) только члены съ первыми степенями дифференціаловъ, получаемъ

$$\sin M\cos u\,du+\cos M\sin u\,dM=0$$

или

$$\sin u\,dM+tg\,M\cos u\,du=0.$$

Подставляя сюда вмѣсто $tg\,M$ его выраженіе (4) получимъ

$$dM\sin u+\sin(u+du)\cos u\,dv=0;$$

откидывая высшія степени дифференціаловъ получаемъ окончательно

$$dM+\cos u\,dv=0.$$

Отсюда формула (3) принимаетъ видъ

$$A+\int_0^A dM=A+(M)_A-(M)_0.$$

Здѣсь знакомъ $(M)_A$ обозначено значеніе угла M при $v=A$, а знакомъ $(M)_0$ обозначено значеніе угла M при $v=0$. Очевидно, что

$$(M)_A=C,(M)_0=\pi-B,$$

и мы получаемъ для площади сферическаго треугольника выраженіе

(6) $$A+B+C-\pi,$$

т. е. *площадь сферическаго треугольника равна избытку суммы его угловъ надъ двумя прямыми.*

ГЛАВА VII.

Теорія функцій.

§ 1. Теорія функцій распадается на двѣ большія части, на теорію функцій вещественнаго перемѣннаго и на теорію функцій комплекснаго перемѣннаго, т. е. теорію функцій $f(u)$, гдѣ

$$u = x + \sqrt{-1}\,y\,.$$

Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго получила въ XIX столѣтіи благодаря изслѣдованіямъ Cauchy, Riemann'a и Weierstrass'a первостепенное значеніе, такъ что подъ названіемъ теоріи функцій обыкновенно разумѣютъ теорію функцій комплекснаго перемѣннаго.

§ 2. Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго началась съ естественнаго желанія обобщить функціи, извѣстныя изъ элементарной математики, на случай комплексныхъ значеній независимой перемѣнной.

Что касается функцій раціональныхъ, то такое обобщеніе не представляетъ никакого затрудненія. Придется подставить въ раціональную функцію вмѣсто перемѣнной независимой ея комплексное значеніе, т. е. составить выраженіе $f(x+iy)$, и по правиламъ раціональныхъ дѣйствій надъ комплексными числами отдѣлить въ послѣднемъ выраженіи вещественную и мнимую части, такъ что получится

$$f(x+iy) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будутъ вещественныя раціональныя функціи отъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y. Напримѣръ,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$

Что касается обобщенія радикальныхъ выраженій на случай комплексныхъ значеній подрадикальнаго числа, то это обобщеніе было показано въ § 24 гл. I.

§ 3. Euler обобщилъ слѣдующимъ образомъ понятіе о показательной функціи e^u на случай комплекснаго перемѣннаго.

Въ § 145 гл. III мы имѣли

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$$

Отсюда, полагая $u = iy$, будемъ имѣть

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2 y^2}{1.2} + \frac{i^3 y^3}{1.2.3} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{y^2}{1.2} + + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots\right).$$

Сравнивая съ формулами (2) и (3) § 145 гл. III, мы получаемъ окончательно слѣдующую формулу Euler'а для возвышенія числа e въ мнимую степень:

(1) $$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Отсюда получаемъ для возвышенія e въ комплексную степень формулу

(2) $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y.$$

§ 4. Эти формулы Euler'а связали двѣ важныя части элементарной математики, теорію логариѳмовъ и тригонометрію, и показали, что эти двѣ части математики представляютъ въ сущности одну и ту же доктрину, которую можно характеризовать, какъ теорію функцій *съ однимъ періодомъ*.

Подъ функціей періодической съ періодомъ a разумѣется всякая такая функція, которая не мѣняется отъ прибавленія къ перемѣнному независимому этого періода a, т. е., другими словами, такая функція, которая удовлетворяетъ тождеству

$$f(x + a) = f(x).$$

Функціи $\sin x$ и $\cos x$ суть, какъ извѣстно изъ тригонометріи, періодическія съ періодомъ 2π. Періодичность показательной функціи e^x обнаруживается изъ формулы (1) предыдущаго §-а. Періодъ у этой функціи оказывается мнимымъ числомъ $2\pi i$, такъ какъ если мы будемъ считать $\xi = iy$, то

$$e^{\xi+2\pi i}=e^{i(y+2\pi)}=\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)=$$
$$=\cos y+i\sin y=e^{iy}=e^{\xi}.$$

§ 5. Хотя распространеніе понятія функціи вещественнаго перемѣннаго на случай комплексныхъ значеній перемѣннаго является нѣкоторымъ обобщеніемъ понятія о функціи, тѣмъ не менѣе приходится признавать теорію функцій *вещественнаго* перемѣннаго болѣе широкой и общей теоріей. Какъ мы увидимъ далѣе, въ основѣ современной теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго лежатъ такія положенія, которыя приводятся къ возможности разложенія функціи въ безконечный рядъ по степенямъ перемѣннаго независимаго, а также къ существованію производныхъ различныхъ порядковъ отъ этихъ функцій, теорія же функцій вещественнаго перемѣннаго ограничивается самымъ общимъ понятіемъ о функціи, независимо отъ существованія производныхъ и какихъ либо разложеній въ ряды. Въ виду этого я и считаю теорію функцій вещественнаго перемѣннаго теоріей болѣе общей.

Въ нашемъ краткомъ обзорѣ теоріи функцій я скажу о теоріи функцій вещественнаго перемѣннаго очень немного.

Полигональныя кривыя.

§ 6. Разсмотримъ функцію, которая геометрически строится слѣдующимъ образомъ.

Она опредѣлена для значеній независимаго перемѣннаго, лежащихъ въ промежуткѣ $(0, 1)$, причемъ при $x=0$ также $y=0$, а при $x=1$ и $y=1$. Дѣлимъ промежутокъ на три равныя части и считаемъ для x, лежащаго въ среднемъ промежуткѣ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $y=\frac{1}{2}$, т. е. среднему ариѳметическому изъ значеній 0, 1, соотвѣтствующихъ краямъ того промежутка, который дѣлится на три части. Остающіеся крайніе промежутки $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ дѣлимъ каждый на три части, причемъ считаемъ функцію постоянной въ среднихъ частяхъ каждаго изъ этихъ промежутковъ и равной среднему ариѳметическому изъ значеній, соотвѣтствующихъ концамъ промежутка, который мы дѣлимъ на три части, такъ что для промежутка $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ получаемъ $y=\frac{1}{4}$, а для $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}, \frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)$

получаемъ $y=\frac{3}{4}$. Продолжая такимъ образомъ далѣе дѣленіе на три части оставшихся нераздѣленными промежутковъ, мы получаемъ непрерывную функцію, которая геометрически представляется въ видѣ лѣстницы со ступенями различной длины.

Черт. 109.

Я обратилъ вниманіе на эту функцію въ статьѣ „Sur les lignes composées des parties réctilignes" (Comptes Rendus de l'Académie de Paris, 1898, n^0 II) въ виду того, что она даетъ возможность сдѣлать нѣкоторыя достойныя вниманія заключенія относительно понятія о кривой линіи вообще.

Въ самомъ дѣлѣ, построенная геометрически функція можетъ быть слѣдующимъ образомъ просто задана аналитически. Будемъ независимое перемѣнное x писать по тройничной системѣ счисленія

$$x=0, a_1 a_2 a_3 \; . \; . \; . = \frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\; . \; . \; . \; ,$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, . . . суть цифры, изъ которыхъ каждая можетъ имѣть одно изъ трехъ значеній 0, 1, 2. Будемъ соотвѣтственныя значенія y писать по двоичной системѣ

$$y=0, b_1 b_2 b_3 \; . \; . \; . = \frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\; . \; . \; . \; ,$$

гдѣ b_1, b_2, b_3, . . . суть также цифры, имѣющія одно изъ значеній 0, 1. Тогда мы нашу функцію аналитически можемъ опредѣлить. Разсмотримъ два случая.

Первый случай. Пусть всѣ цифры a_i независимаго перемѣннаго x четныя, т. е. имѣютъ значенія 0 или 2; тогда цифры b_i опредѣлимъ изъ равенства

$$b_i=\frac{a_i}{2}.$$

При этомъ, если разложеніе x имѣло безконечное число цифръ, отличныхъ отъ нуля, то таково же будетъ и разложеніе y.

Второй случай. Пусть среди цифръ числа x будутъ существовать нечетныя, и пусть первая нечетная цифра будетъ $a_\kappa = 1$. Тогда возьмемъ за y значеніе, опредѣляемое цифрами

$$b_1 = \frac{a_1}{2}, b_2 = \frac{a_2}{2}, \ . \ . \ . \ b_{\kappa-1} = \frac{a_{\kappa-1}}{2}, b_\kappa = 1,$$

всѣ же остальныя b будемъ считать нулями.

Въ статьѣ „Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ" (Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, т. VI) я подробно разсматриваю свойства опредѣленной такимъ образомъ функціи и показываю, что наша функція интегрируема, т. е., если мы нашу функцію обозначимъ знакомъ

$$y = \vartheta(x),$$

то легко вычислить интегралъ

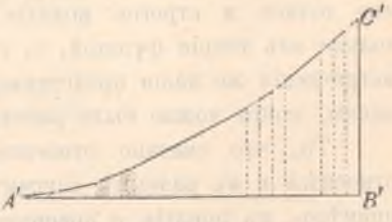
$$\omega(x) = \int_0^x \vartheta(x)\, dx,$$

гдѣ $x < 1$.

Такъ какъ наша функція $\vartheta(x)$ не имѣетъ опредѣленной производной во всѣхъ концахъ ступеней, то функція $\omega(x)$ будетъ обладать тѣмъ свойствомъ, что она будетъ имѣть непрерывную первую производную $\vartheta(x)$, вторая же производная не будетъ существовать для безчисленнаго множества точекъ. Очевидно, что уравненіе

$$y = \omega(x)$$

опредѣлитъ нѣкоторую кривую линію, которая вся будетъ состоять изъ прямолинейныхъ частей, оставаясь въ то же время кривой линіей (черт. 110). Прямолинейныя части будутъ соотвѣтствовать тѣмъ промежуткамъ, въ которыхъ функція $\vartheta(x)$ постоянна.



Черт. 110.

Итакъ, мы замѣчаемъ, что кривую линію можно разсматривать не только, какъ предѣлъ, къ которому стремится ломанная линія, но иногда можно сказать, какъ это мы видимъ въ нашемъ случаѣ, что *кривая линія* есть въ тоже время *ломанная линія*, т. е. линія, состоящая сплошь изъ прямолинейныхъ частей. Очевидно, эти прямолинейныя части не упираются другъ въ друга, ибо иначе появлялась бы угловая точка, и касательная не могла бы измѣнять свое направленіе непрерывно вдоль по кривой, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности направленіе касательной измѣняется непрерывно вслѣдствіе непрерывности функціи $\vartheta(x)$.

§ 7. Итакъ, если мы захотимъ разсмотрѣть геометрическій образъ, соотвѣтствующій уравненію

$$(1) \qquad y = \vartheta(x),$$

и спросимъ себя, можно ли изображенную на черт. 109 лѣстницу считать за линію, то встрѣтимся съ слѣдующимъ затрудненіемъ. Съ одной стороны эта лѣстница вмѣстѣ съ координатами ея конца ограничиваетъ нѣкоторую часть плоскости, такъ что извнѣ нельзя попасть непрерывнымъ движеніемъ во внутрь этой части, не переходя или черезъ прямолинейныя части AB и BC или черезъ какую-нибудь точку, принадлежащую образу, опредѣляемому уравненіемъ (1). Значитъ, эта лѣстница обладаетъ свойствомъ линіи ограничивать часть плоскости. Но, съ другой стороны, вслѣдствіе отсутствія производной въ безчисленномъ числѣ точекъ у функціи $\vartheta(x)$, понятіе о длинѣ дуги линіи (1) отпадаетъ.

Что касается уравненія

$$y = \omega(x),$$

то можно сказать съ полнымъ убѣжденіемъ, что это уравненіе опредѣляетъ дѣйствительно нѣкоторую линію (которую я назвалъ *„полигональной"*), ибо для нея существуетъ уже понятіе о длинѣ дуги между всякими ея двумя точками.

§ 8. Мы привели эти разсужденія для того, чтобы показать, что точное и строгое понятіе о линіи можетъ быть получено только изъ теоріи функцій, т. е. черезъ примѣненіе анализа, геометрическія же наши представленія недостаточно точны и опредѣленны, чтобы можно было разсчитывать на ихъ помощь.

То, что сказано относительно понятія о линіи, очевидно, относится и къ разнымъ другимъ геометрическимъ понятіямъ, напримѣръ, къ понятію о поверхности. Я указалъ на существованіе поверхностей, которыя я назвалъ *полиэдрическими*, и которыя будучи кривыми поверхностями въ смыслѣ непрерывнаго измѣненія касательной плоскости, состоятъ, тѣмъ не менѣе, цѣликомъ изъ плоскихъ частей.

Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго.

§ 9. Мы видѣли выше, что при обобщеніи на случай комплекснаго перемѣннаго функцій, извѣстныхъ изъ элементарной математики, приходится для различныхъ видовъ функцій дѣлать отдѣльныя обобщенія. Для того, чтобы установить *общее* понятіе о функціи комплекснаго перемѣннаго, въ наукѣ имѣются три главныхъ пріема, о которыхъ мы въ краткихъ словахъ упомянемъ.

Теорія Cauchy.

§ 10. Cauchy предлагаетъ разсматривать всякое выраженіе вида

(1) $$F(z)=\varphi(x,y)+i\,\psi(x,y),$$

гдѣ i мнимый знакъ, а φ и ψ двѣ произвольныя вещественныя функціи отъ x и y, какъ нѣкоторую функцію отъ комплекснаго перемѣннаго $z=x+iy$, замѣчая вполнѣ естественно, что всякой парѣ значеній x и y будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное значеніе функціи (1).

Далѣе Cauchy вводитъ понятіе о такъ называемыхъ *моногенныхъ* функціяхъ, у которыхъ функціи φ и ψ удовлетворяютъ нѣкоторымъ дифференціальнымъ уравненіямъ. Проще всего можно установить это понятіе слѣдующимъ образомъ. Пусть функція $F(z)$ характеризуется тѣмъ свойствомъ, что она допускаетъ дифференцированіе по буквамъ x и y по правиламъ дифференцированія функціи отъ функціи, т. е.

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x}=F'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y}=F'(z)\frac{\partial z}{\partial y};$$

замѣчая, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=i,$$

получаемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=F'(z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}=i\,F'(z),$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}=i\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Такъ какъ φ и ψ функціи вещественныя, то получимъ, очевидно,

$$(2)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\end{aligned}$$

Cauchy называетъ функцію $F(z)$ *моногенною* въ томъ случаѣ, если имѣютъ мѣсто равенства (2).

Что касается производной отъ функціи $F(z)$ по буквѣ z, обозначенной черезъ $F'(z)$, то при существованіи равенствъ (2) ея значеніе будетъ

$$(3)\qquad F'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

§ 11. Названіе *моногенной* функціи въ наукѣ не сохранилось, потому что подъ функціей комплекснаго перемѣннаго принято понимать всегда функцію моногенную. Соотношенія Cauchy (2) предыдущаго §-а приводятъ къ слѣдующему весьма важному опредѣленію.

Дифференцируя соотношенія (2), получимъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,$$

откуда видно, что вещественная и мнимая части функціи комплекснаго перемѣннаго суть рѣшенія слѣдующаго уравненія второго порядка

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

съ частными производными. Это уравненіе имѣетъ громадное значеніе, особенно въ математической физикѣ; оно носитъ названіе уравненія *логариомическаго потенціала*, потому что, если мы пожелаемъ искать частное рѣшеніе этого уравненія вида

$$U=f(r),$$

гдѣ

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

то для функціи $f(r)$ получимъ lgr. Вещественнымъ рѣшеніямъ уравненія (1) дается часто названіе *гармоническихъ* функцій; слѣдовательно вещественная и мнимая части функціи комплекснаго перемѣннаго суть гармоническія функціи.

Такимъ образомъ задача нахожденія нѣкоторой функціи отъ комплекснаго перемѣннаго равносильна задачѣ нахожденія двухъ гармоническихъ функцій; но легко видѣть, что Cauchy'евскія соотношенія (2) § 10 позволяютъ одну изъ гармоническихъ функцій выразить черезъ другую, ибо если

$$\psi=\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right),$$

то на основаніи равенствъ (2) § 10 получимъ

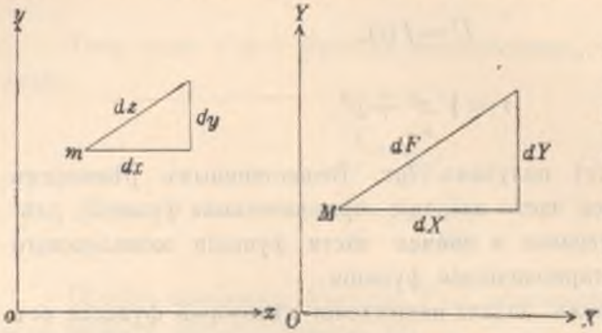
$$\psi=\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right),$$

и если φ есть нѣкоторая гармоническая функція, то подинтегральный двучленъ удовлетворяетъ условіямъ интегрируемости, и мы получимъ опредѣленную функцію ψ.

Изъ этихъ разсужденій заключаемъ, что функція комплекснаго перемѣннаго опредѣляется своею вещественною частью такъ, что, если задана функція комплекснаго перемѣннаго, то ея вещественная часть будетъ гармоническая функція, и обратно, всякой гармонической функціи φ будетъ соотвѣтствовать функція комплекснаго перемѣннаго, имѣющая вещественной частью эту гармоническую функцію. Теорія функцій комплекснаго перемѣннаго есть въ то же время теорія гармоническихъ функцій.

Конформное изображеніе.

§ 12. Riemann показалъ, что предыдущія соображенія Cauchy могутъ быть слѣдующимъ образомъ геометрически интерпретированы.



Черт. 111.

Возьмемъ двѣ плоскости xoy и XOY (черт. 111); на одной, xoy, будемъ изображать точками m значенія комплексной перемѣнной $z=x+iy$, на другой, XOY, будемъ изображать точками M соотвѣтствующія значенія функціи

$$F(z)=X+iY,$$

гдѣ $X=\varphi$ и $Y=\psi$ суть гармоническія функціи. Можно сказать, что заданіе функціи комплекснаго перемѣннаго, т. е., другими словами, заданіе функцій φ и ψ даетъ нѣкоторое изображеніе (карту) плоскости m на M, потому что всякой точкѣ m, имѣющей координаты x и y, будетъ соотвѣтствовать одна или нѣсколько точекъ M. Ограничиваясь разсмотрѣніемъ однозначныхъ функцій, мы скажемъ, что точкамъ m будутъ соотвѣтствовать опредѣленныя точки M. Если мы подъ дифференціаломъ перемѣннаго z и функціи $F(z)$ будемъ разумѣть выраженія

$$dz=dx+idy,$$
$$dF(z)=dX+idY,$$

то Riemann показалъ, что, если существуютъ условія моногенности, то отношеніе

$$\frac{dF(z)}{dz}$$

не зависитъ отъ dx и dy. Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{dF(z)}{dz}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)}{dx+idy}=$$

$$=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(dx+idy)+i\frac{\partial\psi}{\partial x}(dx+idy)}{dx+idy}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

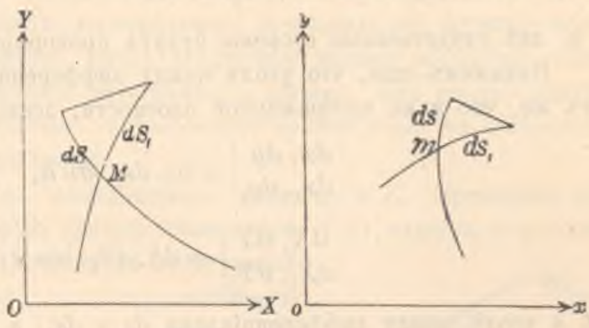
Выражаясь геометрически, можемъ сказать, что отношеніе $\frac{dF}{dz}$ не зависитъ отъ направленія дифференціала dz, а зависитъ только отъ координатъ начала этого дифференціала.

Сопоставляя эту формулу съ формулою (3) § 10, мы видимъ, что

$$\frac{dF(z)}{dz}=F'(z),$$

такъ что для комплексной функціи остается то же самое значеніе производной, какъ отношенія дифференціаловъ, что и для вещественныхъ функцій.

§ 13. Независимость производной комплексной функціи отъ направленія дифференціала dz независимаго перемѣннаго влечетъ, какъ слѣдствіе, весьма важное свойство изображенія одной плоскости на другой. Это изображеніе сохраняетъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ и носитъ поэтому названіе *конформнаго*. Всякій безконечно малый треугольникъ, имѣющій вершину въ точкѣ m плоскости независимаго перемѣннаго z, обращается въ подобный ему треугольникъ въ плоскости функціи комплекснаго перемѣннаго. Для этого разсмотримъ дифференціалъ какой-нибудь дуги s въ плоскости z (черт. 112), т. е.



Черт. 112.

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

и дифференціалъ соотвѣтственной дуги S въ плоскости функціи $F(z)$, т. е.

$$dS^2=dX^2+dY^2=edx^2+2f\,dx\,dy+g\,dy^2,$$

гдѣ на основаніи условій моногенности

$$e=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=g,$$

$$f=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

или

$$dS^2=e\,(dx^2+dy^2)=e ds^2.$$

Отношеніе

$$\frac{dS}{ds}=\sqrt{e} \tag{1}$$

будемъ называть *масштабомъ* изображенія въ точкѣ m, соотвѣтствующимъ направленію элемента дуги s. Равенство (1) показываетъ, что этотъ масштабъ не зависитъ отъ направленія дуги; другими словами, этотъ масштабъ одинъ и тотъ же для всѣхъ направленій, исходящихъ изъ точки m, такъ что безконечно малый кругъ, описанный изъ точки m, обращается въ кругъ, описанный изъ точки M. Очевидно, что, если составимъ треугольникъ на двухъ дифференціалахъ ds и ds_1, выходящихъ изъ точки m, то соотвѣтственный треугольникъ на дифференціалахъ dS и dS_1 будетъ обладать свойствомъ

$$\frac{dS_1}{ds_1}=\frac{dS}{ds},$$

т. е. двѣ сходственныя стороны будутъ пропорціональны.

Покажемъ еще, что уголъ между дифференціалами на картѣ тотъ же, что и на изображаемой плоскости; легко убѣдиться, что

$$\begin{vmatrix} dx, dy \\ dx_1, dy_1 \end{vmatrix}=ds.\,ds_1.\,sin\,a,$$

$$\begin{vmatrix} dX, dY \\ dX_1, dY_1 \end{vmatrix}=dS.\,dS_1.\,sin\,A,$$

гдѣ a уголъ между дифференціалами ds и ds_1, а A уголъ между dS и dS_1. Далѣе имѣемъ

$$\begin{vmatrix} dX, dY \\ dX_1, dY_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} dx, dy \\ dx_1, dy_1 \end{vmatrix},$$

а такъ какъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = e,$$

то получаемъ

$$dS.\, dS_1 \sin A = e\, ds.\, ds_1.\, \sin a;$$

но

$$\frac{dS}{ds} = \frac{dS_1}{ds_1} = \sqrt{e},$$

слѣдовательно

$$dS.\, dS_1 = e\, ds.\, ds_1,$$

а потому

$$\sin a = \sin A.$$

Изъ послѣдняго равенства въ связи съ пропорціей дифференціаловъ дугъ слѣдуетъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ.

Итакъ, функція комплекснаго перемѣннаго задана, если задано конформное изображеніе всей плоскости или нѣкоторой ея части на другой.

Интегралы отъ функцій комплекснаго перемѣннаго.

§ 14. Cauchy въ своемъ знаменитомъ сочиненіи „Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, 1825", желая распространить интегральное исчисленіе на функціи комплекснаго перемѣннаго, ввелъ слѣдующее важное обобщеніе понятія объ опредѣленномъ интегралѣ, а именно, онъ ввелъ понятіе объ *интегралѣ, взятомъ по нѣкоторой кривой линіи* въ плоскости комплекснаго перемѣннаго.

Возьмемъ два комплексныхъ числа z_0 и Z. Проведемъ въ плоскости нѣкоторую кривую линію (черт. 113), идущую отъ точки z_0 къ точкѣ Z. Укажемъ на этой кривой рядъ точекъ $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ и разсмотримъ сумму

Черт. 113.

(1) $[z_1 - z_0] f(\xi_1) + (z_2 - z_1] f(\xi_2) + \\ + \ldots + [Z - z_{n-1}] f(\xi_n),$

гдѣ ξ_i есть комплексное число, соотвѣтствующее точкѣ, лежащей на дугѣ $z_{i-1} z_i$. Будемъ увеличивать число n такимъ образомъ, чтобы наибольшее изъ разстояній $z_{i-1} z_i$ точекъ стремилось къ нулю. Тогда, если сумма (1) имѣетъ предѣлъ, не зависящій отъ закона расположенія точекъ ξ_i, то предѣлъ представляетъ собою интегралъ

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по разсматриваемому контуру $(z_0 Z)$.

Очевидно, что обыкновенный опредѣленный интегралъ при вещественныхъ перемѣнномъ независимомъ и функціи есть частный случай такого *криволинейнаго* интеграла, когда путь интегрированія идетъ по вещественной оси x-овъ.

§ 15. Для вещественныхъ интеграловъ мы имѣемъ формулу

$$(2)\qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0),$$

гдѣ F есть первообразная функція относительно функціи f. Cauchy поставилъ себѣ цѣлью разсмотрѣть вопросъ, остается ли формула (2) справедливой для комплексныхъ интеграловъ; если она остается справедливой для комплексныхъ криволинейныхъ интеграловъ, то она выражаетъ не что иное, какъ зависимость величины интеграла только отъ концовъ z_0 и Z пути интегрированія. Дѣйствительно, Cauchy доказалъ свою знаменитую теорему, что *интегралъ, взятый между двумя точками z_0 и Z не зависитъ отъ путей интегрированія*, если только эти пути проходятъ въ той части плоскости, гдѣ подинтегральная функція $f(x)$ остается конечной, непрерывной и однозначной или, какъ принято говорить, *голоморфной*.

§ 16. Эту теорему можно формулировать еще иначе. Если мы имѣемъ между точками z_0 и Z (черт. 114) два пути интегрированія $z_0 A Z$ и $z_0 B Z$, и если внутри сомкнутаго контура $z_0 A Z B z_0$ функція голоморфна, то два интеграла будутъ одинаковы, т. е.

Черт. 114.

$$(1)\qquad \int_{z_0 A Z} - \int_{z_0 B Z} = 0.$$

Если мы измѣнимъ направленіе интегрированія по контуру на обратное, то измѣняется знакъ дифференціала dz, и, значитъ, интегралъ мѣняетъ свой знакъ, т. е.

$$\int_{z_0 B Z} = -\int_{Z B z_0}.$$

Тогда изъ равенства (1) получимъ

$$\int_{z_0 A Z} + \int_{Z B z_0} = 0,$$

сумму же двухъ интеграловъ въ первой части послѣдняго равенства можно замѣнить однимъ интеграломъ, взятымъ по сомкнутому контуру C, который можно обозначить знакомъ $\int_{(c)}$. Получаемъ равенство

$$\int_{(c)} = 0.$$

Это равенство выражаетъ ту же самую теорему Cauchy, только нѣсколько иначе формулированную, а именно: *интегралъ по сомкнутому контуру равенъ нулю, если внутри контура подинтегральная функція остается голоморфной, т. е. однозначной, конечной и непрерывной.*

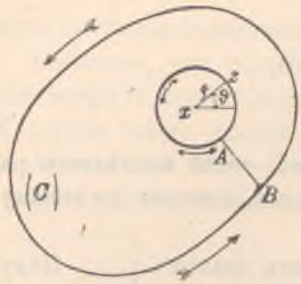
§ 17. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію интеграловъ, взятыхъ по сомкнутому контуру (C), когда внутри этого контура подинтегральная функція перестаетъ быть конечной. Разсмотримъ только случай, когда подинтегральная функція внутри контура обращается только въ одной точкѣ x въ безконечность; такого рода, напримѣръ, будетъ функція

$$\frac{f(z)}{z-x},$$

гдѣ $f(z)$ голоморфна на контурѣ и внутри контура (C). Разсмотримъ интегралъ

$$\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Опишемъ изъ точки x (черт. 115) кругъ безконечно малаго радіуса ρ и соединимъ произвольную точку A этого круга съ нѣкоторою произвольною точкою B контура (C) прямою. На всякомъ контурѣ условимся называть положительнымъ то движеніе вокругъ этого контура, при которомъ замкнутая часть плоскости остается *налѣво*. Контуръ, огибающій кольцо между контуромъ (C) и безконечно малымъ кругомъ ρ, можно получить, двигаясь въ положительномъ направленіи по контуру (C), затѣмъ по прямой отъ B къ A, въ отрицательномъ направленіи по кругу ρ и, наконецъ, по прямой отъ A къ B. Части интеграла, соотвѣтствующія прямолинейнымъ частямъ BA и AB, взаимно уничтожаются, и мы получаемъ по теоремѣ Cauchy



Черт 115.

$$\int_{(c)} + \int_{(-\rho)} = 0,$$

гдѣ знакомъ $(-\rho)$ указано отрицательное направленіе движенія по кругу ρ; мѣняя это направленіе, получимъ

$$\int_{(c)} = \int_{(+\rho)},$$

такъ что вычисленіе заданнаго интеграла свелось къ вычисленію интеграла, взятаго по безконечно малому кругу (ρ).

Обозначая черезъ ϑ аргументъ разности $z-x$, получимъ

$$z - x = \rho e^{i\vartheta},$$

откуда

$$dz = \rho i e^{i\vartheta} d\vartheta.$$

Мы видимъ, что интегралъ по кругу ρ преобразуется въ

$$i\int_0^{2\pi} f(x+\rho e^{i\vartheta})d\vartheta,$$

но, такъ какъ на основаніи непрерывности функціи $f(z)$ при безконечно маломъ ρ будетъ

$$f(x+\rho e^{i\vartheta})=f(x)+\varepsilon,$$

гдѣ ε безконечно малая величина, то получимъ

$$\int_{(c)}\frac{f(z)}{z-x}\,dz=i\,f(x)\int_0^{2\pi}d\vartheta+i\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\vartheta.$$

Но интегралъ $\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\vartheta$ при уменьшеніи ρ до нуля имѣетъ предѣломъ нуль, слѣдовательно мы получаемъ слѣдующую формулу:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(z)}{z-x}\,dz, \tag{1}$$

составляющую *вторую теорему Cauchy*.

Послѣдняя формула приводитъ къ слѣдующему весьма важному замѣчанію. Оказывается, что для вычисленія значенія функціи $f(z)$ для всякаго значенія $z=x$, лежащаго внутри контура, достаточно знать лишь значенія функціи $f(z)$, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ этого контура.

Это замѣчаніе относятся и къ функціямъ гармоническимъ, а именно, если мы будемъ искать рѣшеніе уравненія

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{2}$$

непрерывное и конечное внутри нѣкотораго сомкнутаго заданнаго контура (C), то это рѣшеніе опредѣляется значеніями его на контурѣ, т. е., если заданъ по произволу рядъ вещественныхъ численныхъ значеній, соотвѣтствующихъ разнымъ точкамъ контура, то существуетъ одно рѣшеніе уравненія (2), имѣющее эти значенія на контурѣ. Значенія на контурѣ можно задать, конечно, какъ функцію отъ дуги контура $\psi(s)$, и тогда замѣчательно, что гармоническая функція не перестаетъ существовать и быть непрерывной внутри контура даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда функція $\psi(s)$ перестаетъ быть непрерывною.

§ 18. Задача нахожденія гармонической функціи по заданнымъ ея значеніямъ на сомкнутомъ контурѣ подъ условіемъ ея непрерывности внутри контура носитъ названіе *задачи Dirichlet*. Эта задача рѣшена въ явномъ видѣ лишь для небольшого числа преимущественно алгебраическихъ контуровъ. Въ моей статьѣ „Sur le problème de Dirichlet" (Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Bordeaux. 1895.) указанъ общій пріемъ, дающій рѣшеніе задачи Dirichlet для алгебраическихъ контуровъ, какъ частный случай котораго получаются извѣстные уже случаи рѣшенія этой задачи. Этотъ пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Если заданъ алгебраическій контуръ уравненіемъ

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

то мы вводимъ двѣ комплексныя величины

$$\xi = x + iy, \xi' = x - iy;$$

тогда уравненіе (1) можно будетъ переписать такъ:

$$f\left(\frac{\xi + \xi'}{2}, \frac{\xi - \xi'}{2i}\right) = 0.$$

Разрѣшая послѣднее уравненіе относительно ξ, получимъ

$$\xi = F(\xi'),$$

и F есть та функція, при помощи которой я составляю выраженіе искомаго рѣшенія задачи Dirichlet. Напримѣръ, если контуръ есть кругъ

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

мы получаемъ

$$\xi\xi' = r^2,$$

откуда

$$\xi = \frac{r^2}{\xi'}.$$

Обобщеніе теоремы Taylor'a.

§ 19. Формула (1) § 17 даетъ возможность вычислить производныя любого порядка отъ функціи $f(z)$. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя это равенство по x, получимъ

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz \tag{1}$$

и вообще

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz.$$

Имѣя въ виду разложеніе

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n (z-x)}$$

и замѣняя z на $z-a$ и x на $x-a$, получимъ

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^3} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n (z-x)};$$

умножая обѣ части послѣдняго равенства на $f(z)\,dz$ и интегрируя, получимъ на основаніи формулы (1) § 17

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \\ + \ldots + a_{n-1} (x-a)^{n-1} + R_n,$$

гдѣ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = f(a),$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Мы получили формулу Taylor'а съ остаточнымъ членомъ R_n въ видѣ интеграла.

Теорія Weierstrass'а.

§ 20. Можно убѣдиться, что разложеніе Taylor'а

(1) $$f(z) = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \ldots$$

выражаетъ собою разсматриваемую функцію $f(z)$ внутри круга сходимости этого ряда. Weierstrass предлагаетъ опредѣлять функціи комплекснаго перемѣннаго рядами вида (1), такъ что, по его теоріи, для каждой точки a плоскости долженъ быть построенъ рядъ (1), т. е. указаны его коэффиціенты; сама функція разсматривается тогда, какъ совокупность такихъ рядовъ.

Если въ рядѣ (1) n первыхъ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ равны нулю, то разложеніе (1) будетъ имѣть видъ

$$f(z) = (z-a)^n [a_n + a_{n+1}(z-a) + \ldots];$$

въ этомъ случаѣ точка a будетъ *корнемъ* или *нулемъ* функціи $f(z)$. Если $n=1$, то нуль называется *простымъ*, а если $n>1$, то *кратнымъ*, причемъ показатель n носитъ названіе *порядка кратности* нуля.

§ 21. Если вблизи точки a не существуетъ разложенія функціи въ видѣ ряда (1), то точка a называется *особенной*.

Особенныя точки бываютъ разныхъ видовъ; среди нихъ замѣчательны такъ называемые полюсы. Точку a называютъ *полюсомъ* или *безконечностью* функціи $f(z)$, если будетъ съ одной стороны

$$f(a) = \infty,$$

а съ другой стороны будетъ существовать такой цѣлый положительный показатель n, что функція

$$(z-a)^n f(z)$$

раскладывается около точки a въ рядъ вида (1) § 20, т. е. будетъ имѣть мѣсто равенство

$$(z-a)^n f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

Итакъ, функція $f(z)$ имѣетъ около точки a видъ

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^n} + \frac{a_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z-a} +$$

$$+ a_n + a_{n+1}(z-a) + \ldots$$

или

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^n} + \frac{a_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{z-a} + g(z),$$

гдѣ $g(z)$ *голоморфная* функція около точки a. Число n называется *порядкомъ* полюса.

Поверхности Riemann'a.

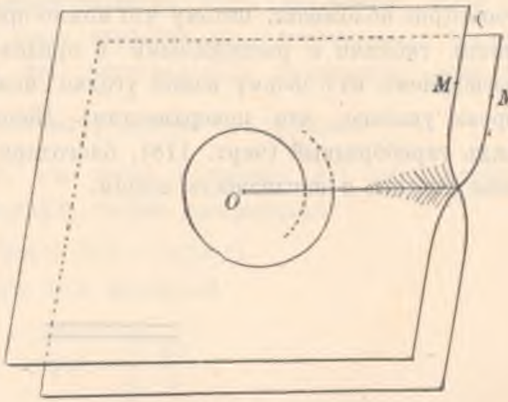
§ 22. Обращаясь теперь къ разсмотрѣнію функцій многозначныхъ, укажемъ имѣющій важное значеніе въ наукѣ способъ Riemann'a сопоставлять значенія этихъ функцій точкамъ нѣкоторыхъ особенныхъ поверхностей, которыя въ настоящее время носятъ названіе *поверхностей Riemann'a*. Поверхности Riemann'a имѣютъ особенное значеніе въ теоріи алгебраическихъ функцій, такъ какъ эти функціи суть функціи многозначныя, имѣющія *конечное* число значеній для каждаго значенія независимаго перемѣннаго.

Ограничимся разсмотрѣніемъ самой простой многозначной функціи

$$\sqrt{z}.$$

Эта функція для всякаго z имѣетъ два различныхъ значенія $+\sqrt{z}$ и $-\sqrt{z}$. Если аргументъ z увеличивается на 2π, т. е., другими словами, если мы обходимъ на полную окружность около начала координатъ, то аргументъ функціи $\sqrt{z}$ измѣняется только на π (ибо при извлеченіи корня квадратнаго аргументъ дѣлится пополамъ). Если же аргументъ комплекснаго числа измѣняется на π, причемъ модуль остается безъ измѣненія, то комплексное число мѣняетъ свой знакъ, ибо косинусъ и синусъ аргумента мѣняютъ свой знакъ отъ прибавленія къ аргументу числа π.

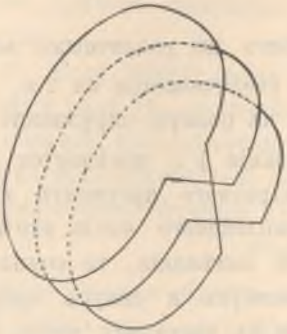
Riemann предлагаетъ разсматривать плоскость состоящей изъ двухъ отдѣльныхъ листовъ, одинъ на другой наложенныхъ, причемъ каждая точка плоскости будетъ соотвѣтствовать двумъ точкамъ: одной точкѣ M (черт. 116) на верхнемъ листѣ и другой точкѣ M_1, непосредственно подъ ней лежащей, на нижнемъ; слѣдовательно, два значенія функціи $+\sqrt{z}$ и $-\sqrt{z}$, соотвѣтствующія одному и тому же значенію z, расположатся на двухъ различныхъ листахъ, одно значеніе на верхнемъ листѣ, другое на нижнемъ въ точкахъ M и M_1, соотвѣтствующихъ точкѣ плоскости, указанной независимой перемѣнной z.



Черт. 116.

Такъ какъ послѣ одного обхода около начала координатъ долженъ мѣняться знакъ у функціи, то, значитъ, долженъ совершиться переходъ съ одного листа на другой. Въ виду этого по нѣкоторой прямой, идущей отъ начала координатъ, происходитъ соединеніе крестъ на крестъ двухъ листовъ, что достаточно ясно указано на чертежѣ 116.

Для функціи $\sqrt[3]{z}$ придется имѣть уже 3 листа, связанныхъ около начала координатъ такъ, какъ это показано на черт. 117.



Черт. 117.

Черт 118.

Мы говорили, что поверхности Riemann'a относятся къ геометріи положенія, потому что можно предполагать листы поверхности гибкими и растяжимыми и придавать имъ непрерывнымъ изгибаніемъ ихъ форму какой угодно поверхности. Въ послѣднее время указано, что поверхностямъ Riemann'a можно придавать видъ гиреобразный (черт. 118), благодаря чему достигается большая ясность и наглядность теоріи.

ГЛАВА VIII.

Интегральное исчисленіе, какъ источникъ новыхъ трансцендентныхъ.

§ 1. Въ § 158 гл. III мы уже видѣли, что лишь немногіе типы интеграловъ берутся въ конечномъ видѣ, большинство же интеграловъ представляютъ собою новыя трансцендентныя. При этомъ нужно замѣтить то весьма важное обстоятельство, что интегральное исчисленіе даетъ въ то же время данныя для нахожденія свойствъ этихъ трансцендентныхъ. Такъ, напримѣръ, если бы теорія логариѳмовъ не была извѣстна изъ элементарнаго курса, то ее мы получили бы изъ интегральнаго исчисленія, если бы стали разсматривать интегралъ, взятый отъ функціи $\frac{1}{x}$.

Въ самомъ дѣлѣ, мы легко получимъ изъ интегральнаго исчисленія основную формулу теоріи логариѳмовъ

$$lg\,x + lg\,y = lg\,(x\,y),$$

если опредѣлимъ функцію $lg\,x$ формулой

$$lg\,x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Разсмотримъ для этого уравненіе

$$\text{(1)} \qquad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Если мы его проинтегрируемъ, то получимъ

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = C.$$

гдѣ C нѣкоторая произвольная постоянная. Послѣднее равенство можно переписать такъ:

$$lg\, x + lg\, y = C. \tag{2}$$

Съ другой стороны уравненіе (1) можно будетъ переписать въ видѣ

$$y\, dx + x\, dy = 0$$

или

$$d\,(x\,y) = 0;$$

интегрируя, получаемъ

$$xy = \alpha, \tag{3}$$

гдѣ α нѣкоторая произвольная постоянная.

Такъ какъ уравненія (2) и (3) должны быть тождествами, справедливыми при всѣхъ значеніяхъ x и y, то, полагая $y = 1$, получимъ изъ уравненія (2)

$$lg\, x = C,$$

а изъ уравненія (3)

$$x = \alpha.$$

Отсюда получаемъ такую зависимость между постоянными:

$$C = lg\, \alpha. \tag{4}$$

Равенство (4) приводитъ къ равенству

$$lg\, x + lg\, y = lg\,(xy),$$

которое требовалось доказать.

§ 2. Подобнымъ же образомъ, если бы намъ не была извѣстна тригонометрія, то мы могли бы ввести круговую функцію $arc\ sin\ x$ при помощи интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

и, повторяя способъ разсужденія, который мы примѣнили въ предыдущемъ §-ѣ для $lg\, x$, мы придемъ къ теоремѣ сложенія функціи $sin\, x$, выражающейся формулой

$$sin\,(x + y) = sin\, x\, cos\, y + cos\, x\, sin\, y.$$

§ 3. Конечно, выводъ теоріи логариѳмовъ и тригонометріи изъ интегральнаго исчисленія представляетъ собою задачу болѣе интересную, чѣмъ полезную, потому что съ этими частями математики мы знакомы уже въ другомъ изложеніи, но такого рода разсужденія сыграли въ наукѣ большую роль, потому что показали, какимъ образомъ можно изучать при помощи интегральнаго исчисленія свойства новыхъ трансцендентныхъ, которыя это исчисленіе вводитъ.

Мы ограничимся въ нашемъ краткомъ изложеніи только указаніемъ на два класса новыхъ трансцендентныхъ, изученіемъ которыхъ прославились математики XIX столѣтія, а именно на такъ называемыя *эллиптическія функціи* и *Abel'евы функціи*.

Эллиптическія функціи.

§ 4. Въ § 157 гл. III мы видѣли уже, что всѣ интегралы отъ раціональныхъ функцій берутся въ конечномъ видѣ. Когда мы переходимъ къ разсмотрѣнію интеграловъ отъ ирраціональныхъ функцій, то необходимо обратить вниманіе на слѣдующій важный результатъ, принадлежащій Euler'у.

Если ирраціональность подинтегральной функціи состоитъ только въ одномъ корнѣ квадратномъ изъ многочлена не выше второй степени, то интегралъ берется въ конечномъ видѣ.

Другими словами, всякій интегралъ вида

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

гдѣ $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ выражаетъ произвольную раціональную функцію отъ двухъ аргументовъ x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, берется въ конечномъ видѣ.

§ 5. Для нахожденія такихъ интеграловъ употребляются знаменитыя *подстановки Euler'а.* Эти подстановки Euler'омъ взяты изъ соображеній Діофантова анализа. Одною изъ важныхъ задачъ Діофантова анализа является задача подобрать такія раціональныя значенія для x, чтобы $\sqrt{ax^2+bx+c}$, гдѣ a, b, c раціональныя числа, выразился раціональнымъ числомъ. Легко убѣдиться, что можно нѣсколькими способами ввести въ разсмотрѣніе вмѣсто x новую перемѣнную t такимъ образомъ, чтобы какъ x, такъ и корень квадратный выражались раціонально черезъ эту перемѣнную.

Обращаясь къ нашему общему случаю, когда коэффиціенты a, b, c числа произвольныя, получимъ первое преобразованіе Euler'а, если положимъ

(1) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}.x+t,$$

отсюда, возвышая въ квадратъ, имѣемъ

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}.xt+t^2,$$

$$bx+c=2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

$$x(b-2\sqrt{a}\,t)=t^2-c,$$

откуда

(2) $$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}.$$

Подставляя выраженіе (2) въ (1), получимъ

(3) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{b-2\sqrt{a}\,t}+t.$$

Дифференцируя равенство (2), получимъ

(4) $$dx=\frac{2bt-2\sqrt{a}\,t^2-2\sqrt{a}.c}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt.$$

Подставляя (2), (3), (4) въ интегралъ

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

получимъ интегралъ, въ которомъ перемѣнная будетъ t, и который не заключаетъ уже ирраціональности.

Второе преобразованіе получаемъ, полагая

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c},$$

откуда

$$x=\frac{b-2\sqrt{c}\,t}{t^2-a},$$

и, наконецъ, третью подстановку получимъ, вводя въ разсмотрѣніе корни α, β подкоренного трехчлена; имѣемъ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Подстановка опредѣляется равенствомъ

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t,$$

откуда получаемъ

$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}.$$

§ 6. Что касается трансцендентныхъ, вводимыхъ интегральнымъ исчисленіемъ, то, конечно, существуетъ безконечное число видовъ этихъ трансцендентныхъ. Исторія науки обнаруживаетъ тотъ фактъ, что эти новыя трансцендентныя изучались по мѣрѣ ихъ необходимости въ прикладныхъ вопросахъ механики, астрономіи, математической физики, причемъ обнаруживается еще другой весьма важный историческій фактъ, что болѣе простыя и замѣчательныя по своимъ свойствамъ новыя трансцендентныя функціи встрѣчаются чаще въ приложеніяхъ, чѣмъ болѣе сложныя.

Особенный успѣхъ имѣла теорія интеграловъ вида

$$(1) \qquad \int f(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})\,dx,$$

въ которыхъ ирраціональность подинтегральной функціи состоитъ изъ корня квадратнаго изъ полинома третьей или четвертой степени (третья степень получается при $a = 0$). Интегралы такого вида встрѣчаются при разсмотрѣніи дуги эллипса. Въ самомъ дѣлѣ, въ § 65 гл. VI мы вычислили дугу эллипса и видѣли, что получается интегралъ вида (1), въ которомъ корень квадратный имѣетъ видъ

$$\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}.$$

Въ виду этого интегралы типа (1) получили названіе *эллиптическихъ*. Иногда подинтегральная функція f можетъ быть такъ подобрана, что интегралъ (1) берется въ конечномъ видѣ, тогда интегралъ носитъ названіе *псевдоэллиптическаго*. Это названіе подчеркиваетъ то обстоятельство, что названіе эллиптическаго дается интегралу только въ томъ случаѣ, если онъ навѣрное не берется въ конечномъ видѣ.

Liouville'ю принадлежитъ доказательство того, что существуютъ эллиптическіе интегралы, которые не берутся въ конечномъ видѣ, и, слѣдовательно, представляютъ новыя трансцендентныя. Вопросъ о разборѣ тѣхъ случаевъ, когда эллиптическій интегралъ есть псевдоэллиптическій, принадлежитъ къ числу самыхъ видныхъ вопросовъ, изучавшихся въ XIX столѣтіи. Сюда относятся замѣчательныя изслѣдованія Abel'я, Liouville'я, Чебышева и Золотарева.

§ 7. Legendre занимался впродолженіи 40 лѣтъ изученіемъ эллиптическихъ интеграловъ и написалъ большой трактатъ объ этихъ интегралахъ подъ названіемъ „Traité des fonctions elliptiques"; въ этомъ трактатѣ онъ привелъ разсмотрѣніе всѣхъ эллиптическихъ интеграловъ къ разсмотрѣнію слѣдующихъ трехъ простѣйшихъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

которые онъ назвалъ интегралами перваго, второго и третьяго вида. Интегралъ перваго вида оказался простѣйшимъ и обладаюшимъ наиболѣе важными свойствами.

Изслѣдованія Legendre'а и его предшественниковъ можно характеризовать, какъ теорію эллиптическихъ интеграловъ; современная теорія эллиптическихъ функцій начинается лишь послѣ открытій Jacobi и Abel'я. Основная мысль этой новой теоріи состоитъ въ слѣдующемъ.

Если мы будемъ приближать число k къ нулю, то интегралъ

$$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{1}$$

будетъ приближаться къ слѣдующему интегралу:

$$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\sin x; \tag{2}$$

изъ тригонометріи же извѣстно, что наиболѣе замѣчательными свойствами обладаетъ не функція $u=arc\sin x$, а обратная ей $x=\sin u$; по этому Jacobi и Abel одновременно стали изучать функцію, обратную интегралу (1), т. е., другими словами, стали разсматривать верхній предѣлъ x этого интеграла, какъ функцію отъ всей величины u интеграла, и замѣтили двоякую періодичность этой функціи. Послѣднее открытіе, несомнѣнно, надо считать самымъ важнымъ открытіемъ XIX столѣтія въ математикѣ.

Въ § 4 гл. VII мы видѣли примѣры періодическихъ функцій и замѣтили, что теорія логариѳмовъ и тригонометрія представляютъ одну и ту же доктрину, которую можно назвать теоріей функцій съ однимъ періодомъ. Съ другой стороны, какъ показалъ Jacobi, не существуетъ однозначныхъ функцій съ тремя различными періодами. Отсюда понятно, что теорія эллиптическихъ функцій, какъ функцій двояко-періодическихъ, должна была обратиться въ весьма важную, новую послѣ тригонометріи, главу анализа.

Функціи Jacobi.

§ 8. Итакъ, разсмотримъ интегралъ

(1) $$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Если мы введемъ новую перемѣнную φ при помощи равенства

(2) $$\sin\varphi = x,$$

то получимъ

(3) $$u=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Функцію, обратную этому интегралу (3), Jacobi называетъ *амплитудой* и обозначаетъ

$$\varphi = am\, u.$$

Тогда, принимая во вниманіе формулу (2), мы получимъ

(4) $$x=\sin am\, u.$$

Итакъ, верхній предѣлъ x интеграла (1), разсматриваемый какъ функція отъ u, представляетъ собою *синусъ амплитуды* u. Jacobi вводитъ еще двѣ функціи

(5) $$\sqrt{1-x^2}=\cos am\, u,$$

(6) $$\sqrt{1-k^2x^2}=\Delta\, am\, u.$$

§ 9. Какъ было указано въ § 50 гл. I, Euler при изученіи механической задачи о притяженіи точки къ двумъ неподвижнымъ центрамъ пришелъ къ замѣчательной теоремѣ, относящейся къ эллиптическимъ функціямъ, которая въ настоящее время носитъ названіе *теоремы сложенія*.

Пусть задано уравненіе

(1) $$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0.$$

Вводя новую перемѣнную t при помощи равенствъ

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

мы получимъ черезъ возвышеніе равенствъ (2) въ квадратъ и дифференцированіе слѣдующія равенства

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(1+k^2)y + 2k^2y^3,$$

откуда

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 2k^2xy(x^2-y^2).$$

Съ другой стороны

$$y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2).$$

Далѣе

$$\frac{y\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2y}{dt^2}}{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}} = -\frac{2k^2xy\left(y\dfrac{dx}{dt} + x\dfrac{dy}{dt}\right)}{1-k^2x^2y^2},$$

откуда получаемъ

$$\frac{d}{dt}\left\{lg\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{lg(1-k^2x^2y^2)\right\};$$

интегрируя, находимъ

$$\frac{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}}{1-k^2x^2y^2} = c,$$

гдѣ c постоянная величина.

Это равенство, на основаніи формулъ (2), можно переписать окончательно такъ:

(3) $$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=c.$$

§ 10. Интегрируя дифференціальное уравненіе (1) § 9, получимъ трансцендентное рѣшеніе

(1) $$u+v=\alpha,$$

гдѣ

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$v=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

а α постоянная величина. Легко видѣть, съ другой стороны, что формула (3) предыдущаго §-а можетъ быть представлена въ видѣ

(2) $$\frac{\sin am\, u.\cos am\, v.\Delta\, am\, v+\sin am\, v.\cos am\, u.\Delta\, am\, u}{1-k^2(\sin am\, u)^2(\sin am\, v)^2}=\beta,$$

гдѣ черезъ β обозначена постоянная. Для полученія связи между постоянными α и β положимъ въ равенствахъ (1) и (2) $v=0$, тогда

(3) $$u=\alpha;$$

съ другой стороны, когда приближается къ нулю верхній предѣлъ y интеграла, то величина интеграла v приближается также къ нулю, и мы имѣемъ при $y=0$ также $v=0$; значитъ, функція

$$y=\sin am\, v$$

обращается въ нуль при $v=0$, а функціи

$$\cos am\, v=\sqrt{1-y^2},$$

$$\Delta\, am\, v=\sqrt{1-k^2y^2}$$

обращаются въ единицы, и мы получаемъ изъ уравненія (2)

(4) $$\beta=\sin am\, u.$$

Равенства (3) и (4) даютъ слѣдующую зависимость между постоянными α и β:

$$\beta=\sin am\, \alpha,$$

откуда получаемъ слѣдующую формулу:

(5) $$\sin am\,(u+v)=$$

$$=\frac{\sin am\, u.\cos am\, v.\Delta\, am\, v+\sin am\, v\cos am\, u.\Delta\, am\, u}{1-k^2(\sin am\, u)^2(\sin am\, v)^2}.$$

Послѣдняя формула представляетъ не что иное, какъ формулу сложенія функціи *sin am u*.

§ 11. Разсмотрѣніе эллиптическихъ функцій, какъ функцій обратныхъ эллиптическому интегралу, привело Abel'я и Jacobi къ важному открытію, именно къ открытію двоякой періодичности эллиптическихъ функцій.

Подъ функціей, имѣющей два періода ω_1 и ω_2, мы разумѣемъ такую функцію $f(x)$, которая удовлетворяетъ двумъ тождествамъ

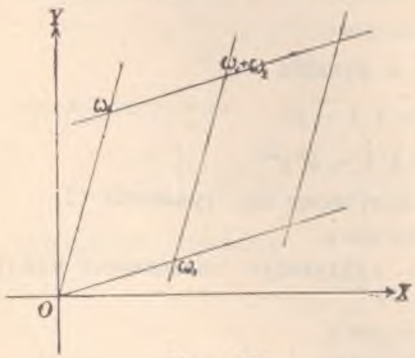
$$f(x+\omega_1)=f(x),\quad\quad (1)$$
$$f(x+\omega_2)=f(x).$$

Очевидно, что изъ тождествъ (1) можно вывести такое общее

$$f(x+m\,\omega_1+n\,\omega_2)=f(x),$$

гдѣ m и n суть произвольныя цѣлыя числа.

Интересно, что два періода функціи не могутъ быть оба вещественные, если мы хотимъ, чтобы эти періоды можно было разсматривать, какъ дѣйствительно различные, а также не могутъ имѣть вещественнаго отношенія $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Отсылая за подробностями къ моей книгѣ „Элементы теоріи эллиптическихъ функцій", мы скажемъ только, что въ случаѣ вещественнаго отношенія $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ функція приводится или къ постоянному числу, или къ функціи съ однимъ вещественнымъ періодомъ.



Черт. 119.

Если мы будемъ разсматривать комплексныя значенія перемѣннаго независимаго, то двоякая періодичность получаетъ слѣдующее замѣчательное геометрическое толкованіе.

Если мы построимъ (черт. 119) на плоскости точки, соотвѣтствующія тремъ числамъ ω_1, ω_2 и $\omega_1+\omega_2$, то эти три точки вмѣстѣ съ началомъ координатъ образуютъ, очевидно, параллелограммъ, который носитъ названіе *параллелограмма періодичности*. Тогда плоскость разбивается прямыми, параллельными сторонамъ этого параллелограмма на безчисленное множество равновеликихъ параллелограммовъ, и двойная періодичность выражается въ томъ, что достаточно разсматривать значенія функціи въ одной изъ этихъ фигуръ, ибо эти значенія повторяются въ соотвѣтственныхъ точкахъ остальныхъ параллелограммовъ.

Функціи Θ.

§ 12. Jacobi при детальномъ серьезномъ изученіи эллиптическихъ функцій пришелъ къ своимъ знаменитымъ функціямъ Θ (Theta). Къ нахожденію этихъ функцій мы придемъ естественнымъ путемъ, если пожелаемъ выразить двояко-періодическія функціи рядами, расположенными по функціямъ съ однимъ періодомъ. Такими рядами являются ряды вида

$$(1) \qquad \sum C_n e^{\frac{2\pi i n x}{\omega}},$$

носящіе названіе *рядовъ Fourier*. О рядахъ Fourier будетъ сказано далѣе болѣе подробно.

Сумма (1) распространяется на всѣ положительныя и отрицательныя значенія цѣлаго значка n и представляетъ, очевидно, функцію, имѣющую періодъ ω. Можно себѣ поставить задачу, искать коэффиціенты C_n такимъ образомъ, чтобы рядъ получилъ другой періодъ ω_1. Эта задача оказывается невозможной, если мы хотимъ представить двояко-періодическія функціи однимъ только рядомъ; возможно подобрать коэффиціенты двухъ рядовъ вида (1) такимъ образомъ, чтобы отношеніе этихъ рядовъ кромѣ періода ω имѣло еще періодъ ω_1.

Такимъ путемъ мы приходимъ къ замѣчательнымъ по своимъ свойствамъ функціямъ Θ Jacobi. Послѣдній представилъ свои функціи $\sin am\, u$, $\cos am\, u$ и $\Delta am\, u$ въ видѣ дробей, числители и знаменатели которыхъ суть функціи Θ. Rosenhain замѣтилъ, что функціи Θ встрѣчались уже въ работахъ самаго Fourier по теоріи теплоты, но, конечно, Fourier разсматривалъ ихъ съ совершенно другой точки зрѣнія.

§ 13. Итакъ, будемъ строить выраженіе функціи съ двумя періодами ω_1 и ω_2, слѣдуя методѣ Hermite'а. Введемъ выраженіе

$$q = e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

и будемъ предполагать коэффиціентъ при i въ отношеніи $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ положительнымъ. Разсмотримъ рядъ

$$(1) \qquad \Phi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m q^{\frac{m^2}{j}} e^{\frac{2m\pi i z}{\omega_1}},$$

гдѣ j цѣлое число, а коэффиціенты A_m удовлетворяютъ условію

$$(2) \qquad A_{m+j} = A_m.$$

Условіе (2) показываетъ, что существуетъ только j различныхъ коэффиціентовъ

$$A_0, A_1, A_2 \, . \; . \; . \, A_{j-1},$$

остальные же повторяются періодически.

Легко убѣдиться, что $\Phi(z)$ будетъ голоморфная функція отъ z, имѣющая періодъ ω_1. Для этой цѣли покажемъ, что рядъ (1) сходится при всякомъ комплексномъ значеніи z. Въ самомъ дѣлѣ, извлекая корень степени m изъ m-го члена при m положительномъ, получимъ

$$\sqrt[m]{A_m}\, q^{\frac{m}{j}} e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}};$$

здѣсь

$$lim \left\{ q^{\frac{m}{j}} \right\} = 0,$$

ибо на основаніи условія, которому удовлетворяетъ отношеніе періодовъ, имѣемъ

$$|q| < 1,$$

выраженіе же $\sqrt[m]{A_m}$ сохраняетъ всегда конечное число различныхъ значеній. Слѣдовательно, половина ряда (1), соотвѣтствующая положительнымъ m, будетъ представлять рядъ сходящійся. Совершенно подобнымъ же образомъ докажемъ сходимость другой половины ряда (1).

§ 14. Возьмемъ функцію

$$\varphi(z) = e^{\frac{j i \pi z^2}{\omega_1 \omega_2}};$$

тогда, если мы умножимъ на $\varphi(z)$ функцію $\Phi(z)$ § 13, то эта послѣдняя потеряетъ періодъ ω_1, потому что функція $\varphi(z)$ не имѣетъ періода ω_1. Легко убѣдиться, однако, что отъ такого умноженія функція $\Phi(z)$ пріобрѣтаетъ другой періодъ ω_2; въ самомъ дѣлѣ

$$\varphi(z)\Phi(z)=\sum A_m e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{m^2}{j}+\frac{2mi\pi z}{\omega_1}+ji\frac{\pi z^2}{\omega_1\omega_2}}=$$

$$=\sum A_m e^{\frac{ji\pi}{\omega_1\omega_2}\left(z+\frac{m\omega_2}{j}\right)^2}=\sum A_m\varphi\left(z+\frac{m\omega_2}{j}\right).$$

Но такъ какъ рядъ распространяется на всѣ цѣлыя значенія m отъ $-\infty$ до $+\infty$, то мы имѣемъ право подъ знакомъ суммы вмѣсто значка m написать $m+j$, слѣдовательно,

$$\varphi(z)\Phi(z)=\sum A_{m+j}\varphi\left(z+\omega_2+\frac{m\omega_2}{j}\right),$$

или, на основаніи условія (2) § 13,

$$\varphi(z)\Phi(z)=\sum A_m\varphi\left(z+\omega_2+\frac{m\omega_2}{j}\right),$$

т. е. функція $\varphi(z)\Phi(z)$ имѣетъ періодъ ω_2.

Произвольные коэффиціенты $A_0, A_1, \ldots A_{j-1}$ можно выбирать безчисленнымъ числомъ способовъ. Предположимъ, что выбраны для этихъ коэффиціентовъ двѣ системы значеній, которыя даютъ два значенія Φ_1 и Φ_2 для функціи $\Phi(z)$. Очевидно, что отношеніе

$$(1)\qquad \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$$

будетъ функціей, имѣющей два періода ω_1 и ω_2. Въ самомъ дѣлѣ, дробь (1) имѣетъ періодъ ω_1, ибо числитель и знаменатель имѣютъ этотъ періодъ; но эта дробь имѣетъ также періодъ ω_2, потому что ее можно переписать въ видѣ

$$\frac{\varphi\Phi_1}{\varphi\Phi_2}.$$

Abel'евы функціи.

§ 15. *Abel'евыми интегралами* называются интегралы вида

$$\int F(x,y)\,dx,$$

гдѣ y есть алгебраическая функція отъ x. Названіе Abel'евыхъ эти интегралы получили вслѣдствіе того, что Abel'емъ была найдена знаменитая теорема, составляющая для Abel'евыхъ интеграловъ обобщеніе теоремы Euler'a, относящейся къ эллиптическимъ.

Эллиптическіе интегралы представляютъ, очевидно, частный случай Abel'евыхъ, когда

$$y = \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + \partial x + e}.$$

§ 16. При помощи функцій Θ, какъ мы видѣли выше, рѣшается задача о нахожденіи выраженія для двояко-періодической функціи. Можно сказать, что такимъ образомъ рѣшается задача обращенія эллиптическаго интеграла, ибо функція, обратная эллиптическому интегралу, есть, какъ показали Abel и Jacobi, функція двояко-періодическая. Goepel и Rosenhain ввели въ разсмотрѣніе новыя функціи, которыя они назвали функціями Θ отъ двухъ аргументовъ, и которыя представляютъ собою непосредственное обобщеніе функцій Θ Jacobi. Эти функціи дали возможность представить въ явномъ видѣ функціи, обратныя гиперэллиптическимъ интеграламъ, т. е. интеграламъ вида

$$\int f(x, \sqrt{R(x)})\,dx,$$

гдѣ R (x) полиномъ пятой или шестой степени. Эти функціи Goepel'я и Rosenhain'a, будучи функціями отъ двухъ аргументовъ, допускаютъ четыре системы періодовъ.

§ 17. Weierstrass обобщилъ задачу на случай гиперэллиптическихъ интеграловъ болѣе высокаго порядка. Наконецъ, Riemann сдѣлалъ блестящее открытіе, состоящее въ томъ, что при помощи обобщеныхъ функцій Θ можно рѣшить общую задачу обращенія Abel'евыхъ интеграловъ. Такимъ образомъ, Riemann сводитъ теорію Abel'евыхъ интеграловъ на разсмотрѣніе функцій имъ обратныхъ, которыя носятъ названіе Abel'евыхъ.

Не имѣя возможности въ нашемъ краткомъ изложеніи касаться болѣе подробно теоріи Abel'евыхъ функцій, мы укажемъ только, въ чемъ состоятъ обобщенныя функціи Θ.

Пусть имѣется p комплексныхъ перемѣнныхъ

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_p$$

и p^2 постоянныхъ

$$\omega_{\kappa l} = \omega_{l\kappa} = \omega'_{\kappa l} + i\,\omega''_{\kappa l},$$

гдѣ числа k и l пробѣгаютъ всѣ значенія $1, 2, \ldots p$. Изъ этихъ постоянныхъ, очевидно, различныхъ только $\frac{p(p+1)}{2}$. Кромѣ того, пусть разсматриваются p цѣлыхъ чиселъ

$$r_1, r_2, \ldots r_p,$$

измѣняющихся отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Разсмотримъ квадратичную форму

$$\varphi = \sum_{\kappa=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \omega_{\kappa, l}\, r_\kappa r_l$$

относительно этихъ чиселъ r_i, а также линейную форму

$$\psi = \sum_{\mu=1}^{p} 2\, r_\mu z_\mu.$$

Функція Θ, о которой идетъ рѣчь, опредѣляется равенствомъ

$$\Theta(z_1, \ldots z_p) = \sum e^{\pi i(\varphi+\psi)},$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ возможныя цѣлыя положительныя и отрицательныя значенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ r_i.

При помощи этихъ функцій Θ воспроизводятся функціи отъ p аргументовъ, имѣющія $2\,p$ системъ періодовъ. Подъ системой періодовъ разумѣемъ здѣсь систему чиселъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p,$$

которыя удовлетворяютъ тождеству

$$\Theta(z_1+\alpha_1, z_2+\alpha_2, \ldots z_p+\alpha_p) = \Theta(z_1, z_2, \ldots z_p).$$

Теорія опредѣленныхъ интеграловъ.

§ 18. Хотя большинство интеграловъ отъ функцій представляютъ новыя транцендентныя и не берутся въ конечномъ видѣ, тѣмъ не менѣе опредѣленные интегралы часто вычисляются безъ особеннаго труда даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда неопредѣленный интегралъ мы выразить не умѣемъ. Совокупность пріемовъ вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ въ тѣхъ случаяхъ, когда неопредѣленный не берется въ конечномъ видѣ, представляетъ весьма важную часть интегральнаго исчисленія, носящую названіе теоріи опредѣленныхъ интеграловъ.

Существуетъ рядъ пріемовъ вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ, въ которыхъ чаще всего фигурируетъ дифференцированіе и интегрированіе подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ примѣра—опредѣленнаго интеграла

$$A=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

имѣющаго приложеніе въ теоріи вѣроятностей. Для вычисленія его приходится прибѣгать къ искусственнымъ пріемамъ, ибо неопредѣленный интегралъ

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

не берется въ конечномъ видѣ.

Измѣняя подъ знакомъ интеграла обозначеніе перемѣнной независимой, мы получимъ

$$A=\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy.$$

Далѣе

$$(1)\qquad A^2=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Возьмемъ (черт. 120) прямоугольныя оси координатъ въ пространствѣ и разсмотримъ кривую

$$y=0,\ z=e^{-x^2},$$

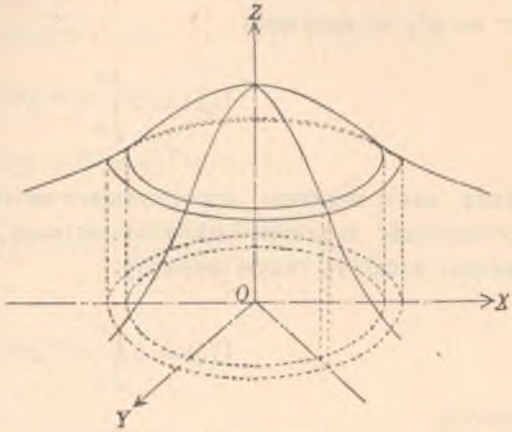
расположенную въ плоскости XZ. Если мы будемъ вращать эту кривую около оси z-овъ, то получимъ поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$(2)\qquad z=e^{-x^2-y^2}.$$

Двойной интегралъ

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

представляетъ собою, очевидно, четверть объема, заключеннаго между поверхностью (2) и плоскостью XY. Этотъ объемъ можно вычислить, какъ сумму объемовъ цилиндрическихъ слоевъ, основанія которыхъ на плоскости XY представляютъ кольцевыя площади между кругами радіусовъ r и $r+dr$, высота же цилиндра есть e^{-r^2}, гдѣ $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Такъ какъ кольцевыя основанія цилиндра будутъ равны $2\pi r\,dr$, а высота цилиндра e^{-r^2}, то мы получаемъ по формулѣ (1)



Черт. 120.

$$A^2=\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}\,2\pi r\,dr=\frac{\pi}{4}\Big[-e^{-r^2}\Big]_0^\infty=\frac{\pi}{4}\Big[-0+1\Big]=\frac{\pi}{4},$$

откуда искомый интегралъ получаетъ значеніе

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Euler'овы интегралы.

§ 19. Подъ *Euler'овымъ интеграломъ перваго рода* разумѣется функція

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{1}$$

гдѣ p и q положительныя числа. Легко было бы убѣдиться, что интегралъ (1) обращается въ ∞, если p или q было бы отрицательнымъ.

Euler'овымъ интеграломъ второго рода называется выраженіе

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx.$$

§ 20. Всякій Euler'овъ интегралъ перваго рода выражается черезъ интегралы второго рода.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы въ выраженіи $\Gamma(p)$ перемѣнимъ x на y^2, то получимъ

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, y^{2p-1}\, dy;$$

такъ какъ величина опредѣленнаго интеграла не зависитъ отъ обозначенія подинтегральной перемѣнной, то можно будетъ, очевидно, написать такую формулу:

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, x^{2q-1}\, dx,$$

откуда

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, x^{2q-1}\, y^{2p-1}\, dx\, dy.$$

Вторая часть представляетъ собою объемъ между поверхностью $z = e^{-x^2-y^2}\, x^{2q-1}\, y^{2p-1}$ и плоскостью $z = 0$.

Введя полярныя координаты получимъ

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, x^{2q-1}\, y^{2p-1}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}\, r^{2q+2p-2}\, (\cos\vartheta)^{2q-1}\, (\sin\vartheta)^{2p-1}\, r\, d\vartheta\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{2q-1}\, (\sin\vartheta)^{2p-1}\, d\vartheta \int_0^\infty e^{-t}\, t^{q+p-1}\, dt,$$

гдѣ $t = r^2$. Итакъ

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,.\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{2q-1}\, (\sin\vartheta)^{2p-1}\, d\vartheta.$$

Полагая $sin^2 \vartheta = x$, получимъ

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\, \vartheta)^{2q-1} (sin\, \vartheta)^{2p-1}\, d\vartheta = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

откуда окончательно

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = B(p, q)\,\Gamma(p+q),$$

или

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

ГЛАВА IX.

Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

§ 1. Въ исторіи возникновенія дифференціальнаго исчисленія на ряду съ задачей о проведеніи касательныхъ къ линіямъ сыграли большую роль вопросы о нахожденіи наибольшихъ и наименьшихъ значеній функцій, такъ называемыя *задачи на maxima и minima.* Нашъ знаменитый математикъ П. Л. Чебышевъ въ слѣдующихъ словахъ характеризовалъ роль этихъ задачъ въ математикѣ.

„Практическая дѣятельность человѣка представляетъ чрезвычайное разнообразіе, и для удовлетворенія всѣхъ ея требованій, разумѣется, недостаетъ наукѣ многихъ и различныхъ методъ. Но изъ нихъ особенную важность имѣютъ тѣ, которыя необходимы для различныхъ видоизмѣненій одной и той же задачи, общей для всей практической дѣятельности человѣка: *какъ располагать средствами своими для достиженія по возможности большей выгоды.*

Эта задача, чисто практическаго характера, имѣетъ особенную важность и для теоріи: всѣ законы, опредѣляющіе движеніе матеріи вѣсомой и невѣсомой, представляютъ рѣшеніе задачъ этого рода. Нельзя не замѣтить особенно благотворнаго вліянія ихъ на развитіе наукъ математическихъ.

До изобрѣтенія анализа безконечно малыхъ извѣстны были только частные примѣры рѣшенія такихъ задачъ; но въ этихъ рѣшеніяхъ уже было начало новой, важнѣйшей отрасли математическихъ наукъ, извѣстной подъ именемъ *дифференціальнаго исчисленія.*

Но открытіемъ дифференціальнаго исчисленія и рѣшеніемъ задачъ, подобныхъ тѣмъ, которыя привели къ открытію его, предметъ этотъ не былъ исчерпанъ вполнѣ, и это обнаружилось въ изысканіяхъ самого Newton'a: вопросъ имъ рѣшенный, объ опредѣленіи формы, при которой тѣло, двигаясь въ жидкости, наименѣе встрѣчаетъ препятствія—представляетъ задачу *наибольшихъ и наименьшихъ величинъ*, существенно отличную отъ подобныхъ задачъ, разрѣшимыхъ по способу дифференціальнаго исчисленія. Общій способъ рѣшенія задачъ этого рода, особенно важныхъ для теоретической механики, привелъ къ открытію еще новаго исчисленія—извѣстнаго подъ именемъ *варіаціоннаго*.

Несмотря на такое развитіе математики въ отношеніи теоріи *наибольшихъ и наименьшихъ величинъ*, легко замѣтить, что практика идетъ дальше и требуетъ рѣшенія задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ еще новаго рода, существенно отличныхъ отъ тѣхъ двухъ, которыя рѣшаются въ дифференціальномъ и варіаціонномъ исчисленіяхъ.

Какъ примѣръ вопросовъ такого рода и рѣшенія ихъ, мы можемъ представить изысканія наши о параллелограммѣ Уатта, напечатанныя въ Mémoires des Savants étrangers нашей академіи за 1854 г."

Будучи совершенно согласенъ съ приведенными мыслями Чебышева, я рѣшилъ посвятить задачамъ на maxima и minima особую главу.

Не имѣя возможности дать обстоятельное изложеніе столь обширной науки, я ограничусь лишь поясненіемъ на рядѣ задачъ главныхъ вопросовъ на maxima и minima.

Обыкновенныя задачи на maxima и minima функцій одной перемѣнной.

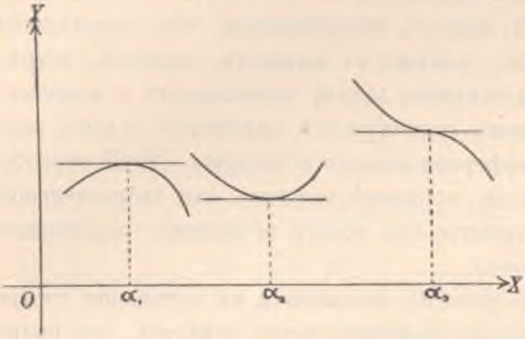
§ 2. Мы видѣли уже, что, если производная заданной функціи $f(x)$ непрерывная, то значенія x, которыя могутъ давать maximum или minimum функціи, удовлетворяютъ уравненію

$$f'(x)=0. \tag{1}$$

Итакъ, задача сводится къ нахожденію всѣхъ вещественныхъ корней $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ уравненія (1). Послѣ нахожденія корней вычисляются значенія

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots f(\alpha_k). \tag{2}$$

Maxima и minima функціи могутъ существовать только среди этихъ значеній (2). Значеніе $f(\alpha_1)$ будетъ представлять maximum, если при $x = \alpha_1$ вогнутость кривой $y = f(x)$ обращена въ сторону отрицательныхъ y-овъ (черт. 121 и § 34 гл. VI). Значеніе $f(\alpha_2)$ будетъ представлять minimum, если при $x = \alpha_2$ вогнутость кривой обращена въ сторону положительныхъ y-овъ, и наконецъ, $f(\alpha_3)$ не будетъ ни maximum, ни minimum функціи, если около значенія $x = \alpha_3$ существуетъ перегибъ кривизны.



Черт. 121.

§ 3. Вопросъ о направленіи вогнутости рѣшается разсмотрѣніемъ второй производной $f''(x)$. Придется подставить испытываемый корень α уравненія (1) предыдущаго §-а въ эту вторую производную. Тогда если

$$f''(\alpha) < 0,$$

то на основаніи сказаннаго въ § 34 гл. VI будетъ существовать maximum функціи, если же $f''(\alpha) > 0$, то будетъ существовать minimum функціи, и, наконецъ, если бы случилось $f''(\alpha) = 0$, то надо перейти къ разсмотрѣнію производныхъ высшихъ порядковъ.

§ 4. Задача. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра найти наибольшій по площади.*

Обозначимъ черезъ $2a$ заданный периметръ прямоугольника. Тогда очевидно, что, если мы назовемъ черезъ x и y его не параллельныя стороны, то будемъ имѣть

$$x + y = a,$$

откуда

$$y = a - x;$$

площадь будетъ опредѣляться по формулѣ

$$x(a - x).$$

Итакъ, приходится разсматривать функцію

$$f(x) = x(a - x);$$

приравниваемъ нулю ея производную $f'(x) = a - 2x$.

О желѣзнодорожной статистикѣ.

Каждый отдѣлъ Статистики изслѣдуетъ жизнь человѣческаго общества, проявленія народной жизни той или другой группы людей, доискиваясь такихъ истинъ, какія могутъ быть открыты путемъ точнаго количественнаго анализа наблюдаемыхъ явленій. Тѣ спеціальные отдѣлы Статистики, какіе привлекаютъ вниманіе учащихся въ Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ, относятся не къ области проявленій жизни умственной или нравственной, а къ сферѣ хозяйственной, или экономической жизни, къ области производства, передачи (транспорта) и потребленія матеріальныхъ благъ. Средства транспорта въ видѣ перевоза ставшихъ уже товарами предметовъ потребленія на пароходахъ по водѣ и въ вагонахъ по желѣзнымъ дорогамъ—изобрѣтеніе почти одновременное съ изобрѣтеніемъ и установкою правилъ статистическаго счисленія, учета и выводовъ заключеній изъ чиселъ, получаемыхъ при помощи переписей и записей однородныхъ явленій. Изъ исторіи развитія общей статистической теоріи мы знаемъ, что способъ полученія и разработки точныхъ знаній имѣетъ возрастъ не болѣе 2-2$^{1}/_{2}$ столѣтій послѣдняго времени, при чемъ техника собиранія свѣдѣній и использованія ихъ во всѣхъ государствахъ разныхъ народовъ получила общее признаніе лишь въ послѣдніе 60-70 лѣтъ. За этотъ же періодъ времени были изобрѣтены и усовершенствованы способы передвиженія товаровъ при помощи паровыхъ машинъ.

Статистика, какъ извѣстно, работаетъ надъ однороднымъ числовымъ матеріаломъ, собраннымъ за извѣстный періодъ, на извѣстномъ пространствѣ по какому-либо отдѣлу человѣческой дѣятельности. Поэтому, говоря о желѣзнодорожной статистикѣ, нужно отграничить предметъ нашего разсмотрѣнія какъ по объему его содержанія, такъ и въ пространственномъ и временномъ отношеніи.

По объему мы устранимъ изъ нашего разсмотрѣнія весь гужевой транспортъ по грунтовымъ и шоссейнымъ дорогамъ, регистраціи котораго еще нѣтъ, почему нѣтъ и числовыхъ выраженій для него; оставимъ въ сторонѣ также и тѣ числовыя свѣдѣнія о перевозкахъ морскихъ и рѣчныхъ, для которыхъ уже начали накопляться числовыя свѣдѣнія въ отчетахъ инспекторовъ рѣчныхъ дистанцій, обществъ торгово-транспортныхъ предпріятій, таможенныхъ учрежденій разныхъ государствъ, страховыхъ обществъ, охраняющихъ и суда и товары, перевозимыя на нихъ, отъ аварій, и другихъ учрежденій. Предметъ *желѣзнодорожной статистики* по самому заглавію ея долженъ ограничиваться тѣми числами, какія относятся только къ товарамъ и людямъ, перевозимымъ по желѣзнымъ дорогамъ, а также изложеніемъ способовъ собиранія и разработки этихъ чиселъ.

Что касается пространства, какое можетъ охватить нашъ предметъ, то конечно, при существующихъ условіяхъ нашихъ знаній, онъ долженъ бы включить весь Земной шаръ, такъ какъ теперь мы имѣемъ уже въ своемъ распоряженіи числа, изображающія передвиженіе людей и товаровъ по желѣзнымъ дорогамъ и Азіи, и Африки, и Австраліи, т. е. такія числа, о которыхъ лѣтъ 30—40 назадъ не могли даже мечтать профессора статистики, имѣвшіе болѣе подробныя свѣдѣнія лишь о европейскихъ да коекакія свѣдѣнія о сѣвероамериканскихъ желѣзныхъ дорогахъ. Теперь предметъ можетъ быть шире того, что писалъ о немъ проф. политической экономіи и статистики Цѣхановецкій въ 70—80 г. прошлаго вѣка. Но чѣмъ шире объемъ какого-либо феномена, тѣмъ поневолѣ бѣднѣе его содержаніе. Слѣдовательно относительно статистическихъ данныхъ міроваго желѣзнодорожнаго транспорта мы можемъ ограничиться самыми общими свѣдѣніями о протяженіи ж. д. путей и лишь нѣкоторыми числами, выражающими общую сумму работы ихъ; для европейскихъ желѣзно-дорожныхъ путей можно будетъ дать болѣе подробныя свѣдѣнія, а для русскихъ— и исторію ихъ, а также и исторію ж. д. статистики и свѣдѣнія по технической сторонѣ составленія таблицъ желѣзно-дорожной статистики.

Тоже самое можно сказать и о времени, какого будетъ касаться наше разсмотрѣніе предмета: для всеобщей исторіи ж. д. статистики можно ограничиться наиболѣе важными пунктами ея развитія съ половины прошлаго столѣтія, а для русской сѣти желѣзныхъ дорогъ и ихъ статистики прійдется познакомиться конечно съ содержаніемъ, а также и формами статистическихъ изданій, какія выработаны къ настоящему времени, а также и способами полученія данныхъ по желѣзнодорожной статистикѣ и пріемами ихъ разработки.

Обратимся къ исторіи желѣзныхъ дорогъ отъ ихъ возникновенія, а слѣдовательно и къ исторіи этой отрасли Статистики, такъ какъ желѣзныя дороги, возникшія въ позднѣйшее время, сразу установили довольно подробную систему записей, которыя дали и матеріалъ для желѣзнодорожной статистики. Первая желѣзная дорога на Земномъ шарѣ была открыта для общаго пользованія 17 сентября 1830 года между Манчестеромъ и Ливерпулемъ въ Англіи; но нельзя сказать, чтобы раньше не было примѣненія хотя бы отдѣльныхъ частей того, что составляетъ теперь желѣзную дорогу. Рельсы, сначала деревянные, а потомъ желѣзные употреблялись уже для конной и человѣческой тяги при перевозкѣ руды и каменнаго угля въ той же Англіи еще со второй половины XVIII в., а еще гораздо раньше въ копяхъ Гарца, въ Рудныхъ горахъ и въ Тиролѣ. Въ началѣ XIX вѣка въ Англіи такихъ дорогъ съ конною тягою было 29 съ общимъ протяженіемъ въ 256 километровъ. Первый паровозъ, построенный Джорджемъ Стефенсономъ, для частныхъ надобностей употреблялся уже въ 1814 г. въ Киллингвортѣ. Конныя желѣзныя дороги съ подвижнымъ составомъ, напоминающимъ нынѣшніе товарные вагоны, работали главнымъ образомъ для подвозки каменнаго угля въ Лондонѣ еще съ 1801. Паровую же силу для общаго пользованія желѣзными дорогами въ первый разъ примѣнили въ 1830 году. И въ настоящее время въ старинныхъ гостинницахъ Западной Европы можно еще встрѣтить гравюру того времени, изображающую первый отходъ ж. д. поѣзда подъ управленіемъ Стефенсона. Кучера пріѣхавшихъ на это диво лордовъ изображены на этой гравюрѣ на козлахъ каретъ, фаэтоновъ, кэбовъ и ландо съ презрительными улыбками по адресу деревянныхъ некрашенныхъ и невзрачныхъ вагоновъ. Примѣненіе пара при началѣ существованія желѣзныхъ дорогъ относилось въ слов896выраженіяхъ тогдашняго времени одинаково и къ воднымъ параходомъ и къ сухопутному сообщенію. Примѣромъ въ русскомъ языкѣ можетъ служить извѣстная пѣсня, на слова которой мелодію и музыку написалъ Глинка:

„Дымъ столбомъ, кипитъ, дымится *параходъ*"... и далѣе

„И быстрѣе шибче воли *поѣздъ* мчится въ чистомъ полѣ“.

Какъ всякое новое изобрѣтеніе, желѣзная паровая дорога встрѣчена была недружелюбно тѣми, чьи интерессы она подрывала. Какъ у насъ извозчики Московской Ямской слободы, на обязанности которыхъ лежалъ перевозъ высокопоставленныхъ лицъ изъ изъ Москвы въ СПБ. и обратно, нѣсколько разъ срывали шпалы и рельсы строившейся дороги между двумя столицами, такъ и въ Англіи владѣльцы шоссе и каналовъ, собиравшіе за провозъ товаровъ и людей по устроеннымъ ими улучшеннымъ путямъ сообщенія немалыя суммы, сильно возставали противъ новшества. Но не то отношеніе къ себѣ встрѣтило новое изобрѣтеніе среди капиталистовъ, подававшихъ въ парламентъ просьбы о разрѣшеніи постройки новыхъ и новыхъ ж. дорогъ. Одна за другою составлялись компаніи, разсчитывавшія на большіе дивиденды отъ предпріятій новаго вида. Таково было на первыхъ порахъ, какъ называютъ англичане, „желѣзнодорожное одуреніе“ (Railway-mania), что составлявшіяся компаніи готовы были нести такъ называвшіеся тогда „парламентскіе расходы“ по нѣсколько тысячъ фунтовъ стерлинговъ за 1 милю предполагавшейся къ постройкѣ дороги, лишь бы получить концессію на организацію новаго прибыльнаго предпріятія. Англійское правительство, отдавая постройку дорогъ и эксплоатацію ихъ частной предпріимчивости, издало только одинъ законъ, требовавшій пониженія тарифовъ въ томъ случаѣ, если эти частныя компаніи получатъ дивидендъ болѣе 10 % на затраченный капиталъ; во всемъ остальномъ компаніямъ предоставлялась полная свобода: онѣ могли возить въ некрытыхъ вагонахъ, поѣзда отправлять въ неопредѣленное время, за перевозку кладей назначать какія угодно ставки. А такъ какъ въ 30-хъ годахъ въ Англіи разрѣшено было много линій разнымъ компаніямъ, соперничавшимъ между собою, то и пассажиры и грузоотправители уже къ концу 30-тыхъ годовъ прошлаго столѣтія возстали противъ произвола частныхъ компаній. Въ 1842 году вышелъ законъ о подчиненіи движенія по ж. дорогамъ правительственному надзору; они должны были давать отчеты и о числѣ перевезенныхъ пассажировъ, и о количествѣ перевезенныхъ товаровъ, и о числѣ несчастныхъ случаевъ, и т. п. Нѣсколько позже (1844) правительство стало требовать, чтобы компаніи пускали не менѣе одного поѣзда въ сутки съ крытыми вагонами для пассажировъ а также того, чтобы скорость движенія была не меньшею опредѣленной парламентомъ.

Въ 1858 были установлены одни и тѣже помильныя тарифныя ставки для всѣхъ компаній, число которыхъ сначала росло быстро, а затѣмъ появленіе новыхъ компаній прекратилось. Сверхъ того, когда доходы нѣкоторыхъ изъ нихъ понизились съ 15% до 3%, они по соглашенію пришли къ необходимости сліянія въ крупныя компаніи. Такъ 209 отдѣльныхъ англійскихъ желѣзнодорожныхъ обществъ слились въ 7 главныхъ. Въ 1888 году создано было наконецъ общее для всѣхъ желѣзныхъ дорогъ правительственное учрежденіе, объединившее правила движенія по англійскимъ дорогамъ.

При другихъ условіяхъ возникали ж. дороги во Франціи, гдѣ общій планъ сѣти желѣзныхъ дорогъ былъ выработанъ сначала правительствомъ, а затѣмъ (съ 1842) ж. дороги были отданы на постройку частнымъ обществамъ, при чемъ срокъ концессій здѣсь былъ гораздо большій, чѣмъ въ Англіи (вм. 21 года,—99 лѣтъ). Хотя правительство французское брало на себя большую половину расходовъ на сооруженіе сѣти, но и здѣсь въ 50-хъ годахъ по бездоходности нѣкоторыхъ частныхъ дорогъ происходило сліяніе мелкихъ компаній въ крупныя.

Въ Австро-Венгріи и въ мелкихъ нѣмецкихъ государствахъ, объединившихся позже въ одно союзное государство—Германскую имперію, политика сооруженія дорогъ болѣе схожа съ французскою; здѣсь контроль государственной власти касался не только дорогъ, построенныхъ на счетъ казны, но и дорогъ, устройство и эксплоатація которыхъ сданы были частнымъ обществамъ. Въ Италіи, какъ государствѣ, объединившемся въ одно цѣлое только послѣ Гаррибальди, много законодательной работы пошло на то, чтобы возникшія раньше на разнообразныхъ условіяхъ желѣзныя дороги объединились въ одну сѣть, носящую теперь названіе „королевской" (Regie rete ferroviària). Компаніямъ, возникавшимъ позже, правительство давало на постройки новыхъ дорогъ казенныя субсидіи; доходы ихъ правительство гарантировало особыми законодательными актами; наконецъ было установлено, что всѣ дороги принадлежатъ государству, которое сдаетъ ихъ въ арендное содержаніе отдѣльнымъ компаніямъ. Въ Бельгіи съ 1833 по 1844 годъ государство само строило дороги, затѣмъ давало концессіи на постройку ихъ частнымъ обществамъ, а затѣмъ выкупало у нихъ построенныя ими дороги въ государственную собственность.

Таковы были системы постройки желѣзныхъ дорогъ въ наибольшихъ государствахъ Европы, кромѣ Россіи, о которой скажемъ ниже. Въ союзныхъ государствахъ С. Америки, гдѣ начали постройку ж. дорогъ тотчасъ же послѣ Англіи, дороги строились по тому же образцу, что и въ Англіи, т. е. частными компаніями, при чемъ произволъ ихъ еще сильнѣе отражался на пользующихся дорогами. Когда же союзное правительство всѣхъ государствъ задумало пересѣчь материкъ С. Америки большою тихоокеанскою дорогою и когда наглость отдѣльныхъ желѣзнодорожныхъ компаній дошла до нестерпимости, а акціи ихъ стали падать вслѣдствіе неразсчетливости управленія и краховъ многихъ компаній, то съ 80-хъ годовъ была внесена извѣстнаго рода регламентація въ дѣло однообразія тарифныхъ ставокъ и обращенія съ пассажирами не какъ съ матеріаломъ для наживы, а какъ съ свободно-разумными гражданами. Въ этомъ грандіозномъ союзномъ государствѣ, занимающемъ по почвѣ, климату, орошенію и др. естественнымъ условіямъ существованія человѣка найлучшую часть суши Земного шара, желѣзныя дороги строились такъ быстро, что вся сѣть по своему протяженію скоро превысила то, что было построено въ Европѣ.

Въ азіатскихъ владѣніяхъ бывшей англійской ост-индской компаніи, а нынѣ огромной части государства англійскаго императора—Индіи, система постройки дорогъ была та же англійская, т. е. разсчитанная на частную предпріимчивость, при чемъ туземныя княжества также принимали участіе въ постройкѣ дорогъ. Въ Австраліи дороги строились безъ помощи тамошнихъ дикихъ туземцевъ, и дороги здѣсь—всѣ государственныя. Въ южно-американскихъ государствахъ примѣнялись разныя системы собиранія капиталовъ, нужныхъ на постройку ж. дорогъ; но вездѣ дороги эти, которыя будутъ обслуживать интересы будущихъ поколѣній, строились на акціи и облигаціи, т. е. на долги, погашать которыя поколѣніе, строившее дороги, предоставляетъ будущимъ поколѣніямъ.

Въ Африкѣ дороги начали строить лишь съ 80-хъ годовъ прошлаго столѣтія сначала французы въ Алжирѣ и Тунисѣ, затѣмъ англичане въ Капландѣ, а въ послѣднее время и буры въ расположенныхъ на С. отъ Капланда бывшихъ ихъ республикахъ; въ настоящее время англичане, и особенно нѣмцы строятъ много ж. дорогъ въ захватываемыхъ ими земляхъ въ качествѣ колоній. Объ успѣхахъ желѣзнодорожнаго строительства могутъ дать понятіе слѣдующія числа, отстоящія одно отъ другого (кромѣ послѣдняго) на 30 лѣтъ, т. е. на періодъ, считающійся продолжительностью жизни одного даннаго поколѣнія.

	Европа	Америка	Азія	Австралія	Африка	Вмѣстѣ.
1830	245 клм.	87 клм.	—	—	—	332
1860	51.920	53.950	1.354	265	446	107.935
1890	223.869	331.417	33.724	18.889	9.386	617.285
1908	325.193	504.236	94.631	28.897	30.911	983.868

Изъ этихъ чиселъ мы видимъ, что первое поколѣніе жизни людей при желѣзнодорожномъ движеніи построило болѣе 100 тысячъ километровъ желѣзныхъ дорогъ только въ Европѣ и Америкѣ; а въ остальныхъ частяхъ Земного шара за первое 30-лѣтіе появились только зачатки ж. дорогъ въ видѣ нѣсколькихъ сотенъ верстъ; слѣдующее поколѣніе ушестерило протяженіе ж. дорогъ, оставленное ему предыдущимъ, при чемъ въ Европѣ длина ихъ увеличилась въ 4 раза, а въ Америкѣ-болѣе, чѣмъ въ 6 разъ; во много разъ увеличилась длина полотна ж. дорогъ въ Азіи. За послѣднія 18 лѣтъ, т. е. за неокончившійся періодъ нынѣ живущаго поколѣнія, длина рельсовыхъ путей увеличилась втрое противъ 1890 года въ Азіи и Африкѣ, тогда какъ въ другихъ частяхъ свѣта прогрессія увеличенія была не столь значительна *). Это произошло оттого, что въ Африкѣ изъ старыхъ государствъ Египетъ и Капландъ сильно расширили свои сѣти, незначительныя въ 1890, и изъ молодыхъ государствъ бывшія Трансваальская и Оранжевая республики принялись усердно строить желѣзныя пути, а въ Азіи кромѣ Британской Остъ-Индіи, Китая, Японіи, по русскимъ владѣніямъ проведена была наибольшая въ свѣтѣ магистраль черезъ Сибирь: въ 1890 въ русской Средней Азіи не было и полуторы-тысячи километровъ рельсовъ, а къ 1908 году въ Средней Азіи было уже 4 1/2 тысячи, да въ Сибири 10 1/3 тысячъ желѣзнодорожнаго пути.

Если мы присмотримся къ общимъ итогамъ длины рельсовъ на Земномъ шарѣ, дошедшей до милліона километровъ, то увидимъ,

*) Если мы возьмемъ другіе 30-тилѣтіе періоды (отъ 1840 по 1870 и по 1900), то по исчисленію Виденфельда („Eisenbahnen-statistik") получаемъ: за первый періодъ въ Европѣ было построено около 102 тыс. клм., а за второй около 180 клм.; въ Америкѣ же было ж. дорогъ къ 1870 году—93 тыс. клм., а къ 1900—уже болѣе 402 тыс.

что больше половины ихъ всѣхъ помѣщается въ Америкѣ (Сѣверной и Южной), изъ которыхъ большая часть припадаетъ на Сѣверо-Американскую федерацію государствъ. Въ этомъ федеральномъ государствѣ изъ полумиліона километровъ всѣхъ американскихъ дорогъ вмѣщается 376 $^1/_2$ тысячъ километровъ, т. е. больше, чѣмъ во всей старой Европѣ (325 тыс.). Если въ Новомъ Свѣтѣ мы исключимъ янки, какъ смѣшанный конгломератъ разныхъ расъ и народовъ, и посчитаемъ, сколько было построено дорогъ опредѣленными націями, то увидимъ, что въ Европѣ больше всего на поприщѣ постройки ж. дорогъ работали народы германскаго племени (нѣмцы, датчане, шведы), затѣмъ—романскаго и славянскаго, а англичане по незначительности территоріи, занимаемой ими,—меньше всѣхъ; за то въ неевропейскихъ странахъ (за исключеніемъ старыхъ государствъ туземцевъ) англичане построили больше всего дорогъ (на $128,_6$ тыс. километровъ); затѣмъ слѣдуютъ народы романскаго племени ($80,_8$ тыс.), русскіе ($15,_8$) и нѣмцы (2 тыс.).

Впрочемъ послѣдніе, превратившіе въ концѣ XIX вѣка свое государство изъ Agrarstaat въ Industriestaat, стремятся къ тому, чтобы Deutschland unter den Weltvölkern заняла то же положеніе, какое прежде занимала царица морей Англія. Въ соперничествѣ съ послѣднею въ XX вѣкѣ Германія сильно увеличиваетъ свой флотъ для расширенія заокеанскаго ввоза и вывоза изъ завоеванныхъ при помощи флотскаго дессанта милліоновъ километровъ въ Африкѣ *) и желаетъ оспорить у англичанъ право проведенія ж. дороги черезъ материкъ Африки отъ Каира до Капштадта.

Если мы захотимъ представить себѣ густоту снабженія желѣзными дорогами той или другой страны, то можемъ это вычислить по отношенію протяженія одноколейныхъ, двухколейныхъ и болѣе колейныхъ, не различая ихъ (складывая вмѣстѣ длину дорогъ, а не колей) къ числу жителей и къ пространству территоріи, конечно безъ азіатскихъ и африканскихъ странъ, гдѣ мы не имѣемъ еще точныхъ чиселъ двухъ послѣднихъ категорій. Напр. мы знаемъ, что въ Китаѣ всего 200 километровъ рельсовыхъ путей, но трудно сказать, какое число жителей и какое пространство обслуживаютъ эти желѣзныя дороги, тогда какъ въ Европейскихъ странахъ, на материкѣ Австраліи и въ нѣкоторыхъ государствахъ Америки, при

*) Напр.: Германская восточная Африка—995 тыс. кв. килом., Герм. Юго-Западная Африка—835 тыс. кв. клм., Камерунъ—495 т. кв. клм. и т. д.

довольно густой сѣти ж. дорогъ мы имѣемъ и число населенія по послѣднимъ переписямъ, и пространство территоріи, и данныя о длинѣ рельсовыхъ путей (безразлично двухъ-или одно-колейныхъ). При такихъ разсчетахъ получаемъ:

Въ 1908 году:	Длина рельсовыхъ путей въ километрахъ	Длина ихъ въ километрахъ: на 1000 квадратныхъ клм.	на 100.000 жителей
Европ. Турція съ Болгаріей и Румеліей	3.248	12	33
Европейская Россія съ Финляндіей	58.843	11	55
Греція	1.241	19	51
Румынія	3.243	25	55
Италія	16.718	58	50
Нидерланды съ Люксембургомъ	3.612	94	61
Испанія	14.897	30	83
Австро-Венгрія	42.636	63	90
Франція	48.123	90	124
Великобританія съ Ирландіею	37.263	119	90
Германія	59.034	109	105
Бельгія	8.125	275	121
Швейцарія	4.539	109	136
Вообще вся Европа	325.193	33	82

Наиболѣе густо по отношенію къ пространству снабжена рельсовыми путями Бельгія, имѣвшая въ 1908 году 275 линейныхъ километровъ на 1000 квадратныхъ километровъ поверхности всей страны; по отношенію же къ числу жителей на первомъ мѣстѣ стоитъ Швейцарія, меньшая чѣмъ въ Великобританіи густота населенія которой ставитъ ее въ этомъ отношеніи выше и этой страны, и Франціи, и Бельгіи, и Германіи. Близко къ среднему по всей Европѣ обезпеченію рельсовыми путями и въ томъ и въ другомъ отношеніи стоитъ Испанія; что же касается Европейской Россіи, то показатель по отношенію къ территоріи у нея наименьшій; наименьшій же показатель количества желѣзныхъ дорогъ къ числу жителей находимъ въ Турціи. Изъ внѣевропейскихъ странъ могутъ быть указаны еще слѣдующія:

	Длина рельсовыхъ путей	На 1000 квадр. километровъ	На 100.000 жителей
Квинслэндъ	5.618	3	1158
Весь материкъ Австраліи . .	28.897	4	585
Соед. штаты Бразиліи . . .	19.211	2	129
Нов. Ю. Уэльсъ	5.587	7	408
Капская колонія	6.228	8	353
Алжиръ и Тунисъ	4.906	5	73
Аргентина	24.901	9	509
Уругвай	2.328	13	250
Викторія	5.517	24	459
С. Ам. соед. штаты	376.567	40	440

Изъ сопоставленія этихъ чиселъ съ показателями для Европы видно, что новозаселяемыя страны по отношенію къ своей территоріи снабжены гораздо слабѣе Европы, но по рѣдкости населенія каждый переселяющійся туда можетъ разсчитывать, что тамъ онъ встрѣтитъ достаточное для его нуждъ количество улучшенныхъ путей сообщенія: если на 1000 жителей приходится болѣе 1 версты *) желѣзнодорожныхъ путей только въ Швейцаріи, Франціи, Бельгіи и Германіи, а въ Евр. Россіи только около $^1/_2$ версты, то вслѣдствіе рѣдкости населенія новыхъ странъ подобный французскому показатель мы встрѣчаемъ только въ Бразиліи, а въ другихъ земляхъ на 1000 человѣкъ приходится по $2^1/_2$, $3^1/_2$, 4, даже по 5 верстъ рельсовыхъ путей и болѣе.

Посмотримъ теперь, сколько денегъ было истрачено въ нѣкоторыхъ странахъ на пріобрѣтеніе тѣхъ средствъ передвиженія, при помощи которыхъ человѣчество побѣдило препятствія, поставляемыя его дѣятельности временемъ и пространствомъ, сокративъ время передвиженія на большихъ протяженіяхъ. Въ милліонахъ рублей основной капиталъ въ желѣзныхъ дорогахъ выражался въ 1907 г. слѣдующими числами: ж. дорогъ С. Американскихъ штатовъ—31.746 миліоновъ рублей, Великобританіи и Ирландіи—12.164 мил., Германіи—7.897 мил., Франціи—6.716 м., Россіи (съ азіатскими)—6.137,$_6$ милліоновъ, Австро-Венгріи—4.474 мил.,

*) Километръ равенъ 0,937 версты.

Бельгіи—880 м., Швейцаріи 591. Если эти числа мы раздѣлимъ на длину эксплоатировавшихся въ 1907 году дорогъ, то найдемъ, что 1 километръ дорогъ имѣлъ цѣнность въ С. Амер. штатахъ—$85_{,8}$ тыс. руб., въ Великобританіи и Ирландіи—327 т. руб., въ Германіи—$139_{,8}$ т. р., во Франціи—$167_{,8}$ т., въ Австро-Венгріи—115 т. р., въ Бельгіи—$214_{,5}$ т. руб., въ Швейцаріи—134 тыс. Для другихъ странъ труднѣе найти подходящія опредѣленія стоимости дорогъ къ $190^7/_8$ году по неполнотѣ имѣющихся данныхъ. Колебанія суммы средней стоимости постройки 1 километра для поименованныхъ странъ отъ 86 до 327 тыс. рублей (при средней для всѣхъ ихъ, вмѣстѣ взятыхъ, 169 тыс. руб.) объясняются разными типами дорогъ, а также условіями постройки ихъ въ зависимости отъ стоимости матеріаловъ и рабочихъ рукъ, отъ количества подвижного состава, а еще болѣе отъ топографическихъ особенностей этихъ странъ, при которыхъ приходилось для устройства полотна дороги производить большія или меньшія земляныя работы, строить мосты черезъ рѣки, пробивать туннели сквозь твердыя массы горныхъ породъ и т. п. Большое значеніе въ этомъ отношеніи имѣетъ и прокладка второго и даже 3-го рельсоваго пути между пунктами, соединенными первою колеею, хотя въ этомъ случаѣ расходы всегда уже меньшіе, чѣмъ при прокладкѣ перваго пути.

Какъ велико число двухъ-и болѣе-колейныхъ дорогъ въ разныхъ странахъ, можно видѣть изъ слѣдующихъ чиселъ: въ Великобританіи и Ирландіи они составляютъ $55_{,6}$% всей длины желѣзнодорожныхъ путей, въ Бельгіи—$46_{,6}$%, во Франціи—$42_{,8}$%, въ Германіи—$37_{,3}$%, въ Швейцаріи—$14_{,8}$, въ Австро-Венгріи—$11_{,0}$%. Двухколейные рельсы увеличиваютъ работоспособность жел. дорогъ, а слѣдовательно и ихъ доходность. Общія суммы послѣдней не такъ интересны, какъ выраженія дохода, полученнаго на 1 километръ, или 1 версту дороги. Такія числа и потому болѣе употребительны въ желѣзнодорожной статистикѣ, что не за каждый годъ можно объединить доходы всѣхъ желѣзныхъ дорогъ; вычислить-же показатель на эксплоатируемую длину дорогъ, относительно дохода которыхъ свѣдѣнія есть, всегда можно. Вотъ количество валового дохода въ 1907 году на 1 километръ дорогъ въ тысячахъ рублей: въ Великобританіи и Ирландіи—$30_{,8}$ тыс., въ Бельгіи—$24_{,4}$ тыс., въ Германіи—$22_{,3}$ тыс., въ Швейцаріи—$17_{,5}$ тыс., во Франціи—16 тыс., въ С. Амер. штатахъ—$15_{,5}$ тыс., въ Австро-Венгріи—13 тыс.; въ Россіи въ 1906 г.—при 795 мил.

валоваго дохода и 652 мил. расхода по эксплоатаціи, на одну версту припадало по $13_{,9}$ т. р. валового и $2_{,5}$ тыс. руб. чистаго дохода (если-же принять въ разсчетъ погашеніе основного капитала, то въ конечномъ результатѣ получается дефицитъ). Въ 1895 г. расходы на содержаніе вокзаловъ, служащихъ на нихъ, въ главныхъ управленіяхъ, а также служащихъ по движенію и пр. на русскихъ дорогахъ составляли $57_{,9}$% общей суммы дохода, а въ 1906 эксплоатаціонные расходы были равны 82% валового дохода. Въ другихъ странахъ, отношеніе расходовъ къ общимъ суммамъ дохода въ 1907 г. было слѣдующее: въ С. Ам.-штатахъ расходы составляли $84_{,4}$% дохода, въ Даніи—$84_{,5}$%, въ Швеціи – 80%, въ Нидерландахъ 73% въ Норвегіи—$70_{,7}$% въ Бельгіи—$68_{,8}$%, въ Германіи—68%, въ Швейцаріи—$67_{,3}$%. въ Велибританіи и Ирландіи—63%, во Франціи –$56_{,2}$%. За вычетомъ расходовъ, чистый доходъ желѣзныхъ дорогъ по отношенію къ основному капиталу, затраченному на устройство ж. дорогъ, въ 1907 году составлялъ: въ Германіи – $5_{,4}$%, въ Швейцаріи –$4_{,4}$%, въ Франціи—$4_{,2}$, въ Австро-Венгріи — $3_{,7}$, въ Великобританіи и Ирландіи – $3_{,5}$, въ Бельгіи—$3_{,3}$, въ С. Амер. штатахъ — $2_{,8}$%, а въ Россіи въ 1906 г.—$2_{,3}$%.

Что касается русскихъ желѣзныхъ дорогъ, то исторія ихъ возникновенія была такова. Послѣ открытія первой ж. дороги въ 24 версты между СПБ. и Царскимъ Селомъ, построенной частными предпринимателями въ 1835—38, въ 1843 было издано Выс. повелѣніе о постройкѣ Варшавско—Вѣнской и СПБ.—Московской *(Николаевской)* дорогъ на средства государственнаго казначейства. Верста послѣдней (при длинѣ въ 608 в.) въ постройкѣ обошлась около 108 тыс. рублей пока мосты были деревянные; съ постройкою жел. мостовъ — верста — 132 тыс. р. Открылось движеніе по ней въ 1851 году при 162 паровозахъ, 157 пассажирскихъ вагонахъ и 2000 товарныхъ. Отчужденіе земель подъ дорогу обошлось въ $2_{,3}$ милліона рублей, устройство полотна дороги въ $19_{,6}$ мил., мосты, сточныя трубы, переѣзды и будки—въ $11_{,7}$ мил., зданія—$11_{,6}$ мил., шпалы и рельсы—$15_{,2}$ мил., подвижной составъ $7_{,3}$ милліоновъ, что съ дополнительными и общими расходами составило 80 милліоновъ, или на 1 версту болѣе 131 тысячи руб. Къ концу XIX вѣка, когда число однихъ паровозовъ на ней дошло до 420, а товарныхъ вагоновъ до 10000 при стоимости всего подвижного состава въ 22 мил. руб., провозная способность дороги достигла до 6½ мил. пудовъ въ годъ. Содержаніе служебнаго персонала обходилось въ концѣ XIX в. до 10 мил. руб.

Въ 1851 году Правительство вознамѣрилось строить желѣзную дорогу отъ СПБ. до Варшавы, но севастопольская война помѣшала этому; послѣ нея въ 1857 г. было организовано Главное Общество россійскихъ желѣзныхъ дорогъ для постройки ж. дорогъ отъ СПБ. до Варшавы, отъ Москвы до Нижняго, отъ Москвы до Ѳеодосіи и отъ Курска до Либавы. Основной капиталъ этого акціонернаго об-ва опредѣленъ былъ въ 275 мил. руб., при чемъ акцій, по 125 руб. каждая, было выпущено сначала на 75 милліоновъ, потомъ 500-рублевыхъ на 35 милл. и еще разъ 125 рублевыхъ—на 2 милліона—всего на 112 мил. Этими акціями пр-во выплачивало помѣщикамъ выкупные платежи за выкупаемыхъ у нихъ крестьянъ. Об-ву Правительство гарантировало 5% доходъ. Об-во издержало на постройку дорогъ больше предполагавшихся суммъ, именно: на Варшавскую—125 мил., а на Нижегородскую—36 мил.; расходы эти къ концу XIX в. доросли до 200 мил. руб. Стоимость постройки 1 версты для СПБ. Варшавской дороги обошлась въ $103,_7$ тыс. руб., а М.-Нижегородской въ 88 тыс. Къ концу XIX вѣка приходъ Об-ва по обѣимъ этимъ дорогамъ и по арендованной имъ у Правительства Николаевской дорогѣ составлялъ 46 милліоновъ, расходъ—24 мил., слѣдовательно чистаго дохода оно получало по 22 милл. рублей. Кромѣ этихъ двухъ дорогъ Главное Об-во другихъ не строило, такъ какъ расходовало до 32 милл. на одну администрацію съ фантастическими жалованьями управляющимъ и другимъ служащимъ высшихъ ранговъ, а на постройку первыхъ двухъ дорогъ выпросило у Правительства еще 28 милліоновъ. Какъ щедро это Об-во расходовало деньги, можно судить по тому, что на одни изысканія дороги къ Ѳеодосіи по гладкой Харьково-Екатеринославской степи оно израсходовало до 6½ мил. руб.

Возможность получать стотысячные оклады жалованья при ничегонедѣланіи повела къ тому, что съ конца 60-хъ годовъ и въ Россіи началась желѣзнодорожная горячка: составляли общества и просили у Правительства разрѣшить имъ выпускать гораздо больше облигацій, чѣмъ акцій; но эти Об-ва были не прочны и часто не могли собрать всей требуемой данной имъ по концессіи суммы. Тогда же и нѣкоторыя земства (напр. Воронежское, Борисоглѣбское) стали строить дороги (Козлово-Воронежскую, Грязе-

Царицынскую, Козлово-Тамбовскую, Тамбово-Саратовскую). Нѣкоторыя дороги строились и безъ гарантіи Пр-ва (Шуйско-Ивановская, Рыбинско-Бологовская, Харьково-Кременчукская, Балтійская), а другія — съ такою или иною гарантіею. Въ 1866 начата постройка Курско-Кіевской дороги на 1½ мил. ф. стерлинговъ акцій и 3 милліона облигацій. Послѣ 1868, когда правила сдачи концессій были точнѣе опредѣлены Правительствомъ, такія концессіи получили об-ва Московско-Смоленской, Либавской, Скопинской, Иваново-Кинешемской. Р. О. П. и Т. взялось строить Одесско-Балтскую дорогу, которая потомъ соединилась въ одну Кіево-Одесскую, также какъ проведенная раньше отъ Роменъ до Ландварова - слилась позже съ Либавскою дорогою въ Либаво-Роменскую.

Въ началѣ 70-хъ годовъ уже было въ Европейской Россіи болѣе 10 тыс. верстъ рельсовыхъ дорогъ. За 70-ые годы это число верстъ удвоилось постройкою Лозово - Севастопольской дороги, Ряжско-Вяземской, Моршанско-Сызранской, Ростово-Владикавказской - при такихъ порядкахъ, что предприниматели (напр. Фонъ-Дервизъ, Меккъ, Губонинъ, Поляковъ), объявляли объ учрежденіи акціонернаго об—ва, раздавали деньги воображаемымъ акціонерамъ и владѣли громаднымъ количествомъ акцій и облигацій. Правительство такимъ дорогамъ при ихъ бездоходности приплачивало недостающее количество доходовъ, какіе были гарантированы, а хозяева дорогъ въ это время наживали милліоны.

Сумма консолидированныхъ облигацій ж. дорогъ, за которыя Правительство отвѣчало, къ половинѣ 70-хъ годовъ превысила 427 милліоновъ руб. Движеніе же и пассажирскихъ и товарныхъ поѣздовъ было очень неправильное. Въ концѣ 70-хъ годовъ была учреждена такъ называемая Барановская комиссія для изслѣдованія положенія ж. дорогъ, которая открыла массу безпорядковъ. Тогда (въ 80-хъ годахъ) правительство начинаетъ строить за счетъ госуд. казначейства дороги: Баскунчакскую, Екатерининскую, Екатеринбургско-Тюменскую, Самаро-Уфимскую. Турецкая война 1877—78 гг. задержала развитіе этого дѣла; въ 80-хъ годахъ построена Полѣсская дорога очень дешево (по 40 тыс. за версту), а въ теченіе 90-хъ годовъ Правительство начинаетъ выкупать у Главнаго об - ва и другихъ частныхъ об—въ ихъ дороги въ казенную собственность.

Въ 90-хъ годахъ построена была на казенный счетъ дорога отъ Тюмени до Байкала и отъ Байкала до Владивостока, для чего было создано особое управленіе по ея постройкѣ; строилась она съ двухъ концовъ: отъ Владивостока и отъ Тюмени. (За этотъ же періодъ построена и дорога отъ Перми къ Котласу на Сѣв. Двинѣ). Большіе мосты по $^2/_5$—$^3/_5$ версты пришлось здѣсь строить черезъ рѣки Тоболъ, Ишимъ, Иртышъ, Обь, Томь, Енисей и Селенгу. Переѣздъ черезъ Байкальское озеро еще и во время послѣдней Японской войны совершался посредствомъ пароходовъ съ ледоколами зимою. Правильное сообщеніе по Сибирской жел. дорогѣ началось съ 1895 г. и очень быстро развивалось. Изысканія по этой дорогѣ обошлись въ $3{,}_5$ мил. руб., постройка полотна—въ 320 милл., подвижной составъ—38 милл., а всего съ дополнительными расходами по такъ назыв. вспомогательнымъ предпріятіямъ, какъ-то—по улучшенію рѣкъ, по заселенію полосы земли около дороги переселенцами, по очищенію и измѣренію для нихъ земель, постройка этой дороги стоила до полумилліарда рублей.

Начавъ строить дороги на казенный счетъ, Правительство въ 80-хъ годахъ, послѣ изслѣдованія положенія дорогъ комиссіею Баранова, вознамѣрилось ввести болѣе строгіе законы, чѣмъ тѣ, какія въ аналогичномъ случаѣ практиковало законодательство англійское, гдѣ, не смотря на давленіе общественнаго мнѣнія, парламентъ все-таки смотрѣлъ на желѣзнодорожное дѣло, какъ на дѣло частныхъ интерессовъ. Но, въ общемъ, и въ Россіи повторилось то же, что было и въ Англіи, гдѣ послѣ періода горячки въ постройкѣ дорогъ (1845—48) затѣмъ періода конкуренціи различныхъ компаній (1848—59), комиссія Гладстона, выполнивши анкету въ 18.000 вопросныхъ пунктовъ, пришла къ заключенію о необходимости правительственнаго вмѣшательства въ это „дѣло частныхъ интерессовъ“ для ограниченія своеволія слившихся въ большіе тресты компаній. Какъ въ Англіи, такъ и у насъ разнообразіе правилъ движенія на разныхъ дорогахъ вызвало нареканія; сверхъ того Правительству приходилось приплачивать желѣзнодорожнымъ компаніямъ значительныя суммы, такъ какъ гарантированный имъ доходъ выходилъ значительно выше показываемаго желѣзными дорогами въ ихъ отчетахъ. Для выясненія дѣла здѣсь, какъ и въ другихъ отрасляхъ статистики, помогла практика Италіи. Категоризація расходовъ, какую ввели итальянцы, вызвала то, что французы вывели для разныхъ періодовъ времени,—во что можетъ обходиться стоимость того или другого вида расходовъ по желѣзнодорожному дѣлу. При централистическомъ строѣ управленія желѣзными дорогами во Франціи, тамъ имѣлись точныя данныя о дѣйствительно произведенныхъ расходахъ, и они дали слѣдующія относительныя величины разныхъ ихъ видовъ:

	Въ 1842 году:		Въ 1865 году:	
Содержаніе управленія дороги	17,8		18,3	
Расходы на движеніе	30,0		27,5	
Ремонтъ подвижного состава	31,3		37,7	
Государственная подать	10,0	20,9	2,6	16,8
Налоги и пошлины	5,9		3,9	
Прочіе расходы (возмещеніе убытковъ, судебныя и т. п.)	5,0		10,0	
	100		100	

Такіе показатели, мало измѣнившіеся въ главныхъ отдѣлахъ расходовъ на разстояніи 23 лѣтъ (въ зависимости отъ измѣненія нѣкоторыхъ условій общеполитической и экономической жизни), а также другія статистическія изслѣдованія желѣзнодорожнаго дѣла въ Западной Европѣ, много помогали комиссіи Баранова изслѣдовать жизнь и развитіе желѣзнодорожнаго дѣла въ Россіи. Отклоненія отъ нормальныхъ или правдоподобныхъ размѣровъ расходовъ на разныхъ нашихъ желѣзныхъ дорогахъ объяснялись тѣми или другими причинами, тѣми или другими недочетами въ постановкѣ дѣла, но дали руководящую мысль для установки такихъ или иныхъ положеній относительно вопроса о томъ, какъ можно контролировать эту сторону дѣятельности частныхъ компаній. Съ другой стороны—въ отдѣлѣ приходовъ частныхъ ж. д. акціонерныхъ предпріятій и въ противорѣчіи ихъ съ общенародными интересами, которыя обслуживать должны желѣзныя дороги въ государствѣ, комиссія Баранова находила также не мало матеріала для своихъ работъ. Конкуренція отдѣльныхъ обществъ, назначавшихъ разнообразныя тарифныя ставки и за перевозку пассажировъ и за перевозку грузовъ, съ общегосударственной точки зрѣнія должна была быть отмѣнена и могла остаться только конкуренція желѣзнодорожнаго транспорта съ гужевымъ съ одной стороны и съ транспортомъ по водянымъ путямъ съ другой. Чумачество, какъ старая форма торговой коопераціи въ дѣлѣ транспорта, съ проведеніемъ дорогъ къ Черному и Азовскому морямъ было устранено съ поля конкуренціи, а вопросъ о томъ, какая конкуренція желѣзнымъ дорогамъ можетъ быть предъявлена со стороны рѣчныхъ водныхъ путей, остался для рѣшенія на дальнѣйшее время, когда будутъ опубликованы данныя обоими отдѣлами М-ва путей сообщенія.

Государственному Совѣту было поручено составить мнѣніе о томъ, „какъ урегулировать взаимныя отношенія желѣзныхъ дорогъ и лицъ, пользующихся ихъ услугами, и установить благочиніе и благоустройство на желѣзныхъ дорогахъ“. Представленный комиссіею гр. Баранова проэктъ Общаго Устава желѣзныхъ дорогъ былъ утвержденъ и отпечатанъ въ 1886 году, а въ 1889 издано „Временное положеніе о желѣзнодорожныхъ тарифахъ“ и „Учрежденіе по желѣзнодорожнымъ дѣламъ“. Цѣлью этихъ законовъ было объединеніе тарифныхъ ставокъ для всѣхъ дорогъ Россійской имперіи. Поэтому въ 1888 г. былъ созванъ съѣздъ представителей желѣзныхъ дорогъ, а также и представителей промышленности и торговли. Интересы послѣднихъ, какъ отправителей грузовъ, конечно, не сразу могли быть согласованы съ интересами владѣльцевъ желѣзныхъ дорогъ. Если купцы желали пониженія провозной платы, то для правленій ж. дорогъ такое пониженіе представлялось посягательствомъ на ихъ доходы. При этомъ выяснилась сущность тарифной политики. Такъ какъ отношеніе спроса и предложенія вездѣ устанавливаетъ цѣны и на предметы потребленія и пользованія, и на работу, то и работа желѣзныхъ дорогъ должна оцѣниваться съ одной стороны по платежной способности каждаго груза (болѣе цѣнный грузъ можетъ быть перевозимъ за болѣе дорогую плату), а съ другой стороны—по состоянію промышленности и торговли въ данной мѣстности, по направленію, по которому движутся грузы, по разстоянію, по количеству грузовъ, по скорости транспорта и по тѣмъ удобствамъ, какія можетъ доставить для грузовъ разнаго рода ж. дорога, и наконецъ по разсчетамъ, чтобы перевозка грузовъ жел. дорогами была неубыточна для послѣднихъ. Съ послѣдней точки зрѣнія нужно было принимать во вниманіе: родъ и свойство груза и его упаковки (въ ящикахъ, въ связкахъ, пакетахъ, бочкахъ, бутылкахъ и т. п.), количество его, предлагаемое промышленностью данной мѣстности, нормы нагрузки тѣмъ или другимъ грузомъ вагоновъ и производство дорогами дополнительныхъ работъ (а слѣдовательно и расходовъ) въ родѣ взвѣшиванія товара, нагрузки, перегрузки и т. п.

Если бы приняты были во вниманіе только интересы развитія промышленности и торговли, т.-е. если бы для разнаго рода грузовъ были поставлены минимальныя цѣны для перевозокъ, то при уменьшеніи количества перевозокъ желѣзныя дороги могли бы оказаться бездоходными; но и при максимальныхъ ставкахъ, которыхъ не можетъ выдержать данный грузъ, послѣдній не былъ бы предложенъ дорогамъ отправителями, которые нашли бы другіе способы транспорта своихъ грузовъ, какъ это и имѣло мѣсто въ подвозкѣ хлѣбовъ къ портамъ Чернаго моря при высокихъ ставкахъ на этотъ грузъ: бывали случаи, что къ портамъ ѣхали почти пустые вагоны, а рядомъ съ ними на возахъ за болѣе дешевую плату зерно къ пароходамъ подвозили чумаки гужомъ.

Всѣ эти соображенія имѣлись въ виду при собираніи и разработкѣ многочисленныхъ статистическихъ данныхъ комиссіею Баранова, и ей удалось до извѣстной степени устранить хаотическое состояніе тарифнаго дѣла, царившее до того времени на нашихъ ж. дорогахъ. Сборникъ тарифовъ изданъ былъ въ 1889 году, но учрежденному Совѣту по тарифнымъ дѣламъ поручено было постоянно работать и дѣлать въ тарифахъ такія или иныя измѣненія, указываемыя требованіями дѣйствительной жизни. Съ тѣхъ поръ въ тарифной политикѣ этого учрежденія замѣчается по характеру дѣятельности Совѣта три періода. Въ первый организаціонный и охранительно-покровительственный періодъ изданы были „Правила относительно общихъ способовъ устраненія соперничествъ желѣзныхъ дорогъ между собою по перевозкѣ грузовъ“, а также правила для съѣзда представителей желѣзныхъ дорогъ; во все время съ 1889 по 1897 тарифы на главные грузы были понижаемы. Такая политика въ результатѣ имѣла то слѣдствіе, что съ 1895 по 1900 годъ желѣзныя дороги стали получать доходъ вслѣдствіе увеличенія количества перевозокъ товаровъ и пассажировъ, для которыхъ также послѣдовало пониженіе проѣздной платы. Но съ 1900 года, когда жел. дороги стали терпѣть дефициты, до 1908 года тарифная политика стала имѣть въ виду поднятіе доходности желѣзныхъ дорогъ и стала повышать провозныя ставки. Не только желѣзныя дороги требовали этого повышенія, но и Тарифный Комитетъ на это соглашался. Тѣмъ не менѣе работа жел. дорогъ послѣ 5-лѣтняго періода полученія чистаго дохода, стала приносить дорогамъ опять дефициты; въ 1908 г. представители желѣзныхъ дорогъ представили проэктъ о необходимости повышенія всѣхъ тарифныхъ ставокъ на 10%. Но Тарифный Комитетъ на это не согласился, и съ тѣхъ поръ въ нашей тарифной политикѣ проявляется покровительство не желѣзнымъ дорогамъ, а развитію промышленной жизни страны, такъ что теперь мы переживаемъ опять періодъ пониженія нѣкоторыхъ тарифныхъ ставокъ.

Въ то время, когда такимъ образомъ законодательство опредѣляло отношенія пользующихся услугами желѣзныхъ дорогъ къ управленіямъ этихъ дорогъ, оно продолжало постройку дорогъ на казенный счетъ и выкупъ казною жел. дорогъ у тѣхъ обществъ, которыя оказались несостоятельными. Первая дорога, построенная на общегосударственныя средства въ этомъ періодѣ, была—линія въ 68 верстъ отъ ст. Владиміровки къ Баскунчакскому соленому озеру, лежащему за нижней Волгой въ Астраханской губерніи. Это число верстъ, съ котораго казенное управленіе начало эксплоатацію дорогъ, разрасталось быстро вслѣдствіе перехода въ казенное управленіе дорогъ частныхъ акціонерныхъ предпріятій и вслѣдствіе того, что строились дороги на средства государственнаго казначейства все на большихъ протяженіяхъ и въ концѣ на такихъ громадныхъ разстояніяхъ, какъ Сибирская и Забайкальская.

Оставляя въ сторонѣ подробную исторію слиянія нѣсколькихъ жел.-дорожныхъ об-въ въ одно и исторію постройки дорогъ въ 90-е годы прошлаго столѣтія и въ первое десятилѣтіе текущаго вѣка, остановимся на перечисленіи тѣхъ дорогъ казенныхъ и частныхъ, какія въ настоящее время существуютъ въ Европейской Россіи, кромѣ Финляндскихъ и Азіатскихъ. Это будутъ, идучи отъ С. къ Югу, прежде всего слѣдующія казенныя дороги.

Николаевская, къ которой кромѣ главной первоначальной магистрали отъ С.П.Б. до Москвы прибавились линіи отъ Бологого до Волковысска (842 версты), отъ Лихославля до Вязьмы (214 версты) и нѣсколько небольшихъ подъѣздныхъ путей.

Сѣверо-Западныя, въ которыя вошли: старая С.П.Б.-Варшавская и При-балтійскія дороги отъ Риги до Пскова, Ревеля и С.П.Б. съ узкоколейными подъѣздными путями (1006 в. + 1510 = 2516 в.)

Сѣверныя—отъ Москвы черезъ Ярославль и Вологду къ Архангельску и отъ С.П.Б. черезъ Вологду до Вятки съ вѣтвями отъ Ярославля до Костромы и Кинешмы и отъ Ярославля до Рыбинска (1885 в.).

Московско-Курская и *Московско-Нижегородская* или дороги центральнаго района—безъ особыхъ развѣтвленій (1129 в.).

Московско-Брестская—черезъ Калугу и Гомель (1025 в.).

Риго-Орловская — отъ Риги до Орла черезъ Витебскъ съ вѣтвью отъ Витебска до Жлобина (1460 в.).

Пермская — отъ Котласа на С. Двинѣ черезъ Вятку, Пермь и Екатеринбургъ до Тюменя и Челябинска съ вѣтвями къ Уральскимъ горнымъ заводамъ (2074 в.).

Сызранско-Вяземская — изъ Смоленской губ. черезъ Калугу, Тулу до Сызрани (Батраковъ)—1309 в.

Самаро-Златоустовская, какъ продолженіе предыдущей черезъ Уфу до Челябинска,—до соединенія съ Сибирскою дорогою (1222 в.).

Либаво-Роменская — мимо Вильны, черезъ Гомель до Роменъ (1323 в.).

Полѣсскія дороги — отъ Брестъ-Литовска черезъ Гомель до Брянска (1380 в.).

Привислянскія — сѣть дорогъ въ восточной половинѣ Царства Польскаго и Минской губ. (1824 в.).

Южныя дороги, т.-е. *Курско - Харьково - Севастопольская* и *Харьково-Николаевская* съ развѣтвленіями отъ Полтавы до Лозовой, отъ Лохвицы до Гадяча, отъ Николаева до Херсона и къ сѣти дорогъ Донецкаго каменноугольнаго района (1673+1320=2993 в.).

Екатерининская 1-я и 2-я — какъ двѣ магистрали, соединяющія Криворожскій рудоносный районъ съ каменно-угольнымъ Донецкимъ, съ развѣтвленіями въ этихъ районахъ и путями къ Бердянску, Маріуполю и Таганрогу (2737 в.).

Закавказскія дороги, прорѣзывающія Закавказье отъ Батума и Поти до Баку и Джульфы черезъ Эривань съ развѣтвленіями— къ Тифлису и Карсу (1532 в.).

Юго-Западныя дороги—сильно развѣтвленная сѣть дорогъ отъ Кіева на Западъ къ Ковелю и пограничнымъ пунктамъ Австро-Венгерскаго и Румынскаго государствъ и Чернаго моря въ Одессѣ (4219 в.).

Если къ этимъ 16-ти системамъ дорогъ мы прибавимъ еще Баскунчакскую, то получимъ всю сѣть казенныхъ желѣзныхъ дорогъ Европейской Россіи, среди которыхъ къ настоящему времени остались еще слѣдующія жел. дороги, также „общаго значенія“, но эксплоатируемыя частными акціонерными обществами.

Московско-Кіево-Воронежская, слившаяся изъ дорогъ нѣсколькихъ обществъ и строившая позже по концессіямъ отъ Правительства добавочныя къ своей сѣти линіи. Она имѣетъ линіи отъ Москвы къ Кіеву мимо Калуги черезъ Брянскъ; отъ Кіева черезъ Курскъ до Воронежа, отъ Кіева къ Полтавѣ, Чернигову и Красному у Днѣпра и нѣкоторые узкоколейные подъѣздные пути (2340 в.).

Московско-Виндаво-Рыбинская, соединяющая Москву съ Балтійскимъ моремъ, С.П.Б. съ Витебскомъ, и Псковъ черезъ Бологое съ Рыбинскомъ, а также Новгородъ съ Старою Русою и съ Николаевскою желѣзною дорогою у Бологое (2446 в.).

Варшавско-Вѣнская—сѣть въ Зап. части Царства Польскаго, соединяющая Варшаву съ пограничнымъ г. Калишемъ и черезъ таможенныя пограничныя станціи у Александрова и Границы съ Берлиномъ и Вѣною (703 в,).

Московско-Казанская съ развѣтвленіями на Нижній Новгородъ, Симбирскъ, Сызрань и Пензу (2070 в.).

Рязанско-Уральская черезъ Тамбовъ и Саратовъ и съ вѣтвями къ Баскунчаку, къ Николаевску и Александр. гаю (болѣе 4 т. в.).

Юго-Восточныя дороги, соединяющія Харьковъ черезъ Купянскъ съ одной стороны съ Орломъ, Щиграми, Грязями, Липецкомъ, Козловымъ, а съ другой—Грязи съ Царицынымъ, Ростовомъ и сѣтью Донецкаго кам.-уг. бассейна (3244 в.).

Владикавказская—отъ Ростова на Дону мимо Владикавказа до Баку черезъ Дербентъ съ пересѣченіемъ другою дорогою отъ Царицына черезъ Екатеринодаръ до Новороссійска и съ вѣтвью на Ставрополь (2333 в.).

Если къ этимъ 7-ми большимъ частнымъ дорогамъ прибавить небольшія частныя же дороги Бѣлгородъ-Сумскую (147 верстъ) и фабричную Лодзинскую (74 в.), а затѣмъ еще дороги Азіатской Россіи—Сибирскую (3145 в.), Забайкальскую 1681 в.), Уссурійскую (83€), Средне-Азіатскую отъ Красноводска до Ташкента (2373 в.) и Ташкентскую (отъ Оренбурга до Ташкента—2090 верстъ) а также небольшія подъѣздныя къ городамъ вѣтви, то получимъ къ 1-му іюня 1910 года по офиціальному исчисленію *) слѣдующее протяженіе желѣзныхъ дорогъ въ верстахъ въ Европейской, Азіатской Россіи, Финляндіи и на территоріи Китая:

*) „Пути Сообщенія Россіи" 1910. № VI.

	Верстъ главныхъ линій.	Вѣтвей кромѣ дорогъ частнаго пользованія.	Итого.	Верстъ вторыхъ колей на тѣхъ же дорогахъ.
Европейская и Азіатская Россія	61.648	1253	62.901	13.488
Финляндія	3.224	79	3.303	164
Восточно-Китайская дорога	1.617	—	1.617	—
.	66.489	1.332	67.821	13.652
или въ километрахъ . .	70.959	1.421	72.381	14.569

Числа эти съ каждымъ годомъ увеличиваются вслѣдствіе постройки новыхъ линій въ разныхъ мѣстностяхъ: то въ той, то въ другой части карты Европейской Россіи сѣть сгущается; постройка же новыхъ дорогъ составляетъ предметъ желѣзно-дорожной политики, разрѣшающей постройку въ той или иной мѣстности. Какъ много можетъ прибавиться новыхъ желѣзно-дорожныхъ путей въ Россіи за годъ, видно изъ того, что въ 1910 г. строилось по оффиціальнымъ даннымъ 4.780 верстъ, а разрѣшено къ постройкѣ новыхъ дорогъ на 2.797 верстъ.

Шахматная мозаичность и черезполосность въ расположеніи линій разныхъ сѣтей при объединеніи ихъ движенія въ интересахъ пассажировъ и грузоотправителей, стремящихся получить непрерывное движеніе при пересадкѣ пассажировъ и передачѣ товарныхъ грузовъ съ одной дороги на другую, потребовало конечно большой работы отъ упомянутыхъ выше учрежденій въ теченіе послѣднихъ 20 лѣтъ—не меньше, чѣмъ объединеніе дорогъ въ Германской имперіи или Италіи, составившихся изъ небольшихъ государствъ бывшаго Германскаго Союза или Папской области съ Неаполитанскимъ королевствомъ и разными прежде отдѣльными государствами Сѣверной части Аппенинскаго полуострова.

Объединеніе правилъ движенія по всѣмъ дорогамъ, печатавшимъ свои отчеты по разнымъ системамъ за послѣднія 20 лѣтъ, дало возможность появленія у насъ болѣе однообразной желѣзнодорожной статистики, сложность которой зависитъ, кромѣ широкаго распространенія этихъ дорогъ по громадной территоріи, еще главнымъ образомъ оттого, что желѣзнодорожной статистикѣ приходится имѣть дѣло и съ крайнимъ разнообразіемъ перевозимыхъ предметовъ одушевленныхъ, какъ люди, птица, скотъ и т. п., такъ и неодушевленныхъ товаровъ, номенклатура которыхъ уже превышаетъ $4^1/_2$ тысячи названій. Здѣсь, какъ и въ фабричной и въ сельско-хозяйственной статистикѣ, приходится имѣть дѣло не съ тѣми 13—15-ю признаками, которыми ограничивается демографическая статистика, а съ очень разнообразными понятіями разстоянія, направленія движенія, компактности перевозимыхъ грузовъ и пр. особенностей, такъ что можно сказать, что общей теоріи и техники желѣзнодорожной статистики еще пока нѣтъ, и она не скоро можетъ быть выработана, особенно въ виду того, что въ разныхъ государствахъ практикуются разныя, еще не вполнѣ объединенныя, системы.

Но если мы обратимся къ тѣмъ двумъ главнымъ признакамъ, которыми опредѣляется съ одной стороны общенародное значеніе желѣзныхъ дорогъ, а съ другой стороны—ихъ доходность или убыточность, какъ общегосударственнаго предпріятія, то увидимъ, что эта отрасль статистики должна преслѣдовать двѣ задачи. Съ одной стороны жел.-дорожная статистика можетъ отвѣчать запросамъ общеэкономическихъ наукъ, давая свѣдѣнія объ обращеніи тѣхъ или иныхъ грузовъ въ тѣхъ или другихъ мѣстностяхъ государства; она же даетъ указанія для экономической политики М-ва Т. и Пр. и М-ва П. С. о необходимыхъ мѣропріятіяхъ для улучшенія путей сообщенія и предоставленія населенію лучшихъ способовъ удовлетворять потребности торговли и промышленности. Оттого въ Уставѣ жел. дорогъ есть много статей, направленныхъ на обезпеченіе интересовъ пользующихся услугами желѣзныхъ дорогъ. Обязанности послѣднихъ къ удовлетворенію этихъ нуждъ въ настоящее время не ограничиваются только доставкою во время пассажира, его багажа, или отправляемыхъ торговцами грузовъ, но и доставленія послѣднимъ такихъ удобствъ, какъ выдача ссудъ или варрантовъ подъ принятый отъ отправителя грузъ, сохраненіе товаровъ на складахъ желѣзныхъ дорогъ въ теченіе извѣстнаго времени и совершеніе комиссіонныхъ операцій по заказамъ владѣльцевъ грузовъ. Жел. дороги отвѣчаютъ за утрату или порчу багажа и грузовъ на основаніи извѣстныхъ правилъ и рѣшеній кассац. д-нта Сената. Съ этой точки зрѣнія желѣзныя дороги разсматриваются какъ средство удовлетворенія потребностей населенія: ихъ зданія, полотно и подвижной составъ должны отвѣчать спросу населенія на этотъ способъ передвиженія.

Но есть и другая точка зрѣнія на ж. дороги, какъ на государственное имущество большой цѣнности *), которое при его эксплоатаціи не должно обременять государственнаго казначейства, а давать извѣстную прибыль. Стремленіе всякаго хозяйства состоитъ въ наилучшемъ использованіи орудій производства при тѣхъ условіяхъ естественныхъ и соціальныхъ, изъ которыхъ первыя являются болѣе постоянными, измѣняющимися періодически и мало по малу, а вторыя имѣютъ особенность прогрессировать, т.-е. постоянно развиваться. Періодическія смѣны временъ года—не то, что серіація явленій въ соціальной жизни народовъ. Во всемірномъ обмѣнѣ продуктовъ производства, главнымъ образомъ пищевыхъ и вкусовыхъ продуктовъ, желѣзнодорожная статистика всѣхъ европейскихъ странъ уже намѣтила извѣстные показатели для количества этого рода грузовъ, перевозимыхъ жел. дорогами, въ зависимости отъ климатическихъ условій, въ которыхъ находится Европа. Апрѣль является мѣсяцемъ съ наименьшимъ количествомъ перевозки грузовъ, среди которыхъ продукты питанія занимаютъ первое мѣсто. Въ слѣдующіе за апрѣлемъ мѣсяцы идетъ постоянное увеличеніе количества перевозимыхъ грузовъ въ такой прогрессіи, что, по нѣкоторымъ обобщеніямъ изслѣдованій, если мы май обозначимъ коэффиціэнтомъ 10, то послѣдующіе за нимъ мѣсяцы (іюнь, іюль и т. д.) будутъ давать числа: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и 20—для марта. Но такъ какъ такіе относительные показатели не оправдываются каждый годъ въ разныхъ странахъ Европы, то все-же для желѣзнодорожнаго хозяйства нужны свѣдѣнія и о дѣйствительныхъ абсолютныхъ числахъ пудовъ тѣхъ грузовъ, которые при болѣе или менѣе урожайномъ годѣ будутъ предъявлены къ перевозкѣ.

Прогрессивное увеличеніе численности населенія, развитіе производительности съ каждымъ годомъ увеличиваетъ и число переѣзжающихъ по желѣзнымъ дорогамъ пассажировъ и число грузовъ къ отправкѣ. Отъ этого растетъ и сумма валового дохода и расходовъ жел. дорогъ. Это можно видѣть и изъ данныхъ, имѣющихся для русскихъ желѣзныхъ дорогъ.

---

*) Въ настоящее время, какъ мы видѣли, 23 казенныхъ жел. дорогъ и 9 дорогъ общаго значенія, принадлежащія частнымъ об-вамъ, по стоимости сооруженія ихъ могутъ быть оцѣнены въ суммѣ болѣе 6 милліардовъ рублей.

Вотъ они.

Годы.	Верстъ желѣзнодор. пути.	Миллiоновъ: пассажир	пудовъ грузовъ.	Миллiоновъ рублей. Валовой доходъ.	Расходъ.	Чист. доходъ.
1871 .	. 10.978	19,5	968	95,4	60,3	35,1
1880 .	. 21.126	35,2	2.340	193,2	151,7	41,5
1890 .	. 26.679	46,5	4.179	284,5	171,7	112,8
1900 .	. 47.785	104,3	9.372	580,5	383,2	197,3
1902 .	. 52.008	118,6	9.832	622,9	434,7	188,2
1906 .	. 57.203	135,9	11.680	794,9	652,2	142,8

При такихъ статистическихъ данныхъ, подтверждающихъ общее положенiе Кэтлэ, что числа соцiальнаго характера развиваются, а зависящiя отъ естественныхъ смѣнъ дня, ночи, временъ года, сезоновъ и т. п. перiодически повторяются, желѣзнодорожному управленiю россiйскими дорогами (въ лицѣ Совѣта по ж.-дорожнымъ дѣламъ и департамента ж.-дорожныхъ дѣлъ Министерства финансовъ, въ которомъ участствуютъ два представителя М-ва П. С. и по одному отъ М-въ финансовъ, юстицiи, внутр. дѣлъ и Торговли и Промышленности) нужно, руководясь статистическими данными, имѣть извѣстное количество средствъ перевозки для удовлетворенiя спроса, могущаго быть предъявленнымъ къ перевозкѣ. Смотря по тому, какое количество каменнаго угля, соли или руды приготовлено будетъ въ копяхъ къ отправкѣ на осень, какiе виды на урожай имѣются въ маѣ и какое количество хлѣбовъ потребуется перевозить уже съ августа, нужно заготовить извѣстное число вагоновъ въ распоряженiе службы тяги разныхъ желѣзныхъ дорогъ. Послѣ того, когда по требованiю Правительства послѣдовало соглашенiе между русскими желѣзными дорогами о взаимномъ пользованiи своими и чужими вагонами съ уплатою однимъ управленiемъ дороги другому извѣстной суммы за пользованiе въ теченiе дня однимъ вагономъ, стало возможнымъ до извѣстной степени удовлетворять требованiя обращенiя грузовъ.

Все это усложняетъ желѣзнодорожную статистику, которая въ настоящее время у насъ имѣетъ характеръ и основной и текущей. При томъ мозаичномъ расположенiи казенныхъ и частныхъ дорогъ на территорiи Европейской Россiи, какое указано выше, главный вопросъ о состоянiи и количествѣ инвентаря подвижного состава можетъ быть рѣшенъ только при помощи одновременной переписи всѣхъ вагоновъ. Такія однодневныя переписи и производятъ 1 мая каждаго года, при чемъ становится яснымъ, сколько своихъ и чужихъ вагоновъ находилось на каждой дорогѣ. Переписи эти дали слѣдующіе результаты: въ 1900 г. товарныхъ вагоновъ было на всѣхъ русскихъ жел. дорогахъ—225 тысячъ, въ 1901—264 т., въ 1902—273 т., въ 1903—291 т., въ 1904—315 т., въ 1905—345 т., въ 1906—375 т., въ 1907—395 тысячъ. Число живой рабочей силы всѣхъ служащихъ также можетъ быть отнесено къ 1-му мая. Эти свѣдѣнія даютъ каждый годъ понятіе о положеніи средствъ для перевозки товаровъ и пассажировъ.

Другія данныя о полезной работѣ всего подвижного состава по перевозкѣ пассажировъ и грузовъ, и безполезной въ смыслѣ приносимаго дохода, т.-е. неоплачиваемой контръ-агентами жел. дорогъ—пассажирами и отправителями грузовъ (какъ перевозка пустыхъ вагоновъ обратно при неимѣніи грузовъ въ противоположномъ направленіи, работа на маневрахъ и т. п.) должны быть также учтены по очень подробнымъ статистическимъ таблицамъ, такъ какъ при постоянномъ увеличеніи движенія увеличиваются и расходы: если мы обратимся къ приведеннымъ выше числамъ, то увидимъ, что, при увеличеніи валового дохода на русскихъ дорогахъ за 35-лѣтній періодъ (1871—1906) въ 8,3 раза, расходы на пріобрѣтеніе этого дохода увеличились въ 10,8 разъ, т.-е. въ большей степени, чѣмъ увеличивался доходъ. Если на эти отношенія оказывали вліяніе измѣненія тарифныхъ ставокъ въ теченіе этого времени (нужно учесть и мѣру этого вліянія), при чемъ выводъ о большемъ возрастаніи расходовъ, чѣмъ доходовъ отъ производительнаго движенія жел. дорогъ, могъ измѣниться, то все же необходимость статистическаго учета того и другого фактора остается очевидною *). Понятно, что данныя объ интенсивности работы желѣзныхъ дорогъ въ теченіе отчетнаго года могутъ быть получены только изъ записей текущей статистики, которая въ настоящее время организована на всѣхъ русскихъ желѣзныхъ доро-

*) Напр. чистый доходъ всѣхъ русскихъ дорогъ, за исключеніемъ $4_{,5}$% погашенія обязательныхъ платежей по ж.-дорожнымъ займамъ, въ періодъ 1895—1900 г. выражался слѣдующими числами: 1895—$10_{,8}$ милліоновъ руб., 1896—$18_{,2}$ милл., 1897—$13_{,4}$ милл., 1898—$20_{,8}$ милл., 1899—$8_{,7}$ милл.; затѣмъ вслѣдствіе постройки пока бездоходныхъ азіатскихъ дорогъ наступили годы убыточности всѣхъ дорогъ вмѣстѣ взятыхъ, которая прекратилась къ 1910 году.

гахъ по одному шаблону для возможности сводки получаемыхъ свѣдѣній для всей Россіи.

Въ каждомъ управленіи жел. дорогъ получаются ежедневныя донесенія о работѣ, произведенной подвижнымъ составомъ службы движенія и службы тяги за прошлыя сутки, которыя въ дальнѣйшей разработкѣ даютъ возможность опредѣлить на извѣстныя принятыя единицы исчисленія стоимость и труда рабочихъ, и работы орудій и средствъ производства, т.-е. и локомотивовъ, и вагоновъ, и каменнаго угля, дровъ, смазочныхъ маслъ и т. п., и наконецъ капитала, вложеннаго въ желѣзнодорожное предпріятіе. И суммы доходовъ, и суммы расходовъ на производство получаются изъ данныхъ текущей желѣзнодорожной статистики, которая организована по строго опредѣленнымъ правиламъ. Прежде чѣмъ обратиться къ изложенію этихъ правилъ, техники и организаціи статистики, забѣжимъ нѣсколько впередъ для ознакомленія съ тѣми единицами учета, къ которымъ сводится выраженіе работы желѣзныхъ дорогъ и по коммерческой, или экономической, и по технической эксплоатаціи ихъ. Съ этой точки зрѣнія желѣзнодорожная статистика можетъ быть подраздѣлена на два отдѣла: коммерческую и техническую.

Если *коммерческая* статистика даетъ въ отчетахъ желѣзныхъ дорогъ много свѣдѣній для занимающихся экономикой торговли и промышленности, представляя оборотъ грузовъ разнаго рода по странѣ въ числѣ пудовъ, то для желѣзнодорожной статистики такая единица счета (пудъ, килограммъ, или тонна) представляется недостаточною. Чтобы учесть работу механической силы, какою является паръ, кромѣ интересующихъ экономистовъ вопросовъ о передвиженіи этихъ грузовъ, для желѣзнодорожной статистики необходимо знать и то разстояніе, на какое, при извѣстномъ количествѣ работы, были передвинуты эти грузы. Произведенія изъ числа пудовъ на число верстъ пройденнаго пространства даетъ такъ называемыя пудо-версты (или пассажиро-версты, а для коровъ, лошадей—штуко-версты). Въ заграничной статистикѣ этимъ величинамъ соотвѣтствуютъ „тонно-километры"—произведенія километра на тонну (62 пуда). Такъ какъ цѣль этой статистики по отношенію къ пользующимся услугами дорогъ состоитъ въ томъ, чтобы установить тѣ тарифныя ставки на пудъ и версту, какія привлекали бы, а не отгоняли отправителей отъ услугъ желѣзныхъ дорогъ, то здѣсь единица „пудо-верста" является вполнѣ необходимою.

Но желѣзная дорога, выполняя свою общенародную службу, должна еще знать, при помощи статистики, во что обходятся ей техническія усовершенствованія передвиженія, которыя также развиваются изъ году въ годъ, во что могутъ обойтись въ будущемъ эти усовершенствованія и какіе результаты даетъ нынѣ существующая техника, разсчитанная на тѣ или другія удобства, доставляемыя грузоотправителямъ всею системою желѣзнодорожнаго дѣла. Можно строить станціи на большихъ и меньшихъ разстояніяхъ, (не уклоняясь отъ нормы въ 30 верстъ), лучше или хуже оборудованныя; можно усовершенствовать подвижной составъ и расходовать на эти улучшенія большія суммы; можно пускать въ сутки 1—3 пары пассажирскихъ поѣздовъ и 5—7 товарныхъ или больше; но нужно имѣть въ виду, чтобы эти техническія улучшенія окупались сборами съ пассажировъ и грузоотправителей. Каждый поѣздъ, проѣхавшійся даромъ, каждый вагонъ, даромъ провезенный, всякая работа паровоза, проѣхавшаго на маневрахъ, слѣдовательно произведенная имъ безъ оплаты со стороны отправителей и пассажировъ, всякій простой вагоновъ безъ употребленія,—требуютъ расходовъ, но расходовъ непроизводительныхъ. Для учета такихъ расходовъ требуются еще особыя единицы счисленія, какъ поѣздоверста, вагоно-верста, паровозо-верста. Въ одномъ поѣздѣ можетъ быть и 10, и 20, и 50 вагоновъ разной конструкціи (на двухъ, на трехъ трехъ осяхъ, требующихъ каждая извѣстнаго количества расхода): все это вліяетъ какъ на расходы по эксплоатаціи, такъ и на доходы. Такъ какъ статистика вездѣ доходитъ до исчисленія недѣлимыхъ величинъ, каковыми въ сельско-хозяйственной статистикѣ являются дворы, семьи или индивидуумы въ рабочемъ возрастѣ, такъ и здѣсь она дошла до *осе-версты*, на исчисленіяхъ которой въ отношеніи къ числу поѣздовъ, вагоновъ и паровозовъ зиждется эта вторая часть желѣзнодорожной статистики—*техническая*. Какъ получаются конечные результаты послѣ разработки данныхъ основной и текущей желѣзнодорожной статистики и какъ они собираются, мы разсмотримъ позже; теперь же въ дополненіе къ даннымъ, полученнымъ уже за 1906 годъ всѣми совмѣстными усиліями чернорабочихъ статистиковъ, приведемъ въ дополненіе къ вышепоказаннымъ числамъ за этотъ годъ и количество этихъ статистическихъ величинъ въ общихъ суммахъ отдѣльно по жел.

дорогамъ Европейской и Азіатской Россіи, такъ какъ тутъ осязательнаго видно будетъ, какое значеніе имѣетъ такая статистика для сужденія о большей или меньшей доходности дорогъ.

Въ 1906 г. было перевезено:	На дорог. Европейской Россіи.	На дорогахъ Азіатск. Россіи (кромѣ Уссурійской).
Пассажировъ	128.778.747	6.303.789
Получилось: пассажиро-верстъ (милліоновъ)	14.108	5.067
Среднiй пробѣгъ 1 пассажира (верстъ)	$109,_5$	$803,_8$
Пудовъ грузовъ (милліоновъ)	$11.047,_2$	$598,_2$
Получилось: пудо-верстъ (милліон.)	$2.482.335,_8$	320.837
Среднiй пробѣгъ 1 пуда (верстъ)	$224,_6$	$549,_1$

Получено валового дохода:	На Европ. дорогахъ.	На Азіатскихъ.
Милліоновъ рублей	$709,_8$	$78,_0$
На 1 версту дороги рублей	15.089	8.398
На пассажиро-версту копѣекъ	$0,_{81}$	$0,_{23}$
На пудо-версту копѣекъ	$^1/_{42}$	$^1/_{49}$
Было расхода:		
Милліоновъ рублей	$522,_7$	$125,_5$
На 1 версту дороги рублей	11.111	13.514
На пассажиро-версту копѣекъ	$0,_{79}$	$0,_{69}$
На пудо-версту копѣекъ	$^1/_{63}$	$^1/_{39}$
Прихода (чистаго дохода).		
Всего милліоновъ рублей	$+187,_1$	$-47,_6$
На 1 версту дороги рублей	+4.959	—5.115
На пассажиро-версту коп.	$+0,_{02}$	$-0,_{46}$
На 1 пудо-версту коп.	$+^1/_{126}$	$-^1/_{193}$

Таковы общіе результаты коммерческой статистики за 1906 годъ. Разсчеты технической статистики имѣютъ подобныя же выраженія для поѣздо-версты, вагоноверсты, паровозо-версты и осеверсты. Они даютъ возможность общему управленію желѣзныхъ дорогъ судить о степени хозяйственности той или другой дороги при тѣхъ или иныхъ результатахъ коммерческой статистики за каждый данный годъ.

Изъ демографіи мы знаемъ, что составъ населенія постоянно увеличивается, при чемъ одни умираютъ, а на смѣну имъ для пополненія человѣческаго рода появляются новые индивидуумы въ большемъ количествѣ. То же происходитъ и съ тѣми с.-хоз. животными, размноженіе которыхъ составляетъ предметъ экономич. политики, и съ продуктами труда человѣческаго, каковы вагоны, паровозы и т. п. Всѣ они также изнашиваются въ жел.-дорожномъ хозяйствѣ и затѣмъ требуютъ исключенія съ поля жизни жел.-дорожнаго дѣла. Чтобы эта жизнь отвѣчала развивающимся потребностямъ людей въ передвиженіи и транспортѣ, нужно, чтобы заготовка и паровозовъ и вагоновъ отвѣчала развивающейся потребности желѣзнодорожнаго движенія. Было время, когда московское техническое училище выпускало по нѣсколько вагоновъ въ годъ изъ своихъ мастерскихъ, и наши дороги принуждены были выписывать заграничные паровозы. Теперь наши паровозостроительные заводы могутъ за годъ поставить болѣе $1^1/_2$ тысячи паровозовъ для нуждъ жел. дорогъ. Но послѣднія принуждены каждый годъ исключать изъ своихъ парковъ много отслужившихъ свою службу паровозовъ вслѣдствіе порчи котловъ отъ воды. Такую же изнашиваемость и смерть испытываютъ и пассажирскіе и товарные вагоны и всѣ другіе предметы жел.-дорожнаго хозяйства.

Для увеличивающагося изъ-году въ годъ и пассажирскаго и товарнаго движенія нужно увеличивать и составы поѣздовъ, а слѣдовательно заготовлять паровозы большей силы и лучшей конструкціи и слѣдовательно нести большіе расходы, чѣмъ прежде шло на содержаніе ихъ; съ другой стороны если бы нужды промышленности и торговли не увеличивались, нужны расходы на улучшеніе. На величину эксплоатаціонныхъ расходовъ вліяетъ еще и удачное расположеніе станцій и равномѣрность или неравномѣрность тяги въ четномъ и нечетномъ направленіи по сезонамъ года и мѣсяцамъ, далѣе—расходы на правильный ремонтъ подвижного состава, расходы на топливо и служащихъ и правильное распредѣленіе ихъ труда и т. п. Для отвѣтовъ на всѣ подобные вопросы ж.-дорожной политики должна давать матеріалъ ж.-дорожная статистика по техническому отдѣлу управленія дорогъ. Она и даетъ числовыя выраженія въ такъ называемыхъ „измѣрителяхъ“ работы ж.-дорогъ. Эти измѣрители касаются нагрузки оси товарныхъ вагоновъ (получаемой посредствомъ дѣленія общей суммы пудовъ перевезенныхъ товаровъ на число осей), степени измѣняемости направленій преобладающаго и обратнаго движенія, состава и вѣса поѣздовъ, скорости движенія, пропускной и провозной способности данной линіи, зависящихъ отъ числа станцій и отъ грузоподъемности вагоновъ и т. п. Они могутъ быть получены изъ многочисленныхъ записей какъ на станціяхъ, такъ и въ движеніи, и дѣлаютъ техническую часть статистики желѣзнодорожной очень сложною. Но насъ можетъ больше интересовать не техническая, а такъ называемая коммерческая статистика, отвѣчающая запросамъ экономическихъ наукъ относительно нуждъ торговли и промышленности разныхъ частей территоріи Россійской имперіи. Подробное исчисленіе размѣровъ расходовъ на 1 версту, на 100 поѣздоверстъ, на 10.000 осеверстъ, на милліонъ пудоверстъ съ подраздѣленіемъ этихъ расходовъ по ихъ отдѣламъ, именно: по управленію дорогою, по ея эксплоатаціи, по службѣ пути и зданій, по службѣ тяги и подвижного состава, по службѣ движенія и телеграфа и т. д.;—всѣ подобные разсчеты необходимы управленіямъ дороги, для той или иной политики ихъ въ желѣзнодорожномъ хозяйствѣ. Но мы можемъ ограничиться только такими общими свѣдѣніями: что напр. колебанія всѣхъ расходовъ (безъ дѣленія ихъ по видамъ службы) на 1 версту у насъ бываютъ отъ 3 до 10 тысячъ рублей, на 100 поѣздоверстъ—отъ 90 до 150 рублей, на 10.000 осеверстъ—отъ 225 до 325 рублей, на 1 милліонъ пудоверстъ—отъ 110 до 240 рублей. Понятно, что колебанія этихъ коэффиціентовъ, или какъ они называются въ ж. д. статистикѣ—„измѣрителей“ успѣшной утилизаціи всѣхъ средствъ, работающихъ въ ж. д. хозяйствѣ, даютъ указанія управленіямъ дорогъ на то, въ какую сторону должны быть направлены мѣры къ поднятію доходности желѣзныхъ дорогъ. Но финансовые результаты ж. д. хозяйства по эксплоатаціи той или другой дороги составляютъ только часть этого хозяйства, если мы обратимъ вниманіе на ту роль, какую ж.-дороги выполняютъ въ общенародномъ хозяйствѣ страны. Здѣсь главнымъ вопросомъ, привлекающимъ наше вниманіе, является: что доставляютъ жел. дороги странѣ въ запросахъ ея относительно передвиженія пассажировъ и грузовъ? Какимъ образомъ организована статистика ж.-дорожная и какими техническими пріемами она получаетъ отвѣты на эти вопросы,—мы познакомимся позже, а теперь не лишне будетъ сообщить, какіе результаты она дала уже въ то время, когда профессоръ статистики и пол. экономіи А. И. Чупровъ въ своемъ выдающемся трудѣ „О желѣзно-дорожномъ хозяйствѣ" сдѣлалъ широкій синтезъ имѣвшихся тогда (1875) данныхъ*).

Разсматривая данныя о передвиженіи пассажировъ и грузовъ, онъ нашелъ, что пассажиры высшихъ классовъ (I—II), также какъ и грузы высшихъ категорій проходятъ всегда болѣе длинныя разстоянія: пассажиры I класса дѣлали тогда въ среднемъ по 500 верстъ переѣзда, II класса—300, а III класса—100 в. Количество грузовъ находилось въ обратномъ отношеніи къ длинѣ пробѣга, т. е. на дальнія разстоянія отправляли меньше груза, чѣмъ на близкія. Это обясняется еще и такъ называемою густотою или плотностью движенія. На близкія разстоянія находится всегда большее количество пассажировъ, чѣмъ на дальнія—въ силу большей общности интересовъ у живущихъ близко. Такъ, если при среднемъ пробѣгѣ въ 100 верстъ пассажировъ на 1 версту приходится 1700, то при пробѣгѣ въ 30 верстъ—уже 8000; если пудовъ въ первомъ случаѣ на версту приходится 145 тысячъ, то во второмъ 300 тыс.; а если мы возьмемъ такія малыя разстоянія, какія обслуживаетъ городская желѣзная дорога—Metropolitaine, то тамъ на версту приходится уже 2 милліона пассажировъ.

Торговля въ настоящее время дошла до степени міроваго обмѣна товаровъ. Старые способы привоза янтаря каботажнымъ путемъ съ берега Балтійскаго моря въ Грецію, извѣстные еще Карѳагенянамъ, теперь замѣнились быстроходными громадными пароходами, проходящими разстояніе отъ Гамбурга до С. Америки въ 6—7, а при отсутствіи льдовъ—и въ 5 дней; теперь на рынки Лондона океаническіе пороходы съ ледяными холодниками перевозятъ свѣжее мясо изъ Австраліи. Въ этомъ обмѣнѣ ж. дороги въ постройкѣ ихъ направлялись прежде всего, по изслѣдованію С. Ю. Витте, въ меридіональномъ направленіи, а также къ портамъ съ теплыми незамерзающими водами. Какое значеніе имѣютъ порты разныхъ странъ для работы желѣзныхъ дорогъ, можно видѣть изъ того, что прямое направленіе грузовъ по желѣзнымъ дорогамъ къ портамъ всегда больше, чѣмъ обратное. Зависимость количества перевозки грузовъ въ этомъ направленіи отъ тоннажа, т. е. количества морскихъ торговыхъ судовъ,—не подлежитъ сомнѣнію. Если мы возьмемъ данныя статистики морскихъ оборотовъ, то онѣ на-

---

*) Это сочиненіе покойнаго члена Международнаго Статистическаго Института издано второй разъ въ 1910 году Московскимъ университетомъ.

ходятся въ прямомъ отношеніи и къ подъемной силѣ морского транспортнаго инвентаря, и къ числу приходящихъ и отходящихъ судовъ, и къ количеству нагружаемыхъ и выгружаемыхъ въ портахъ товаровъ. Такъ напр. за послѣдніе 1908—1909 годы Англія имѣла 20.996 морскихъ торговыхъ судовъ, Франція—17.376, Италія—5.529, Германія—4.640, а Россія—только 3.363. При этомъ тоннажъ, т. е. подъемная сила первыхъ въ Англіи была $11,_5$ милліоновъ тоннъ, Германіи—$2,_8$ м., Франціи—1.452 тыс., Италіи—1 милліонъ, а Россіи—только 700 тысячъ. Во всѣ порты Англіи въ 1908 году приходило $38,_8$ милліоновъ тоннъ на ея судахъ и $26,_5$ мил. на чужихъ (всего—$65,_3$ мил.), а отправлялось—$38,_9 + 26,_9 = 65,_8$ мил. тоннъ; въ порты Германіи—прибыло $10,_7$ мил. на своихъ судахъ и $11,_2$ мил. на чужихъ—всего 21,9 мил. тоннъ; отошло—$10,_4 + 11,_1 = 21,_5$ мил. Въ порты Франціи—прибыло—$6,_5 + 21,_1 = 27,_6$. м. т., отошло $6,_6 + 21,_2 = 27,_8$ м. т.; Италіи—$3,_6 + 11,_9 = 15,_5$, отошло—$3,_6 + 11,_9 = 15,_5$, а Россіи—только $1,_3 + 7,_9 = 9,_2$ и $1,_2 + 7,_7 = 8,_9$. При этомъ такія гавани какъ Лондонъ и Ливерпуль давали общаго оборота товаровъ (прибывшихъ и отбывшихъ) по $19,_5$ $(11,_1 + 8,_4)$ мил. и $14,_8$ мил. $(7,_9 + 6,_9)$ Гамбургъ—$21,_7$ $(10,_9 + 10,_8)$, Марсель—15 мил. $(7,_5 + 7,_5)$, а наши порты Петербургъ—только $2,_8$ $(1,_4 + 1,_4)$ м. т., Одесса—$2,_6$ $(1,_2 + 1,_4)$ мил. тоннъ и т. п.

При такой грузоподъемности, какая для Англіи выражается перевозкою $17,_2{}^0/_0$ всего мірового оборота товаровъ, для Германіи—$12,_3{}^0/_0$, для Франціи—$8,_9{}^0/_0$, для Нидерландовъ $6,_8{}^0/_0$ для Бельгіи—$6,_4{}^0/_0$ для Италіи—$3,_2{}^0/_0$, а для Россіи только $3^0/_0$,—и движеніе грузовъ къ портамъ по желѣзнымъ дорогамъ находилось въ томъ же процентномъ отношеніи къ общему передвиженію грузовъ всего міра.

Конечно, прямые потоки грузового движенія по желѣзнымъ дорогамъ къ портамъ зависятъ въ своемъ количествѣ прежде всего отъ естественныхъ даровъ природы, снабдившихъ ту или другую страну тѣмъ или другимъ матеріаломъ для перевозокъ, и отъ той трудоспособности, какою отличаются ея жители. Естественныя условія производительности той или другой страны постоянны; потому и потоки тѣхъ или другихъ грузовъ изъ одной страны въ другую имѣютъ болѣе устойчивое положеніе въ міровомъ оборотѣ, чѣмъ тѣ случайные товары, которые являются вслѣдствіе возникновенія той или другой фабрики въ той или другой мѣстности.

Что имѣетъ силу для міроваго грузооборота, сохраняется и для внутренняго грузооборота. Разъ обѣ Екатерининскія дороги построены были для перевозки руды изъ Криворожскаго рудного бассейна въ каменноугольный Донецкій и для перевозки каменнаго угля изъ послѣдняго въ первый, то прямое и обратное движеніе этихъ двухъ родовъ грузовъ для этихъ бассейновъ горной промышленности конечно остается болѣе постояннымъ. Производство извѣстныхъ примитивныхъ продуктовъ въ одной мѣстности, а потребленіе ихъ въ другой создастъ тѣ земледѣльческіе, мануфактурные или фабричные округа, которые такъ или иначе будутъ давать транспорту тѣ или другіе предметы для прямого и обратнаго движенія грузовъ. Вліяя на дифференціацію труда человѣческаго въ той или другой мѣстности, эти потоки при разномъ надѣленіи природою той или другой мѣстности ея дарами создаютъ болѣе бѣдныя и болѣе богатыя мѣстности, болѣе бѣдное и болѣе богатое населеніе этихъ странъ. Болѣе богато одаренныя мѣстности и болѣе богатое населеніе ихъ всегда даетъ желѣзной дорогѣ больше грузовъ для отправки въ болѣе бѣдныя мѣстности; поэтому и отправка напр. зерноваго хлѣба изъ нашей мѣстности въ Архангельскую или Вологодскую губернію всегда будетъ больше того, что эти сѣверныя мѣстности съ дѣтьми льдовъ и снѣговъ могутъ дать намъ въ видѣ оленьихъ языковъ и шкуръ, также какъ долго еще наша страна будетъ доставлять въ Англію продукты примитивнаго земледѣлія, а оттуда получать продукты фабрикъ и заводовъ. Пертурбаціонныя, случайныя и измѣняющіяся по терминологіи Кэтлэ, явленія въ жизни и развитіи торговли долго еще будутъ подчинены факторамъ постояннымъ, какими является почва и климатъ. Поэтому правъ былъ А. И. Чупровъ, когда на основаніи имѣвшихся у него данныхъ дѣлалъ выводъ, что, различая въ направленіяхъ грузовъ сторону сильнѣйшаго и слабѣйшаго движенія, мы должны признать болѣе сильнымъ прямое движеніе грузовъ. Онъ для Европы опредѣлилъ отношеніе прямого движенія къ обратному какъ $^2/_3 : ^1/_3$ и нашелъ, что и это отношеніе также довольно устойчиво тамъ, гдѣ населеніе окончательно уже усѣлось и стало наиболѣе осѣдлымъ. Тамъ же, гдѣ оно еще недалеко ушло отъ кочеваго быта, неизвѣстно, какое движеніе грузовъ создастся современемъ. Приливъ и отливъ населенія изъ одной мѣстности въ другую производитъ перемѣщеніе центровъ производства и потребленія. Проведеніе желѣзныхъ дорогъ въ такихъ странахъ въ свою очередь вліяетъ на бытъ населенія и вызываетъ измѣненія въ техникѣ производства и возникновеніе новыхъ пунктовъ производства и потребленія. Здѣсь отношеніе между потокомъ грузовъ сильнѣйшаго движенія и слабѣйшаго будетъ рѣзче: прямое движеніе будетъ составлять даже $^3/_4$ всего грузооборота. Это отношеніе имѣетъ мѣсто еще при такъ называемомъ транзитѣ, т. е. при перемѣщеніи грузовъ на далекое разстояніе безъ оставленія частей товаровъ на пути. Такъ какъ при началѣ постройки ж. дорогъ имѣлось въ виду соединить главнѣйшіе пункты производства и потребленія, то тогда возникали небольшія по протяженію дороги, разчитывавшія главнымъ образомъ на доходы отъ транзита, и эти разсчеты ихъ оправдывались. Но съ появленіемъ другихъ дорогъ, такъ или иначе спрямлявшихъ направленіе ж. дороги и сокращавшихъ разстояніе, они теряли прежніе доходы. Оттого А. И. Чупровъ считалъ мѣстные естественные доходы дорогъ, построенныхъ не для транзита, болѣе постоянными, чѣмъ доходы транзитныхъ дорогъ.

Вникая въ сущность ж. дорожнаго транспорта прямыхъ и обратныхъ перевозокъ, мы можемъ признать общее положеніе, что количество прямыхъ и обратныхъ грузовъ, а также и транзита находится въ полной зависимости отъ экономическихъ условій мѣстности, по которой проходитъ дорога. Поэтому для желѣзнодорожной статистики является еще новая постоянная задача—слѣдить за общимъ экономическимъ и промышленнымъ развитіемъ каждой мѣстности. Оттого реформа подсчитыванія числа пассажировъ и количества грузовъ не только по отдѣльнымъ станціямъ и дорогамъ, а по губерніямъ, по которымъ проходятъ дороги различныхъ обществъ въ Россіи, вызвана была тѣмъ обстоятельствомъ, что дороги стали входить въ одну общую сѣть одного общаго управленія и казенными и частными дорогами.

Расположеніе населенныхъ пунктовъ—городовъ и селеній въ районахъ тѣхъ или другихъ губерній, тѣхъ или другихъ ж. дорогъ—имѣетъ также огромное значеніе: города являются пунктами потребленія, а села—пунктами производства; поэтому на городскихъ станціяхъ полученія всегда больше, чѣмъ отправокъ. Чѣмъ больше предложеніе со стороны производства, тѣмъ больше увеличивается потребленіе, при чемъ послѣднее увеличивается въ большей прогрессіи, чѣмъ идетъ прогрессія удешевленія товара. Въ такомъ случаѣ ж.-дороги сообразуются въ своей политикѣ съ этимъ обстоятельствомъ, указаннымъ и уясненнымъ Ад. Смитомъ и Рикардо. Если станціонное счетоводство по грузовой кассѣ или по билетной въ результатахъ статистической обработки этихъ записей указываетъ на увеличеніе движенія въ направленіи преимущественнаго движенія даннаго рода грузовъ, то желѣзно-дорожное управленіе, пользуясь этими данными статистики, при той или другой системѣ желѣзно-дорожной политики, можетъ измѣнять тарифныя ставки въ смыслѣ повышенія ихъ или пониженія. Цѣль ж.-дорожнаго хозяйства, понимаемаго какъ крупное капиталистическое предпріятіе,—та, чтобы кромѣ оплаты издержекъ ж.-дорожнаго производства получить еще и прибыль на затраченный на постройку капиталъ и на ежегодные расходы по производству движенія. При разсчетахъ отношеній валового и чистаго дохода къ величинамъ основного и оборотнаго капиталовъ въ ж.-дорожномъ хозяйствѣ и въ хозяйствахъ добывающей и перерабатывающей промышленности нужно имѣть въ виду отличительныя особенности транспортнаго хозяйства отъ видовъ производства двухъ первыхъ категорій. И земледѣлецъ (крупный), и фабрикантъ, и ремесленникъ при увеличеніи спроса на продукты ихъ производства озабачиваются, чтобы было приготовлено столько продуктовъ, ихъ труда, сколько требуетъ рынокъ при данномъ положеніи вещей: количество ихъ обусловлено спросомъ, и если спросъ увеличивается, нужно и издержки производства, т. е. оборотный капиталъ увеличить. Если въ данной мѣстности замѣчено перепроизводство, т. е. издержки производства превысятъ покупную стоимость всей массы продуктовъ производства, то земледѣлецъ переселяется въ новыя земли, ремесленникъ и мануфактуристъ переносятъ свое производство въ другія мѣста, капиталистъ-фабрикантъ перемѣщаетъ свои капиталы и основной и оборотный, туда, гдѣ цѣны на продукты его производства выше, или можетъ перемѣнить назначеніе своихъ капиталовъ, помѣстивъ ихъ въ другой родъ и видъ производства.

Въ транспортѣ, гдѣ продукты не вырабатываются, а только перемѣщаются, гдѣ производство и потребленіе совершаются въ одинъ и тотъ-же моментъ времени и гдѣ постоянный капиталъ, затраченный на полотно дороги, постройку станцій, складовъ и т. п. не можетъ быть перемѣщенъ, ибо онъ прикрѣпленъ къ извѣстной мѣстности, зависимость перевозочнаго производства отъ внѣшнихъ мѣстныхъ условій—всесильна. Части оборотнаго капитала, припадающаго на единицу продукта (пудъ, пассажиръ) здѣсь не такъ легко вычислить, какъ въ производствѣ пуда зерна, аршина холста, пуда стали и т. п., п. ч. дорога перевозитъ и пассажировъ и очень разноцѣнные грузы, начиная отъ глины, песку, кам. угля и кончая дорогими издѣліями ювелировъ и шелкоткацкихъ фабрикъ. Эти предметы могутъ заполнять и весь товарный вагонъ, и малыя части его, и только извѣстныя части пассажирскихъ вагоновъ. Исчисленіе расходовъ на версту, пудо-версту, пассажиро-версту разныхъ классовъ, осе-версту разныхъ грузовъ даетъ возможность подойти къ рѣшенію вопроса объ отношеніи издержекъ на эти единицы счисленія къ доходамъ, припадающимъ на тѣ же единицы. Но одна мѣстность даетъ больше пассажировъ I класса, другая — больше низшихъ классовъ, одна — болѣе цѣнные и компактные въ укладкѣ грузы, другая — малоцѣнные и громоздкіе. Оттого, пока существовало много частныхъ обществъ ж. дорогъ, назначавшихъ самые разнообразные тарифы и производившихъ статистическое наблюденіе по разнообразнымъ формамъ, не могло быть еще и особой отрасли статистики — желѣзнодорожной. Но когда сама жизнь и развитіе желѣзнодорожнаго дѣла привели во всѣхъ странахъ къ сліянію малыхъ обществъ въ большія, а затѣмъ къ выкупу построенныхъ отдѣльными об—вами дорогъ въ собственность государства, и явилась возможность примѣнять одни и тѣ же единицы статистической мѣры къ дорогамъ, расположеннымъ въ разныхъ мѣстностяхъ, — тогда явилась и возможность нарожденія общей статистики для всѣхъ дорогъ одного государства и даже разныхъ государствъ, чего еще нѣтъ на дѣлѣ.

Во всякомъ случаѣ въ настоящее время уже вездѣ и валовой доходъ, и расходы желѣзнодорожнаго транспортнаго производства исчисляются, какъ видно изъ сравнительныхъ статистическихъ таблицъ разныхъ странъ, по одинаковымъ подраздѣленіямъ того и другого и приводятся къ одинимъ и тѣмъ же коэффиціентамъ или „измѣрителямъ" работы желѣзныхъ дорогъ—и въ смыслѣ доходности ихъ, какъ грандіознаго общегосударственнаго капиталистическаго предпріятія, и въ смыслѣ удовлетворенія нуждъ населенія въ его потребностяхъ передвигаться самому и передвигать продукты производства и потребленія.

Какую же роль можетъ играть и дѣйствительно играетъ статистика въ ж. д. хозяйствѣ? На этотъ вопросъ отвѣтъ можемъ дать при помощи такой аналогіи. Строющій домъ можетъ впередъ разсчитать, во сколько ему обойдется ежегодный ремонтъ зданія въ зависимости отъ матеріала постройки, съ тою или иною степенью изнашиваемости его, отъ величины зданія и т. п. и сколько прійдется выплачивать долговъ по занятому на постройку капиталу, сколько платить налоговъ соотвѣтственно цѣнности построеннаго зданія, платить страховыхъ платежей и т. п.; но онъ кромѣ этихъ постоянныхъ, установленныхъ уже жизнью расходовъ, не можетъ предвидѣть тѣхъ расходовъ, которыя могутъ возникнуть независимо отъ существа самого зданія, а именно отъ измѣненія окружающихъ условій. Допустимъ, что онъ строилъ хуторъ неподалеку отъ города, но за чертою городской осѣдлости и имѣлъ въ виду лишь поземельную подать; городъ же разросся, захвативъ и его имущество въ свои границы; другія обстоятельства привели къ тому, что дорога, пролегавшая мимо хутора, обратилась въ одну изъ бойкихъ улицъ по случаю устройства вблизи желѣзнодорожной станціи или фабрики на извѣстномъ разстояніи за его выстроеннымъ на пустомъ когда-то мѣстѣ домомъ; городское управленіе дѣлаетъ обязательное постановленіе о проложеніи дорогихъ асфальтовыхъ тротуаровъ на счетъ владѣльцевъ домовъ по новообразовавшейся улицѣ. Такого расхода, который сулитъ и увеличеніе доходности и цѣнности даннаго имущества, строитель дома на пустомъ мѣстѣ за городомъ, конечно, не могъ имѣть въ виду

То же предположительно можетъ случиться и съ бездоходными сначала дорогами. оплата стоимости сооруженія которыхъ разсчитана на десятки лѣтъ впередъ, такъ какъ сооружена она была на занятый у населенія капиталъ, находящійся въ облигаціяхъ. Условія измѣненія окружающей жизни могутъ повысить и доходность и цѣнность, а вмѣстѣ съ тѣмъ и расходы, которые разсчитаны были при условіяхъ, существовавшихъ въ моментъ постройки дороги. Тогда разсчитывали на отправку одного поѣзда въ сутки, котораго было достаточно для перевозки и рѣдкихъ по этой дорогѣ пассажировъ, и небольшого количества грузовъ, доставлявшихся мало развитою промышленностью окрестныхъ мѣстностей; теперь же, при увеличеніи населенія въ окрестностяхъ, вызванномъ постройкою ж. дороги, а также при возникновеніи кругомъ несуществовавшихъ прежде фабрикъ и заводовъ, и число пассажировъ и число грузовъ увеличилось въ такой степени, что съ нихъ не за чѣмъ брать той высокой платы за провозъ, какую было необходимо назначить при первыхъ шагахъ транспортной работы дороги. Оказывается, что теперь на извѣстные грузы и разряды пассажировъ можно понизить тарифы, тѣмъ привлечь еще большее количество перевозимыхъ единицъ,— и доходъ предпріятія будетъ съ лишкомъ превышать и расходы по передвиженію грузовъ и пассажировъ, и обязательства по постояннымъ платежамъ предпріятія и на погашеніе основнаго капитала, и на текущіе расходы по содержанію управленія, взносу налоговъ и т. д. Поэтому при постройкѣ дороги всегда разсчитываютъ на увеличеніе въ будущемъ и числа пассажировъ и числа грузовъ по опредѣленнымъ коэффиціентамъ.

Различеніе постоянно дѣйствующихъ въ данномъ явленіи факторовъ (les actions constantes), зависящихъ отъ его существа, и условій измѣняющихся (les actions perturbatrices — variables et accidentelles), указанное Кэтлэ, оказывается и въ желѣзно-дорожной статистикѣ также необходимымъ, какъ и въ другихъ отрасляхъ Статистики. Разсматривая статистическія желѣзно-дорожныя величины, подлежащія разработкѣ, мы замѣтимъ дѣленіе ихъ на эти два отдѣла, которыя необходимы какъ для технической такъ и для коммерческой желѣзно-дорожной статистики. Но прежде чѣмъ приступить къ изложенію техники желѣзно-дорожной статистики, познакомимся еще съ исторіею развитія организаціи статистическихъ учрежденій у насъ въ Россіи.

Возникли они конечно въ министерствѣ путей сообщенія, издававшемъ свой спеціальный „Журналъ М. П. С.“ еще и до постройки первой желѣзной дороги въ Россіи, тогда, когда это было еще не министерство, а только департаментъ, возникшій изъ прежней Экспедиціи путей сообщенія. Уже въ 40-хъ годахъ прошлаго столѣтія этотъ Департаментъ различалъ водяные, грунтовые, шоссейные и ж. дорожные пути сообщенія и для статистическихъ цѣлей вырабатывалъ формы „накладныхъ“, т. е. документовъ, при помощи которыхъ можно было судить о количествѣ груженыхъ и порожнихъ судовъ (парусныхъ и паровыхъ), двигавшихся по рѣкамъ и каналамъ, а также о числѣ перевозимыхъ грузовъ по воднымъ и шоссейнымъ путямъ. Въ 1843 г. послѣдовало Высочайшее повелѣніе объ учрежденіи Комитета для выработки проекта первоначальной сѣти желѣзныхъ дорогъ въ Россіи; общее обозрѣніе путей сообщенія съ 40-верстною картою вышло въ 1846 году. Въ 1853 году при Главномъ управленіи путей сообщенія и публичныхъ зданій учрежденъ былъ Статистическій Комитетъ, на обязанности котораго лежало собираніе отъ губернаторовъ свѣдѣній о грузооборотѣ по путямъ сообщенія, находившимся въ ихъ губерніяхъ, и составленіе такъ называвшейся тогда carte parlante. Въ 1865 году этотъ Комитетъ былъ упраздненъ, а для выполненія его функцій въ 1870 г. былъ образованъ Ученый Комитетъ М-ва путей сообщенія, а чертежная картъ причислена была къ канцеляріи Министра. По предписанію Министра путей сообщенія 22 мая 1866 желѣзно-дорожный департаментъ министерства обязанъ былъ доставлять ему ежегодно отчеты „по развитію, сооруженію и дѣйствію дорогъ Имперіи". Программа этихъ отчетовъ состояла изъ слѣдующихъ свѣдѣній: 1) о длинѣ одноколейныхъ и двухколейныхъ желѣзныхъ дорогъ, 2) о количествѣ подвижнаго состава, т. е. паровозовъ и вагоновъ на нихъ по подъемной ихъ способности, 3) о числѣ поѣздовъ, количествѣ пассажировъ и перевезенныхъ грузовъ—счетомъ и вѣсомъ, 4) валовомъ доходѣ по роду поѣздовъ на версту дороги и на версту пройденнаго пути; 5) о чистомъ доходѣ на версту пройденнаго пути и объ отношеніи его величины къ валовому доходу, разсчитанному также на ту же версту; 6) о несчастныхъ случаяхъ на дорогѣ въ теченіе года. По извѣстнымъ свѣдѣніямъ были установлены и мѣсячные отчеты (напр. о валовыхъ доходахъ ж. дорогъ).

Такова была первая статистическая программа, по которой доставляемыя свѣдѣнія вмѣстѣ съ другими данными стали съ 1868 года печататься въ „Сборникѣ свѣдѣній о желѣзныхъ дорогахъ въ Россіи" въ видѣ 3 отдѣловъ. Въ 1 отдѣлъ вошли свѣдѣнія о состояніи сѣти съ историческимъ и техническимъ описаніемъ дорогъ, съ обзоромъ развитія сѣти, стоимости сооруженія полотна и станцій, о подвижномъ составѣ, о капиталахъ, погашеніи займовъ, о личномъ составѣ управленія и т. п.; во второмъ отдѣлѣ—выводы статистическихъ показателей или „измѣрителей" по всѣмъ родамъ службы, т. е. переводъ данныхъ о количествѣ грузовъ, пассажировъ, валового дохода, расхода и чистаго дохода на принятыя единицы мѣры; въ третьемъ отдѣлѣ помѣщались Высочайшія повелѣнія, указы, постановленія министерства, уставы обществъ, концессіи, данныя имъ и т. п. Изданіе снабжалось 175-верстною картою ж. дорогъ Россіи.

Изъ этого изданія общая желѣзно-дорожная статистика согласно постановленію 7-го международнаго статистическаго конгресса (въ Haag) стала извлекать данныя для международной сравнительной статистики. До настоящаго времени этого „Сборника стат.

свѣдѣній М-ва путей сообщенія“ вышло около 100 томовъ и онъ даетъ свѣдѣнія какъ вообще о состояніи ж. дорогъ (XIII таблицъ), такъ и о движеніи товаровъ и пассажировъ по ж. дорогамъ за каждый годъ.

Кромѣ этого изданія, съ 1870 года учрежденный въ этомъ году Статистическій отдѣлъ Департамента ж. дорогъ сталъ издавать особый „Сборникъ свѣдѣній о желѣзныхъ дорогахъ“, гдѣ данныя групировались въ слѣдующихъ 6 отдѣлахъ: 1) финансовыя свѣдѣнія, 2) издержки на устройство дорогъ, 3) путь и строенія, 4) подвижной составъ, 5) результаты эксплоатаціи, 6) разныя свѣдѣнія.

Въ 1873 году зашла рѣчь объ объединеніи всѣхъ видовъ административной статистики Россійской имперіи въ одномъ учрежденіи, но не междувѣдомственномъ, а въ Центральномъ Статистическомъ Комитетѣ М-ва внутренихъ дѣлъ. Какъ извѣстно, и тогда, какъ и теперь, такая централизація административной статистики не состоялась, и дѣло ограничилось только учрежденіемъ при М-вѣ внутреннихъ дѣлъ, по указаніямъ международныхъ статистическихъ конгресовъ, кромѣ исполнительнаго органа — Ц. Ст. Комитета — еще Статистическаго Совѣта. Министръ путей сообщенія тогда былъ противъ такого объединенія всѣхъ статистическихъ работъ главнымъ образомъ по тѣмъ соображеніямъ, что каждое министерство производитъ статистическія изысканія сообразно съ своими спеціальными цѣлями, на которыя центральное статистическое учрежденіе можетъ обращать мало вниманія.

Въ Высочайшемъ повелѣніи 2 августа 1873 года выражена была мысль о необходимости статистическихъ данныхъ для рѣшенія вопросовъ, какія мѣстности нуждаются въ улучшенныхъ путяхъ сообщенія. Тогда былъ сформированъ при министрѣ путей сообщенія особый Статистическій Отдѣлъ, разрабатывавшій данныя о движеніи грузовъ и пассажировъ какъ по ж. дорогамъ, такъ и по водянымъ и шоссейнымъ путямъ сообщенія. Свѣдѣнія о грузахъ, на всѣхъ видахъ путей, о фрахтахъ и тарифахъ стали издаваться съ 5-го выпуска „Сборника М-ва путей сообщенія“ послѣ новаго Высочайшаго повелѣнія 27 мая 1876, при чемъ избраны были для подсчета 37 главныхъ родовъ товаровъ, число которыхъ позже увеличилось до 51. Въ 1878 г. выработаны были формуляры и перечень предметовъ оффиціальной статистики по водянымъ путямъ и желѣзнымъ дорогамъ, издана инструкція для заполненія свѣдѣніями этихъ обязательныхъ формуляровъ и наказъ Статистическому Отдѣлу о сводкѣ и разработкѣ этихъ данныхъ, который утвержденъ былъ въ 1881 году. Улучшеніе формъ сводныхъ вѣдомостей для ихъ публикаціи послѣ обработки шло постоянно, и въ этомъ отношеніи Отдѣлу помогли и И. Р. Географическое Общество и съѣзды желѣзнодорожныхъ дѣятелей, избравшіе перманентную комиссію, дѣйствующую и до настоящаго времени по созыву съѣздовъ представителей ж. дорогъ и по изданію ихъ протоколовъ.

Всѣ эти учрежденія работали надъ установкою терминологіи желѣзнодорожной статистики въ области грузовъ, перевозимыхъ ж. дорогами, и формъ нормальнаго годового отчета. Номенклатура товаровъ, вращавшихся въ русскомъ грузооборотѣ, установлена была окончательно комиссіею при Государственномъ контролѣ въ 1888. Съ другой стороны и Министерство финансовъ, заинтересованное ходомъ счетовъ ж. дорогъ съ государственнымъ казначействомъ, также завело свой Департаментъ желѣзныхъ дорогъ, который въ 1893 году издалъ свою обязательную форму коммерческой отчетности по перевозкамъ желѣзныхъ дорогъ. Тутъ кромѣ тѣхъ же свѣдѣній объ эксплоатаціи подвижнаго состава и пробѣгѣ паравозовъ и вагоновъ, еще требовались свѣдѣнія о потребленіи топлива и т. п. Такъ разростались мало-по-малу подробности статистическихъ постоянныхъ разсчетовъ, кромѣ отдѣльныхъ спеціальныхъ работъ, вызывавшихся особыми обстоятельствами. Напр. послѣ 1890 года вслѣдствіе особыхъ осложненій въ хлѣбной торговлѣ требовалось доставлять полумѣсячныя вѣдомости о перевезенныхъ хлѣбныхъ грузахъ къ 42 пограничнымъ пунктамъ, а съ 1894— такія же вѣдомости за двѣ недѣли о движеніи соли, каменнаго угля, нефти и керосину и т. п.

Главное назначеніе ж. дорожной статистики кромѣ удовлетворенія временныхъ запросовъ по тому или другому явленію экономической жизни, все же заключается въ томъ, чтобы можно было рѣшить вопросъ,—какія техническія улучшенія необходимо произвести для улучшенія и ускоренія движенія какъ въ товарномъ, товаро-пассажирскомъ, пассажирскомъ и почтовомъ отдѣлѣ ихъ, не обременяя слишкомъ расходной кассы, и какія измѣненія въ тарифныхъ ставкахъ можно и нужно сдѣлать при возрастающемъ спросѣ на перевозку того или другого рода грузовъ и пассажировъ. Все это необходимо съ одной стороны для удовлетворенія нуждъ промышленности и торговли, а съ другой для привлеченія большаго количества тѣхъ или другихъ грузовъ или пассажировъ (при неуклонно развивающемся спросѣ на желѣзнодорожный транспортъ) и для увеличенія такимъ образомъ доходовъ. Если для первой цѣли пригодны такіе показатели, какъ поѣздо-верста, вагоно-верста, осе-верста и паровозо-верста, ведущія къ техническимъ улучшеніямъ въ расписаніи поѣздовъ, составъ ихъ изъ такого или иного числа вагоновъ съ тѣмъ или инымъ числомъ осей, въ уменьшеніи безполезнаго пробѣга на маневрахъ, при обратной отвозкѣ пустыхъ вагоновъ и т. п., то для цѣлой тарифной политики такую же службу могутъ сослужить показатели о пудо-верстахъ товаровъ и пассажиро-верстахъ въ мѣстномъ, прямомъ и транзитномъ движеніяхъ, въ четномъ и нечетномъ направленіяхъ, а также въ направленіяхъ наибольшаго и наименьшаго, или обратнаго движенія.

Статистика, дающая матеріалъ для всѣхъ подобныхъ разсчетовъ, должна быть поэтому организована такъ, чтобы абсолютныя числа ея давали возможность вывести всѣ указанные показатели *).

Статистика, по опредѣленію кіевскаго ученаго Журавскаго, есть наука категорическаго исчисленія. При дѣленіи наблюдаемыхъ ею феноменовъ на категоріи и классы, выступаетъ вопросъ о номенклатурѣ, имѣющій значеніе во всѣхъ трехъ стадіяхъ статисти-

---

*) Изученіемъ этихъ показателей по всей сѣти россійскихъ желѣзныхъ дорогъ и практическими выводами изъ нихъ въ настоящее время занимается спеціальная комиссія подъ предсѣдательствомъ г. Петрова. Цѣлью этой комиссіи является изслѣдованіе причинъ убыточности русскихъ ж. дорогъ. Очень можетъ быть, что въ результатѣ она прійдетъ къ тѣмъ же заключеніямъ по этому предмету, какія высказывалъ бывшій начальникъ Юго-Западныхъ желѣзныхъ дорогъ, а позже предсѣдатель Совѣта министровъ графъ С. Ю. Витте. По его мнѣнію главныя причины убыточности нашихъ желѣзныхъ дорогъ слѣдующія: постройка стратегическихъ линій (главнымъ образомъ Сибирской магистрали), преобладаніе въ управленіяхъ дорогъ техническаго направленія надъ экономическимъ при отсутствіи хозяйственности въ эксплоатаціи, т. е. большой ея дороговизны, а также к большихъ расходовъ при постройкахъ дорогъ. Очень можетъ быть, что это мнѣніе спеціалиста-практика въ желѣзнодорожномъ дѣлѣ и извѣстнаго финансиста имѣло вліяніе на предоставленіе съ 1905 года частнымъ обществамъ, строющимъ желѣзныя дороги, извѣстнаго рода льготъ. Онѣ состоятъ напр. въ томъ, что въ періодъ постройки дорогъ эти общества платятъ всего только 3% на занятый ими капиталъ; при этомъ Правительство можетъ выкупить дорогу въ государственную собственность черезъ 25 лѣтъ послѣ открытія движенія.

ческой желѣзно-дорожной работы: и при собираніи свѣдѣній, и при подсчетѣ и анализѣ ихъ, и при обобщеніи, т. е. при нужныхъ для практическихъ и теоретическихъ цѣлей разсчетахъ и выводахъ. Если въ первой стадіи будетъ сдѣлана неудачная групировка предметовъ счисленія, то это повлечетъ за собою затрудненія при обработкѣ и обобщеніи собранныхъ данныхъ. Числа паровозовъ, вагоновъ, осей въ нихъ, пассажировъ 1-го, 2-го и др. классовъ не могутъ представить никакихъ затрудненій при классификаціи ихъ по родамъ паровозовъ той или другой конструкціи, по вагонамъ пассажирскимъ, товарнымъ, платформамъ и т. п. Свѣдѣнія же о грузахъ, или товарахъ требуютъ особаго вниманія. Они въ быту человѣческомъ очень разнообразны. Много времени пошло на то, чтобы записать разныя наименованія и асфальта, и горчицы, и бочекъ, и бумаги, и соли, и шелковыхъ тканей, и табаку, и сахару, и книгъ, перевозившихся желѣзными дорогами; много труда употреблено было на классификацію грузовъ; при этомъ пришли къ заключенію, что списокъ товаровъ лучше всего вести по алфавиту названій, какія вошли въ употребленіе въ записяхъ. Такъ какъ ж. дорожная статистика оперируетъ главнымъ образомъ надъ товарами, то по необходимости приходится каждому статистику ознакомиться съ многочисленными ихъ названіями и существующею ихъ тарификаціею.

Если мы возьмемъ одинъ изъ номеровъ „Сборника тарифовъ россійскихъ желѣзныхъ дорогъ“, издаваемаго Департаментомъ желѣзныхъ дорогъ Министерства финансовъ тетрадками два раза въ недѣлю и разсылаемаго на всѣ станціи русскихъ желѣзныхъ дорогъ, то тамъ найдемъ всѣ распоряженія Правительства по тарифной части и самые тарифы, установляемые въ отмѣну прежде бывшихъ, а также и установляемыя Правительствомъ формы „относительно составленія, изданія и представленія статистики перевозокъ по желѣзнымъ дорогамъ пассажировъ и грузовъ“ съ примѣрными формами таблицъ для печатанія ихъ въ отчетахъ желѣзныхъ дорогъ. Формы эти и номенклатура грузовъ установлены были въ 1893 году, *) и затѣмъ дополняемы; существенно измѣнены онѣ въ 1908 **) рас-

*) Собраніе узаконеній и распоряженій Правительства 1893 № 145 и 1901 г. № 38.

**) Сборникъ тарифовъ № 2055, 24 декабря 1908.

поряженіемъ Министра отъ 13 декабря 1908 года. Во „временныхъ" правилахъ 1893 и въ позднѣйшихъ измѣненіяхъ этого законодательства указано, что всѣ казенныя и частныя желѣзныя дороги обязаны вести подробную статистику перевозки пасажировъ и грузовъ большой и малой скорости, а также грузовъ, перевозимыхъ по накладнымъ въ пассажирскихъ и товаро-пассажирскихъ поѣздахъ, придерживаясь точно установленной номенклатуры. Списокъ же названій (или номенклатура) раздѣленъ на категоріи, а категоріи на группы.

Эти категоризація и класификація по группамъ въ силу вышеуказаннаго условія держаться алфавитнаго порядка не могли быть введены въ порядокъ какихъ-нибудь родовъ, видовъ и подвидовъ грузовъ; такое затрудненіе встрѣчается и въ каталогахъ библіотекъ, гдѣ за найболѣе подходящую систему признана также алфавитная система. Поэтому противъ названій грузовъ, расположенныхъ въ алфавитномъ порядкѣ, проставлены №№ категорій и группъ.

Дѣленіе это создалось мало-по-малу, почему и здѣсь нужно обратиться къ исторіи постепенной выработки категоризаціи грузовъ. При возникновеніи Главнаго Общества Россійскихъ желѣзныхъ дорогъ грузы раздѣлены были на 3 разряда, при чемъ для перевозки грузовъ 1-го разряда была назначена плата $^1/_{12}$ коп. съ пуда и версты, для 2-го $^1/_{18}$ и для грузовъ 3-го разряда $^1/_{24}$ коп. съ пониженіемъ на 10%, при перевозкѣ ихъ свыше 200 верстъ, на 15%—свыше 500 верстъ и на 20%—свыше 1000 верстъ.

Къ *1-му разряду* были причислены: желѣзо, мѣдь, свинецъ и др. металлы не въ дѣлѣ, уксусъ, вина, водки, масло скоромное и олива, пряжа бумажная, шерстяныя издѣлья, полотно, костяныя издѣлья, всякое дерево (мѣстное и иностранное), сахаръ, кофе, чай, москательные и колоніальные товары, пряности, сѣра очищенная, мануфактура, устрицы, рыба и дичь свѣжая, перья, пухъ, книги, клей, фарфоръ, фаянсъ, растенія, фрукты, хмель, мебель, музык. инструменты, мѣха, зеркала, табакъ, свѣчи, оружіе, матеріи, кожи и кожевенные товары, стеаринъ и щетина;

ко *2-му разряду*: руды, древесный уголь, сѣра неочищенная, растительныя масла, сало, хлопчатая бумага, жженыя кости, бычачій рогъ, сырыя кожи, войлокъ, бибула и кровельная бумага, всѣ сортименты строевого лѣса, простыя деревянныя издѣлія, цыновки, мраморъ, камень тесовый, горная и древесная смола, деготь, аспидъ, чугунъ не въ дѣлѣ, желѣзо полосовое и листовое, свинецъ въ слиткахъ, стекло листовое, пенька, ленъ, холстъ простой, канаты, веревки, мороженная дичь, домашнія птицы, соленая рыба, свѣжее и соленое мясо, патока, сахарный песокъ, непрессованное сѣно;

къ *3-му разряду*: зерновой хлѣбъ, мука, огородныя овощи, соль, прессованное сѣно, пакля, тряпье, кости, известь, гипсъ, дрова, рогожи, лубки, сажа, известковый и гипсовый камень, булыжникъ, песокъ, глина, глиняная посуда, кирпичъ, керамическія издѣлія, коксъ, каменный уголь, рухлякъ, зола, удобрительные туки.

Какъ видно изъ перечисленія конечно не всѣхъ, а только нѣкоторыхъ грузовъ и безъ всякой системы, первые составители пользовались просто тѣмъ, что было предъявлено къ перевозкѣ въ большемъ или меньшемъ размѣрѣ, на большія или меньшія разстоянія, въ упаковкѣ и безъ упаковки, съ большею или меньшею трудностью при погрузкѣ, съ большею или меньшею цѣнностью груза и т. п. Трудно сказать, почему при началѣ были отнесены очень похожіе грузы и одинаково требующіяся въ торговлѣ въ разрядъ съ большею или меньшею стоимостью перевозки. Дальнѣйшая практика тарифной политики, основанная уже на указаніяхъ изъ дѣйствительной жизни, обнаруженныхъ статистикою, показала, что нельзя ограничиться только этими тремя разрядами. Кромѣ тарифныхъ ставокъ въ $^1/_{12}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, копѣйки стали мало по малу появляться ставки въ $^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_{15}$, $^1/_{30}$, $^1/_{36}$, $^1/_{40}$, $^1/_{45}$, $^1/_{65}$, $^1/_{75}$, $^1/_{100}$, и даже $^1/_{125}$ копѣйки съ пуда и версты. Такія и иныя платы съ пуда и версты разныя общества разныхъ дорогъ, конкурируя между собою, устанавливали сначала, руководясь соображеніями о выгодѣ своей кассы. Съ учрежденіемъ же въ 1889 г. Тарифнаго Комитета при Министерствѣ финансовъ стали приниматься во вниманіе интересы промышленности и торговли, т. е. отправителей и получателей грузовъ, указываемыя статистикою. Такъ какъ тогда появлялись уже разстоянія перевозокъ болѣе 1500 и 2000 верстъ, то и это обстоятельство принято было во вниманіе и послѣдовало уменьшеніе перевозныхъ платъ, или тарифныхъ ставокъ для многихъ грузовъ, которые въ спискахъ все болѣе и болѣе дифференцировались и по своимъ наименованіямъ и по величинѣ пробѣга. Когда стала работать великая Сибирская дорога, то въ 1903 послѣдовали пересмотры тарифовъ, повторившіеся въ 1908 и 1909 годахъ.

Нынѣшняя классификація грузовъ въ „Общемъ товарномъ тарифѣ“ содержитъ въ себѣ 129 группъ, изъ которыхъ первая (алебастръ) начинается съ буквы *А*, а послѣдняя занимаетъ послѣднее мѣсто въ алфавитѣ подъ буквою *Я* (яица и яичные желтки). Группы соединены по размѣрамъ провозной платы уже не въ 3 разряда, какъ было прежде, а въ 12 классовъ, при чемъ первый классъ (въ $^1/_8$ коп. съ пуда и версты) подраздѣленъ еще на два (по разстоянію перевозки до 400 и до 600 верстъ), и кромѣ самаго низкаго XII класса (съ платою по $^1/_{100}$ коп. съ пуда и версты) есть спеціальный классъ α — по $^1/_{125}$, коп. на всѣхъ разстояніяхъ перевозки.

Эти 14 тарифныхъ ставокъ ($^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{15}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, $^1/_{30}$, $^1/_{36}$, $^1/_{40}$, $^1/_{45}$, $^1/_{65}$, $^1/_{75}$, $^1/_{100}$, и $^1/_{125}$,) называются основными или начальными ставками для каждаго класса товаровъ; но при перевозкѣ грузовъ на далекія разстоянія установлены еще такъ называемыя „грани" этихъ разстояній, которыхъ на русскихъ дорогахъ считается 7: до 200 верстъ, отъ 201 до 400, отъ 401 до 900, отъ 901 до 1600, отъ 1601 до 2000, отъ 2001 до 4175 и свыше 4175. За провозъ того же груза, который имѣетъ свою начальную ставку дальше извѣстной грани разстоянія, взымается съ пуда и версты одна изъ послѣдующихъ меньшихъ ставокъ. Это сочетаніе высшихъ ставокъ съ низшими называется дифференціацією тарифовъ, а полученные такимъ способомъ сложныя ставки — „дифференціалами". Всѣхъ „дифференціаловъ" теперь установлено 53, и они еще раздѣляются на номерные (отъ № 1 по 47) и литерные, обозначаемые буквами А, Б, В, Г, Д, Е. Возникли они изъ того, что данныя статистическаго наблюденія указывали, что извѣстные грузы движутся на далекое разстояніе въ гораздо большемъ количествѣ, чѣмъ на близкія, почему для нихъ можно безъ убытка понизить плату за перевозку, оставивъ на ближнія разстоянія прежнія ставки и тѣмъ дать возможность напримѣръ сибирскимъ зерновымъ хлѣбамъ быть отправляемымъ къ портамъ Балтійскаго моря, тогда какъ этотъ грузъ не могъ бы выдержать такой далекой перевозки при платѣ за все разстояніе одной начальной ставки.

Въ составленіи дифференціаловъ не ограничивались указанными 14-тью ставками, а для разныхъ товаровъ на извѣстныхъ разстояніяхъ вставляли и другія, какъ напримѣръ, $^1/_{38}$, $^1/_{43}$, $^1/_{48}$, коп. и т. п.; также практиковали разныя степени пониженія. Та или иная степень пониженія платы за пудо-версту на извѣстное разстояніе (напримѣръ отъ 100 до 200, отъ 201 до 300 верстъ и т. д.), конечно не дѣлала пониженія платы на все разстояніе, такъ какъ за предыдущее разстояніе (до 100 до 200 верстъ и т. д.) берется большая плата, а плата за послѣдующее разстояніе прибавляется къ предыдущей. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ на извѣстномъ перегонѣ плата не измѣняется и берется не съ пудо-версты, а за все разстояніе перегона (т. е. не по $^1/_{55}$ напримѣръ съ пуда и версты, а по $3_{,30}$ коп. за все разстояніе напримѣръ въ 75—85 верстъ). Если такой случай изобразить на діаграммѣ, то выйдетъ, что на извѣстномъ разстояніи плата нарастаетъ, т. е. кривая діаграммы поднимается вверхъ, а на другихъ она остается горизонтальною; это послѣднее начертаніе называется „площадкою" на такомъ-то разстояніи. Такимъ образомъ получаются дифференціалы „безъ площадокъ" и „съ площадками". Въ первыхъ пониженіе тарифа на пудо-версту идетъ болѣе послѣдовательно, а во второмъ—съ нѣкоторыми перерывами; и для тѣхъ и для другихъ составлены особыя разсчетныя таблицы, которыми руководятся при назначеніи провозной платы за данный грузъ на извѣстное разстояніе.

Кромѣ классныхъ и дифференціальныхъ тарифовъ есть еще поясные тарифы, практикующіеся для взыманія платы съ пассажировъ (они представляютъ изъ себя по предыдущей терминологіи рядъ соединенныхъ „площадокъ"). За главную единицу измѣренія высоты платы здѣсь приняты пассажиры III класса, которые отъ версты платятъ теперь въ 3 раза меньше, чѣмъ пассажиры I класса и въ $1_{,75}$ разъ меньше пассажировъ II класса; пассажиры же IV класса платятъ вдвое меньше, чѣмъ пассажиры III класса. Пояса установлены слѣдующіе: 1) до 160 верстъ, гдѣ платятъ пассажиры III класса по $1_{,5}$ коп. отъ версты, слѣдовательно за все разстояніе въ 160 верстъ—2 руб. 40 коп. 2) во второмъ поясѣ (отъ 161 до 300 верстъ) къ этимъ $2_{,40}$ руб. прибавляется по 1 коп. за версту, т. е. за все разстояніе въ 300 верстъ—$3_{,80}$ руб.; 3) отъ 301 до 400 верстъ прибавляется 25 коп. за поясъ, 4) отъ 401 до 3010 верстъ—по 20 коп. за поясъ и т. д. Подобные же поясные тарифы примѣняются и къ грузамъ, слѣдующимъ съ пассажирскими и товаро-пассажирскими поѣздами.

Для пассажировъ и ихъ багажа есть еще особые тарифы такъ называемаго пригороднаго движенія, сезонные, навигаціонные, льготные и т. п.

Грузы, перевозимые по желѣзнымъ дорогамъ, какъ извѣстно, дѣлятся на грузы малой скорости, большой скорости и пересылаемые въ товаро-пассажирскихъ и пассажирскихъ поѣздахъ. Первые по вѣсовому количеству перевезенныхъ грузовъ въ послѣдніе годы идутъ въ такомъ порядкѣ: хлѣбъ (болѣе 1 милліарда пудовъ), каменный уголь, лѣсные сортименты, дрова, желѣзо, нефть, руды, соль, керосинъ, сахаръ, строительный камень, льняные и пеньковые полуфабрикаты. Эти 12 разныхъ грузовъ по вѣсу представляютъ болѣе половины всѣхъ грузовъ, перевозимыхъ русскими желѣзными дорогами, (и оттого они обыкновенно считаются „главными" предметами грузового движенія). Поэтому для хлѣбовъ, нефти, каменнаго угля, лѣсныхъ матеріаловъ и дровъ есть еще подраздѣленія категорій на подъкатегоріи (напр. хлѣбъ въ зернѣ по отдѣльнымъ культурамъ, мука, крупа, солодъ, хлѣбныя выжимки, хлѣбъ печеный и т. д.), а продуктовъ лѣсного хозяйства—на доски, брусья и др. сортименты, дрова, корни, пни, колья и т. п. При этомъ дѣленіи принимаются во вниманіе такіе признаки, какъ цѣнность грузовъ, количество ихъ, значеніе для промышленности и т. п. Среди хлѣбныхъ, лѣсныхъ и нефтяныхъ грузовъ различаются повагонныя перевозки отъ попудныхъ и т. д. Для узкоколейныхъ и подъѣздныхъ путей мѣстнаго значенія установлены отдѣльные тарифы, разнящіеся отъ тарифовъ на дорогахъ общаго значенія, что еще болѣе усложняетъ количество тарифныхъ ставокъ. Есть сверхъ того особые тарифы для воинскихъ тяжестей, тарифы прямого международнаго сообщенія по Бернской международной конвенціи 1890 года, спеціальныхъ сообщеній—русско-германскаго, русско-нидерландскаго, спеціальные тарифы Китайско-Восточной дороги и т. п.

Желѣзныя дороги, перевозя самые разнообразные товары, помогаютъ развитію торговли въ томъ отношеніи, что дѣйствуютъ безостановочно и даютъ возможность купцу, при скорой доставкѣ товаровъ на мѣста спроса и потребленія, оборачивать капиталъ, вложенный имъ въ торговлю, большее количество разъ, чѣмъ то могли дѣлать до проведенія дорогъ крупные негоціанты, которые должны были выжидать вскрытія рѣкъ, хорошей погоды, „оказій" и т. п. и могли полный оборотъ капитала своего совершать одинъ—два раза въ годъ, тогда какъ теперь и мелкіе торговцы оборачиваютъ его разъ пять-десять и болѣе въ годъ. Безостановочность передвиженія людей и грузовъ во всякое время года, дня и ночи дало въ руки желѣзно-дорожнаго хозяйства такія средства, о которыхъ не могли мечтать ни ганзейскіе союзы, ни гужевые караваны чумаковъ и которыя могутъ оказывать вліяніе на ходъ развитія не только экономической, но и политической жизни страны. Оттого многія государства стремились забрать въ свое монопольное вѣдѣніе дѣло желѣзно-дорожнаго хозяйства. Оплачивая проценты на прежде бывшіе акціонерные капиталы для постройки дорогъ, правительства этихъ государствъ, какъ мы видѣли, перенесли этотъ основной расходъ на общегосударственныя средства, и предоставили дороги для общаго пользованія всему населенію безъ малѣйшаго исключенія, какое могли дѣлать частныя компаніи. Но съ другой стороны цѣлью правительственнаго желѣзнодорожнаго хозяйства осталось не только возместить при помощи эксплоатаціи дорогъ текущіе эксплоатаціонные расходы на срочное, скорое (болѣе дешевое, чѣмъ гужевой транспортъ) и безостановочное передвиженіе грузовъ, но при помощи тарифной политики добиться и того, чтобы основные затраты на постройку этихъ путей сообщенія были когда-нибудь погашены изъ доходовъ самихъ дорогъ. Чистый доходъ желѣзныхъ дорогъ долженъ быть поэтому не меньше дохода, приносимаго государственными бумагами страны, съ тѣмъ чтобы строительный капиталъ могъ быть погашенъ. При этомъ только условіи могутъ возникать и частныя коммерческія предпріятія для расширенія существующей уже сѣти дорогъ правительственныхъ и частныхъ, имѣющихъ общее и мѣстное значеніе.

Слѣдя за развитіемъ экономической жизни, желѣзнодорожная статистика должна давать матеріалы тѣмъ, кто руководитъ тарифною политикою, не только къ свѣдѣнію, но и къ руководству. Вѣдь знать числа обращенія грузовъ въ томъ или иномъ количествѣ въ прямомъ или обратномъ направленіи нужно не только для отчета за прошлые годы, а и для того, чтобы для будущихъ лѣтъ получить вѣрныя соображенія о томъ, гдѣ и какъ на географическомъ протяженіи расширять сѣть желѣзныхъ дорогъ и улучшать уже существующіе пути и въ техническомъ и въ коммерческомъ смыслѣ. Нужно предвидѣть и увеличеніе ж. дорожнаго движенія, и соотвѣтствіе всѣхъ частей сложнаго желѣзнодорожнаго организма запросамъ измѣняющейся и развивающейся индустріально-коммерческой жизни. Нужно впередъ предвидѣть, гдѣ потребуется увеличеніе подвижного состава, гдѣ— замѣна его болѣе образованными служащими всѣхъ ранговъ отъ стрѣлочника до управляющаго, гдѣ потребуется строить новыя станціи или склады и элеваторы, сколько потребуетъ ремонтъ изнашивающихся орудій желѣзнодорожнаго производства, пополненіе числа паровозовъ, вагоновъ пассажирскихъ, товарныхъ, платформъ, но пополненіе такое, которое не превысило бы спроса на тѣ или другіе вагоны, чтобы затрата на ихъ сооруженіе не вышла безполезной и даже вредной. Нельзя спустя руки смотрѣть на статистическія указанія, что дефицитъ всѣхъ дорогъ государства съ каждымъ годомъ увеличивается, какъ то и было въ дѣйствительности въ два послѣднія десятилѣтія на русскихъ желѣзныхъ дорогахъ.

Тяжела и серьезна обязанность Статистики желѣзнодорожной, которая должна открыть коэффиціэнты періодическаго увеличенія движенія грузовъ въ разныхъ частяхъ территоріи, зависящаго отъ естественныхъ причинъ и отъ измѣненія условій соціальной жизни! Очень сложенъ и разнообразенъ матеріалъ для такихъ открытій, безъ которыхъ не можетъ существовать желѣзнодорожное хозяйство; а потому и Статистика эта сложна. Емкость станцій и складовъ, принимающихъ пассажировъ и грузы, провозоспособность дорогъ со всѣмъ ихъ подвижнымъ составомъ, пріемоспособность станцій назначенія, зависящее отъ этой обстановки число служащихъ на станціяхъ и по службѣ движенія, сила паровозовъ для перевозки опредѣлившагося для данной мѣстности и ожидаемаго въ будущемъ количества пассажировъ и грузовъ, составленіе извѣстнаго плана дѣйствій на ближайшее время,—всѣ эти вопросы могутъ быть разрѣшены только статистикою. Въ ней должны быть числа перевозимыхъ товаровъ, абсолютныя числа вагоновъ разныхъ разрядовъ, относительныя числа вагоновъ на версту всей дороги, на версту пройденнаго ими пути, количество пудо-верстъ малой, большой скорости, числа пудо-верстъ на 1 вагонъ, на 1 паровозъ, числа средняго пробѣга вагоновъ и паровозовъ въ теченіе года, въ теченіе того или другого сезона, мѣсяца, сутокъ и т. д. Всѣ поподобные данныя и разсчеты могутъ быть сдѣланы только на основаніи точныхъ ежедневныхъ записей и сводки ихъ въ предусмотрѣнныя таблицы.

Понятно, что и статистическая желѣзнодорожная служба опредѣлена строгими инструкціями: вѣдь если счетчики и счетчицы не успѣютъ за сегодняшній день посчитать всѣхъ полученныхъ со станцій свѣдѣній, то этого подсчета нельзя отложить на другой день, ибо онъ съ правильностью восхода и захода солнца принесетъ кипу донесеній съ тѣхъ же станцій въ томъ же примѣрно количествѣ, а можетъ быть и въ большемъ. Статистики не могутъ расходиться со службы, пока не подсчитаютъ всего, хотя бы пришлось пересиживать на нѣсколько часовъ урочное время. Особенность безостановочности движенія отзывается и на безостановочности статистической работы; а разнообразіе требующихся разсчетовъ о скорости движенія товарныхъ и пассажирскихъ поѣздовъ, скорости и срочности доставки грузовъ, распредѣленія ихъ по тарифнымъ ставкамъ, различая нормальныя ставки, специальныя, дифференціальныя, исключительныя и т. п., по родамъ и видамъ грузовъ, по станціямъ пріема ихъ и назначенія и т. п.— все это приводитъ къ раздѣленію труда счетчиковъ и статистиковъ. Оставляя въ сторонѣ данныя технической желѣзнодорожной статистики, мы остановимся только на организаціи статистики экономической, или, какъ она называется, *коммерческой*, и на способахъ полученія ею данныхъ для подсчета. О прочихъ отдѣлахъ жел.-дорожной статистики мы только упомянемъ, такъ какъ содержаніе ихъ выясняетъ для знакомыхъ съ статистическою техникою вообще и возможныя формы таблицъ и способы подсчета данныхъ для полученія тѣхъ или другихъ таблицъ. Кромѣ коммерческой статистики, вѣдающей данныя о перевозкѣ грузовъ и пассажировъ, есть еще статистика *оборота подвижного состава*. Данныя для нея получаются изъ записей въ службѣ движенія каждой дороги и съ отдѣльныхъ станцій о числѣ паровозовъ, поѣздовъ, вагоновъ, бывшихъ на станціяхъ въ опредѣленные часы каждаго дня и изъ путевыхъ журналовъ службы движенія. Сводятся они въ ежемѣсячныя вѣдомости, изъ которыхъ можно видѣть, какъ шелъ обмѣнъ поѣздовъ пассажирскихъ, товаро-пассажирскихъ, товарныхъ, воинскихъ, передаточныхъ и хозяйственныхъ (для нуждъ самой дороги). Числа о пробѣгѣ вагоновъ и паровозовъ показываются съ обозначеніемъ числа осей, работавшихъ для передвиженія какъ вагоновъ, такъ и платформъ, цистернъ и пр. Изъ чиселъ 16-ти годовыхъ вѣдомостей. сопоставляя ихъ съ ежемѣсячными данными этого рода, можно сдѣлать выводы о томъ, увеличился или уменьшился составъ поѣздовъ, полезный ихъ пробѣгъ и безполезный, отношеніе „тары" къ общему вѣсу грузовъ и числу пассажировъ. *) Конечные показатели этой статистики указываютъ, на сколько производи-

---

*) Выяснено так. обр. напр., что средній вѣсъ товарныхъ вагоновъ можетъ быть больше вѣса товаровъ, перевозимыхъ имъ, на 20—30%, а вѣсъ пассажирскихъ вагоновъ—въ 16 разъ болѣе вѣса перевозимыхъ ими пассажировъ и ихъ ручного багажа.

тельна была утилизація поѣздовъ, паровозовъ и вагоновъ, а это даетъ возможность технической желѣзнодорожной политикѣ уменьшать въ будущемъ безполезный пробѣгъ вагоновъ, паровозовъ и т. п.

Для удовлетворенія цѣлей хозяйственныхъ управленія каждой желѣзной дороги и всѣхъ вмѣстѣ служитъ статистика топлива, расходуемаго на движеніе, статистика шпалъ и др. принадлежностей ж. дорожнаго хозяйства (мебели на станціяхъ и т. д); статистика служащихъ и рабочихъ, статистика пенсіонныхъ кассъ служащихъ, санитарно-гигіеническая статистика, статистика происшествій и несчастныхъ случаевъ, числа людей убитыхъ и покалѣченныхъ при этихъ случаяхъ въ движеніи (при столкновеніи или разрывѣ поѣздовъ, сходѣ ихъ съ рельсовъ и т. п.) и внѣ движенія (случаи при нагрузкѣ, при земляныхъ работахъ, при пожарахъ и т. п). Эти отдѣлы желѣзнодорожной статистики ведутся по обычнымъ пріемамъ записей на особыхъ карточкахъ каждой единицы, принятой за счетную недѣлимую; они даютъ въ результатѣ указанія, имѣющія и общественное значеніе и техническое для принятія мѣръ, имѣющихъ въ виду усиленіе безопасности движенія и т. п. Но всѣ эти отдѣлы желѣзнодорожной статистики даютъ менѣе свѣдѣній для оцѣнки общеэкономическаго и коммерческаго значенія желѣзныхъ дорогъ данной страны. Наибольшее вниманіе экономистовъ могутъ привлекать данныя о перевозкѣ пассажировъ и грузовъ. На этомъ отдѣлѣ желѣзнодорожной статистики въ тѣхъ размѣрахъ и формахъ, въ какихъ они производятся на русскихъ дорогахъ, намъ слѣдуетъ остановиться болѣе подробно, ибо онъ даетъ ту громадную массу статистическаго матеріала, съ которою встрѣчается и комерсантъ и экономистъ въ изданіяхъ отдѣльныхъ дорогъ и въ „Сводной статистикѣ перевозокъ", издаваемой Департаментомъ желѣзнодорожныхъ дѣлъ, и наконецъ въ „Свѣдѣніяхъ о движеніи товаровъ по желѣзнымъ дорогамъ", издаваемыхъ Министерствовъ путей сообщенія.

Способъ полученія этого богатаго статистическаго матеріала изъ записей таковъ. Каждая станція для статистики *пассажировъ* доставляетъ въ управленіе дороги вѣдомости о числѣ проданныхъ и испорченныхъ билетовъ по классамъ I-IV съ обозначеніемъ станціи отправленія пассажира, и станціи назначенія съ передаточными пунктами въ прямомъ сообщеніи по нѣсколькимъ дорогамъ (напр. изъ Одессы въ СПБ.) и съ подраздѣленіемъ ихъ на цѣлые, разрѣзанные дѣтскіе, воинскіе, льготные билеты и т. п. Тутъ же указывается сумма выручки за проданные билеты пассажирамъ, за квитанціи на ихъ багажъ и багажъ-товаръ. Здѣсь слѣдовательно примѣняется и общій тарифъ, и пригородный, и международный; если были случаи перехода пассажира изъ низшаго класса въ высшій или съ пассажирскаго поѣзда въ курьерскій съ дополнительною приплатою, то и такіе случаи предусмотрѣны, для чего существуютъ особыя графы вѣдомостей. Большія станціи доставляютъ такія вѣдомости ежедневно, другіе два раза въ мѣсяцъ. а всѣ—ежемѣсячно. Въ разработкѣ эти основныя данныя даютъ возможность исчислить и средній пробѣгъ пассажировъ въ верстахъ, и число занятыхъ ими мѣстъ, и среднее число пассажиро-верстъ на 1 версту пробѣга и всѣ тѣ показатели, какіе нужны для соображеній управленія дороги о необходимости прокладки въ будущемъ второй колеи, увеличенія или уменьшенія подвижного состава для пассажирскаго движенія, и самое главное—для измѣненія въ томъ или другомъ направленіи тарифныхъ ставокъ, могущихъ увеличить или общее число пассажировъ того или другого класса, или длину ихъ пробѣга на пользу кассы желѣзной дороги, и для удовлетворенія развивающейся потребности передвиженія пассажировъ.

Ту же цѣль имѣетъ статистика *грузовъ* съ тою разницею, что она сложнѣе, ибо оперируетъ не надъ данными о 4-хъ только классахъ пассажировъ, а надъ многообразною номенклатурою товаровъ, ихъ группъ, и тарифами простыми и дифференціальными. Сверхъ того здѣсь, какъ и въ пассажирской статистикѣ, нужно различать товары малой скорости отъ товаровъ большой скорости и отъ товаровъ, отправляемыхъ съ пассажирскими поѣздами какъ багажъ.

Для этого употребляются и разноцвѣтныя карточки. Заполняются они или на станціяхъ, или при управленіи въ столахъ статистики грузовъ. На этихъ карточкахъ есть опредѣленныя мѣста для обозначенія № накладной, рода груза, времени его отправки, станцій отправленія и назначенія, пути слѣдованія и вѣса груза въ пудахъ. Составляемыя карточки, по общему правилу всякой статистики, провѣряются контролерами, и встрѣченныя ошибки отдаются для исправленія по накладнымъ или въ столы, гдѣ ихъ заполняютъ, или на станціи, откуда они получены. Для родовъ перевозки, т. е. мѣстнаго сообщенія, вывозного (т. е. на другія дороги), ввозного (съ другихъ дорогъ) и транзитнаго, практикуются также разноцвѣтныя карточки для облегченія раскладки ихъ при подсчетѣ (синія, бѣлыя, розовыя, зеленыя). Для отличія передаточныхъ грузовъ и для отличія грузовъ большой скорости отъ грузовъ малой скорости употребляются карточки разнаго формата.

Изготовляемыя для подсчета карточки раскладываются по такъ называемымъ позиціямъ, т. е. мѣстамъ, или кучкамъ, въ которыя складываются карточки съ одними и тѣми же отмѣтками рода грузовъ, станцій (или дорогъ) отправленія и назначенія и пути слѣдованія. Когда они разложены въ такія позиціи, остается подсчитать обозначенія на всѣхъ ихъ вѣса грузовъ и занести въ опредѣленныя таблицы (косыя), гдѣ помѣщаются суммы пудовъ разныхъ грузовъ, отправленныхъ и полученныхъ на разныхъ станціяхъ дороги (дорогъ). Такія мѣсячныя вѣдомости для движенія грузовъ большой и малой скорости имѣютъ еще графы для простановки итоговъ прошлаго года и графы для обозначенія знаками + и — насколько увеличилось или уменьшилось передвиженіе даннаго груза съ той или другой станціи отправленія на ту или другую станцію назначенія.

Мѣсячныя вѣдомости сводятся въ годовыя, имѣющія одну форму для всѣхъ желѣзныхъ дорогъ по отправленію и прибытію грузовъ мѣстнаго сообщенія, съ станцій и на станціи данной желѣзной дороги, на станціи и со станцій чужихъ дорогъ и наконецъ—по транзиту, т. е. со станцій чужихъ дорогъ на станціи также чужихъ дорогъ. Всѣ грузы въ статистикѣ дѣлятся на 3 категоріи: для болѣе интересныхъ грузовъ практикуются „косыя" таблицы съ большими подробностями (всѣ станціи своей или чужихъ дорогъ, путь слѣдованія и вѣсъ), для вторыхъ и третьихъ только станціи (или дороги) отправленія и назначенія, и даже только общая сумма пудовъ отправки. Конечно, болѣе интересными являются извѣстные уже намъ грузы: во первыхъ всѣ грузы малой скорости, 6 главныхъ хлѣбовъ, (а для юго-зап.-дорогъ—и кукуруза), соль, нефть, керосинъ, каменный уголь, строительные матеріалы и дрова.

Дальнѣйшая разработка состоитъ въ перемноженіи пудовъ на версты для полученія выраженій пудо-верстъ и пробѣга всѣхъ транспортированныхъ грузовъ. Дѣленіемъ числа пудо-верстъ на число пудовъ получаются еще такъ называемые пудо-грузы; дѣленіемъ пудо-верстъ на число вагоноверстъ получаются среднія величины нагрузки 1 вагона. Подобными же вычисленіями получаются средніе годовые пробѣги, пробѣги пудо-груза и т. п., что составляетъ также предметъ технической желѣзнодорожной статистики.

Разсмотрѣніе тѣхъ величинъ, какія историческимъ путемъ развитія желѣзнодорожнаго дѣла составили предметъ желѣзнодорожной статистики, указало намъ, что абсолютныя статистическія данныя текущей желѣзнодорожной жизни, перерабатываются по общимъ правиламъ статистическаго метода для моментовъ времени и пространства (территоріи) въ такіе показатели, которые могутъ служить для двухъ цѣлей: 1) для улучшенія механическихъ средствъ перевозки, а также и снабженія дорогъ большимъ или меньшимъ личнымъ персоналомъ служащихъ, необходимымъ для безопаснаго, безостановочнаго и скораго передвиженія товаровъ и пассажировъ и 2) для удовлетворенія нуждъ постоянно развивающейся промышленно-торговой жизни данной страны, соображаясь съ интересами развитія не только этой страны, но и съ условіями этого развитія въ сосѣднихъ странахъ —въ виду громаднаго значенія международнаго обмѣна для интересовъ каждой данной страны.

Если первая задача желѣзнодорожной статистики можетъ быть выполнена доставленіемъ технической желѣзнодорожной политикѣ показателей, или, какъ они называются, „измѣрителей" желѣзнодорожной работы въ видѣ поѣздо-верстъ, вагоно-верстъ, паровозо-верстъ и осе-верстъ, по которымъ можно судить о техническихъ условіяхъ, въ какихъ находятся въ настоящее время механическія средства перевозки, то для удовлетворенія запросовъ экономической желѣзнодорожной политики объ удовлетвореніи населенія разныхъ мѣстностей въ проявляемомъ имъ спросѣ расширенія желѣзнодорожной сѣти, эта статистика даетъ также достаточно матеріала. Разсчеты и первой и второй категоріи необходимо вести на будущее время въ такомъ направленіи, и тарифныя ставки на разные предметы перевозки руководясь данными статистики назначать такія, чтобы доходы по предусматриваемому количеству перевозокъ ихъ превышали расходы по эксплоатаціи дороги на такое количество денегъ, котораго стало бы и на погашеніе основного капитала, затраченнаго на постройку дороги. Послѣднее соображеніе имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда ж. дороги принадлежатъ не частнымъ компаніямъ, а государству, ибо хотя послѣднее и предоставляетъ пользованіе желѣзными дорогами всему населенію, но на самомъ дѣлѣ пользуются ими только извѣстные классы, а не все населеніе. При установленіи тарифовъ, какъ мы видѣли, нужно различать прямое и обратное движеніе грузовъ, импортъ, экспортъ, и транзитъ; это требованіе ставитъ особыя задачи экономической политикѣ, а слѣдовательно и статистикѣ жел. дорогъ.

На сколько серьезны и важны задачи этой статистики, можно видѣть изъ того, что одинъ параграфъ расходной смѣты русскихъ казенныхъ желѣзныхъ дорогъ, состоящій болѣе чѣмъ изъ 20 отдѣльныхъ статей, превышаетъ сумму въ 430 милліоновъ рублей, т. е. сумму, равную суммѣ бюджета небольшого государства. Этотъ параграфъ расходовъ по эксплоатаціи желѣзныхъ дорогъ подраздѣляется на группы статей (напр. по ремонту пути и зданій, по содержанію подвижного состава, по уплатамъ сосѣднимъ дорогамъ за пользованіе ихъ вагонами и т. п.); суммы числовыхъ показателей каждой изъ этихъ статей отличаются одна отъ другой по своимъ свойствамъ: однѣ—зависятъ отъ размѣровъ движенія и увеличиваются или уменьшаются хотя не вполнѣ пропорціонально, но соотвѣтственно увеличенію размѣровъ движенія, другія—не зависятъ отъ него. Размѣры движенія, опредѣляющіе и размѣры расходовъ, выражаются количествомъ пробѣга поѣздовъ въ составѣ извѣстнаго числа паровозовъ, вагоновъ пассажирскихъ и товарныхъ, числа осей въ тѣхъ и другихъ и нагрузки на каждую ось; послѣдняя измѣряется пудами, при чемъ различается вѣсъ нетто-груза и брутто-груза (т. е. тяжести перевозимыхъ предметовъ съ тяжестью самихъ вагоновъ и паровозовъ).

При этомъ выдѣленіи расходовъ, зависящихъ отъ размѣровъ движенія, изъ общихъ расходовъ какъ въ пассажирскомъ, такъ и въ товарномъ движеніи (въ первомъ напр. на отопленіе и освѣщеніе вагоновъ, во второмъ—на нагрузку, выгрузку, брезенты, веревки, пломбы, платы за пропажу товаровъ и т. п.) имѣется въ виду, что общая сумма ихъ будетъ впослѣдствіи дѣлиться на число верстъ пробѣга тѣхъ или другихъ вагоновъ и осей, на число верстъ всей дороги и т. п., умножаться на число пудовъ каждаго особаго предмета перевозки, чтобы получить пудо-верстные показатели расходовъ; расходы „зависящіе“ и „независящіе“ отъ движенія, относятся къ каждому отдѣльному грузу, имѣющему свою спеціальную провозную платежную способность. Сложность запросовъ экономической желѣзнодорожной политики приводитъ къ сложности статистическихъ классификацій и дѣйствій. Если мы пріймемъ во вниманіе указанную раньше особенность желѣзнодорожнаго транспорта, отличающую его отъ гужевого и водяного и состоящую въ томъ, что желѣзнодорожный транспортъ прикрѣпленъ къ данной территоріи, то увидимъ, что это закрѣпощеніе территорріею основного, или постояннаго капитала, затраченнаго на постройку дороги, въ желѣзнодорожной статистикѣ объединяетъ цѣли работы статистической—и техническіе, и коммерческіе, и общеэкономическіе. Предприниматель гужевого транспорта при бездоходности его предпріятія по недостатку перевозимыхъ предметовъ, положимъ, въ Минской губерніи, можетъ живой и мертвый инвентарь своего предпріятія (и лошадей, и возы, и служащихъ) передвинуть изъ этой губерніи въ губернію Кіевскую или Херсонскую, гдѣ спросъ на услуги транспорта больше; то же можетъ сдѣлать и пароходное предпріятіе перемѣстивши свои операціи, а съ ними и баржи и пароходы и служащихъ на нихъ изъ одного моря въ другое, изъ бассейна одной рѣки въ другую. Желѣзная дорога, фиксировавши область своей работы постройкою станцій и прикрѣпивши свою дѣятельность прокладкою рельсовъ къ извѣстной территоріи, должна по необходимости имѣть въ виду промышленно-торговые интересы населенія извѣстной полосы территоріи, къ которой она прикрѣпощена. Кромѣ того счета, какой ведутъ тѣ предпріятія, т. е. учета стоимости ремонта возовъ, баржъ, пароходовъ, содержанія лошадей и служащихъ въ водяномъ и гужевомъ транспортѣ, желѣзная дорога должна вести статистику индустріально-коммерческой жизни той мѣстности, какую она пересѣкаетъ. Это ставитъ желѣзнодорожную статистику въ тѣмъ большее соприкосновеніе съ общеэкономическою статистикою, что на постройку станцій и рельсоваго пути должны были быть затрачены знанія, трудъ и капиталы, которыхъ не нужно было затрачивать на суходолѣ при перевозкахъ вьючныхъ, телѣжныхъ, и на водяныхъ путяхъ сообщенія при перевозкахъ парусныхъ и пароходныхъ.

Связавши себя съ данною мѣстностью, желѣзная дорога своимъ существованіемъ вноситъ пертурбацію въ экономическую жизнь этой мѣстности. Примѣровъ для подкрѣпленія этого положенія искать не долго. Цензы С. Американскихъ штатовъ даютъ убѣдительныя числа въ этомъ смыслѣ. Въ 1850 году земледѣльческихъ фэрмъ на территоріи союза было 1.449 тысячъ, а стоимость ихъ съ постройками и живымъ и мертвымъ инвентаремъ выражалась суммою $3.967,_3$ милліоновъ долларовъ (именно: земля и постройки—$3,271,_5$ милліоновъ, живой инвентарь—$544,_2$ милліоновъ и мертвый инвентарь—$151_{,6}$ мил.); послѣ того какъ желѣзныя дороги дали возможность земледѣльцамъ проникнуть въ пустыни, гдѣ кочевали герои разсказовъ Купера и Майна-Рида, земледѣльческихъ фэрмъ въ 1900 году стало уже $5.737_{,3}$ тыс. съ цѣнностью имущества фэрмеровъ въ $20.439_{,9}$ милліоновъ (именно: $16.614_{,6}$ милліоновъ недвижимая собственность, $3.075_{,5}$ милліоновъ живой инвентарь и $749_{,8}$ милліоновъ долларовъ—мертвый инвентарь). На фермахъ 1850 было добыто земледѣліемъ изъ главныхъ растеній: жита 592 мил. бушелей, овса—$146_{,5}$ м., пшен.—$100_{,5}$. рису—$215_{,3}$ м. фунт., табаку—200 м. ф.; а по цензу 1900 года тѣ же растенія дали: жита 2.666 мил. бушелей, овса—$943_{,4}$ м., пшен.—$658_{,5}$, рису—$250_{,3}$ м. фунт., табаку—868 м. ф. Такое развитіе земледѣлія обязано постройкѣ желѣзныхъ дорогъ. Въ зависимости отъ ихъ постройки и расширенія земледѣлія шло и развитіе индустріи на территоріи С. Американскихъ штатовъ, которая выражалась въ 1850 году числами—123 тыс. промышленныхъ учрежденій съ капиталомъ въ $533_{,2}$ милліоновъ долларовъ, а въ 1900—уже $512_{,3}$ тысячъ учрежденій съ капиталомъ въ $9.831_{,4}$ милліоновъ долларовъ.

Въ частяхъ другого также грандіознаго государства, живущаго при совершенно иныхъ условіяхъ жизни экономической, политической и соціальной—въ Россійской имперіи, за болѣе короткій срокъ времени постройка желѣзныхъ дорогъ произвела также сильныя пертурбаціи экономической жизни, что можетъ удостовѣрить также статистика сопоставленіемъ рядовъ чиселъ при приложеніи метода сопутствующихъ измѣненій. На нашихъ глазахъ произошло „оскудѣніе центра“ этого государства, которое заставляло и Бориса Годунова, (пока этотъ центръ составлялъ все его государство), изучать географію и смотрѣть на южныя степи, какъ на спасительный резервуаръ для сохраненія средствъ продовольствія населенія, жившаго на мало-хлѣбородной почвѣ его государства, ставшаго нынѣ центромъ индустріальной жизни Россіи. Въ губерніяхъ Московской, Тверской, Ярославской, Костромской, Владимірской и Калужской на пространствѣ болѣе $^1/_4$ милліона квадратныхъ верстъ въ 1881 было подъ посѣвами $4^1/_2$ милліона десятинъ пахатной земли, а въ 1895, т. е. черезъ 14 лѣтъ, благодаря наибольшей густотѣ желѣзныхъ дорогъ, создавшихъ развитіе перерабатывающей промышленности и обратившихъ этотъ районъ въ фабрично-промышленный, территорія посѣвовъ уже было только $3^1/_2$ милліона десятинъ, т. е. уменьшилась на $22^0/_0$. Съ другой стороны территорія Новороссіи, гдѣ 1 десятина земли послѣ присоединенія ея къ Русскому государству продавалась за нѣсколько копѣекъ (что видно изъ сочиненія Скальковскаго о Новор. краѣ) на территоріи почти такой же величины земледѣліе сдѣлало громадные успѣхи: въ 4-хъ губерніяхъ Новороссіи (Бессарабской, Херсонской, Екатеринославской и Таврической), если вѣрить нашимъ статистическимъ даннымъ, въ 1864 году засѣвали $2^1/_2$ милліона четвертей зернового хлѣба, а въ 1894 (т. е. черезъ 30 лѣтъ)—уже $6^1/_3$ милліоновъ четвертей. Съ другой стороны проведеніе двухъ Екатерининскихъ дорогъ, соединившихъ каменноугольный и рудный районы Новороссіи за этотъ періодъ времени создало здѣсь широкую добывающую и перерабатывающую промышленность горнаго дѣла. Тарифная политика Юго-Западныхъ ж. дорогъ въ связи съ расширеніемъ сѣти подняла сахаро-рафинадную промышленность въ Юго-Западномъ краѣ и измѣнила направленіе земледѣлія: пониженіе въ концѣ 70-хъ и началѣ 80-хъ годовъ тарифныхъ ставокъ на перевозку свекловицы съ мѣстъ ихъ производства къ сахарнымъ заводамъ расширило площадь посѣвовъ свекловицы на этой сторонѣ Днѣпра; то же самое видимъ и въ области работы Либаво-Роменской желѣзной дороги, гдѣ для доставки свекловицы на Корюковскій сахаро-рафинадный заводъ въ настояшее время отводятся огромныя пространства подъ воздѣлываніе свекловицы. Для этого завода ее воздѣлываютъ не только въ Конотопскомъ и Борзенскомъ уѣздахъ Черниговской губерніи, но и въ Роменскомъ уѣздѣ, тогда какъ въ 70-хъ годахъ прошлаго столѣтія населеніе этихъ уѣздовъ занималось посѣвами овса, рапса, рыжея для отправки въ Либаву, а до проведенія Ландварово-Роменской ж. дороги совсѣмъ не знало куда сбывать свою рожь, пудъ которой, какъ видно изъ изслѣдованія профессора Яснопольскаго старшаго, въ 60-хъ годахъ стоилъ на мѣстѣ нѣсколько копѣекъ.

Такихъ фактовъ вліянія желѣзныхъ дорогъ на экономическую жизнь извѣстной мѣстности можно привести сколько угодно. Они показываютъ, что желѣзныя дороги порождаютъ тѣ виды промышленности, какихъ прежде въ данной мѣстности не было, и измѣняютъ географическое распространеніе того или другого вида промышленности. Желѣзнодорожная статистика должна слѣдить за ходомъ развитія этихъ видовъ какъ въ цѣляхъ упорядоченія актива и пассива желѣзнодорожнаго предпріятія, такъ и въ цѣляхъ болѣе плодотворной службы желѣзныхъ дорогъ нуждамъ населенія.

Такъ какъ главный доходъ желѣзныхъ дорогъ получается отъ перевозки не пассажировъ, а товаровъ, то и морфологія желѣзнодорожной статистики, примѣняясь къ тарифной номенклатурѣ и скорости движенія, составляетъ часть желѣзнодорожнаго товаровѣдѣнія, давая ему числовыя количественныя выраженія, опредѣляющія общій потокъ промышленно-торговаго развитія каждой страны. Такъ какъ тарифы у насъ въ Россіи въ зависимости отъ единицъ перевозки могутъ быть и поштучными (коровы) и попудными (хлѣбъ), и пообъемными (мебель), и повагонными, и поцистерными (нефть), по районамъ перевозки—внутренніе, прямые и международные, въ зависимости отъ времени—срочными, безсрочными, сезонными, отъ единицы пробѣга—дистанціонными, поясными, табличными, литерными, дифференціальными, поверстными и т. п., отъ рода и характера операцій съ грузами—общими, спеціальными, просто перевозочными и дополнительными, отъ скорости перевозки—почтовыми, багажными, большой и малой скорости и наконецъ въ зависимости отъ сорта грузовъ—тарифами наименованій 129 группъ и 4500 названій грузовъ, то изъ этого видно, что до настоящаго времени не могла создаться общая статистика всего свѣта. Для желѣзнодорожной статистики еще не было такого геніальнаго труженика, какимъ былъ Кэтлэ для демографической статистики. Оттого въ разныхъ государствахъ и системы тарифовъ, и номенклатура товаровъ, и экономическая желѣзнодорожная политика очень разнятся между собою. Тарифы французскіе на короткихъ разстояніяхъ напр. выше нашихъ, а на далекихъ—ниже; германскіе тарифныя ставки начальныя—ниже нашихъ, а среднія и конечныя—выше; тарифы большой скорости въ западно-европейскихъ государствахъ—выше русскихъ, ставки на сельско-хозяйственные продукты и продукты добывающей промышленности выше русскихъ, а на полу-фабрикаты и фабрикаты—ниже. И системы тарифной политики въ разныхъ странахъ также разнообразны: одни говорятъ, что понижать ставки нужно тогда, когда чистый доходъ ж. дороги выше $3^1/_2$—$4^0/_0$, что сѣть расширять нужно тогда, когда получается такой-то $^0/_0$ избытковъ чистаго дохода; другіе смотрятъ на это иначе. Можетъ быть эта разноголосица вполнѣ зависитъ отъ различія географическихъ, экономическихъ, политическихъ, соціальныхъ и др. условій, въ которыхъ находятся разныя страны. Можетъ быть и системы вознагражденія служащихъ разныхъ разрядовъ, число которыхъ въ Россіи кажется доросло до полумилліона, заботы о безопасности движенія, сацитарно-гигіенической обстановкѣ желѣзныхъ дорогъ и другія стороны ж. дорожнаго дѣла въ разныхъ странахъ очень различны. Можетъ быть, эти всѣ условія создали положеніе, при которомъ ни одинъ ученый еще не рѣшается заняться широкимъ синтезомъ того громаднаго статистическаго матеріала, который представляютъ милліоны статистическихъ таблицъ, издаваемыхъ желѣзнодорожными управленіями всего свѣта. Но работающіе въ области Желѣзнодорожной Статистики при утомительной механической работѣ въ канцеляріяхъ управленій ж. дорогъ могутъ утѣшать себя надеждою, что найдется когда-нибудь новый Кэтлэ, который изъ мелкихъ кирпичиковъ и почти даже мусора желѣзнодорожныхъ статистическихъ таблицъ создастъ изящное зданіе правилъ Общей Желѣзнодорожной Статистики.

А. Русовъ.

„Извѣстія Кіевскаго Коммерч. Института“

выходятъ 4—6 разъ въ годъ по мѣрѣ накопленія матеріала въ редакціи. Кромѣ оффиціальныхъ свѣдѣній о дѣятельности Института и состоящихъ при немъ учрежденій въ „Извѣстіяхъ“ помѣщаются и научные труды преподавателей Института.

Подписная цѣна на годъ для слушателей Института **2** руб. и для постороннихъ лицъ **3** руб. безъ пересылки (на пересылку 50 коп.).

Цѣна отдѣльной книжки **75** коп. для постороннихъ и **50** коп для слушателей.

Редакторъ **А. А. Русовъ.**

Изданія Кіевскаго Коммерческаго Института:

	ЦѢНА.
„Извѣстія Кіевскаго Коммерческаго Института“. Выходятъ 4 - 6 разъ въ годъ; цѣна **2** руб. **для студентовъ К. К. Института** и **3** руб. для постороннихъ; отдѣльныя книги	50 и 75 коп.
В. Г. Бажаевъ. Къ вопросу о законахъ аграрной эволюціи.	15
И. В. Егоровъ. Техническій анализъ. Кіевъ 1909 г.	2 р. —
Кэтлэ. Соціальная физика. Т. I. (Переводъ студентовъ Института)	2 р. —
Труды Общества экономистовъ при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ. Кіевъ. Вып. I 1910 г.	50 „
Труды Общества Экономистовъ. Кіевъ. Вып. II. 1910 . . .	1 р. —
И. В. Егоровъ. Объ окиси декаметиленгликоля.	10 „
Записка о Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ изд. **1909** г. .	15 „
Записка о Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ изд. **1910** г. .	25 „
Отчетъ о музеѣ товаровѣдѣнія при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ г. Кіевъ 1910 г.	25 „
Обозрѣніе преподаванія на 1911—1912 академическій годъ въ Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ. Кіевъ 1911 г.	20 „
М. В. Довнаръ-Запольскій. На зарѣ крестьянской свободы. Кіевъ. 1911	1 р —
Означенныя книги продаются у кассира Института; у него же продаются:	
М. В. Довнаръ-Запольскій. Изъ исторіи общественныхъ теченій въ Россіи, изд. 2-ое. Кіевъ 1910 г.	1 р. 50 „
Его-же. Русская Исторія т. I, изд. 2-ое	2 р. — „
„ т. II.	2 р. — „
Его-же. Изслѣдованія (этнографія и соціологія, обычное право и статистика). Кіевъ 1909 г.	3 р. „