ИЗВѢСТІЯ
Кіевскаго Коммерческаго
ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга XII.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Б.-Житомірская № 20, с. д.
1911.

від професора КНЕУ
В.М. Фещенко

ИЗВѢСТІЯ

Кіевскаго Коммерческаго

ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга XII.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Б.-Житомірская № 20, с. д.
1911.

ИЗВѢСТІЯ

Кіевскаго Коммерческаго

ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга XII.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Б.-Житомірская № 20, с. д.
1911.

Печатано по опредѣленію Учебнаго Комитета Кіев. Коммерч. Института.
Директоръ **М. Довнаръ-Запольскій.**

Содержаніе.

Уравненіе (1) § 2 имѣетъ видъ

$$a - 2x = 0,$$

откуда

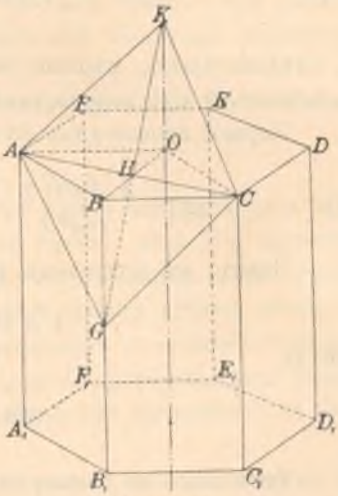
$$x = \frac{a}{2}.$$

Такъ какъ $f''(x) = -2 < 0$, то получается maximum функціи.

Мы получаемъ, слѣдовательно, прямоугольникъ со сторонами

$x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, т. е. квадратъ.

§ 5. *Задача.* Взята прямая правильная шестигранная призма съ параллельными основаніями. Длина стороны основанія есть a и высота призмы b. Обозначимъ черезъ $ABCDEF$ вершины верхняго основанія призмы (черт. 122). Черезъ три прямыя AC, CE и EA проводимъ сѣкущія плоскости, встрѣчающіяся въ одной и той же точкѣ K на оси призмы. Разсмотримъ тѣло, ограниченное боковыми гранями призмы, нижнимъ основаніемъ и тремя сѣкущими плоскостями. Очевидно, что объемъ этого тѣла равенъ объему первоначальной призмы, ибо объемъ пирамиды $AHCBG$ равенъ объему пирамиды $AHCOK$.



Черт. 122.

Требуется провести сѣкущія плоскости подъ такимъ угломъ, чтобы поверхность тѣла была наименьшая.

Очевидно, что третья часть поверхности состоитъ изъ двухъ трапецій A_1AGB_1 и C_1CGB_1 и ромба $GAKC$. Обозначимъ черезъ x уголъ срѣза BHG. Тогда, очевидно, будетъ

$$BH = \frac{a}{2},\ BG = \frac{a}{2}\,tg\,x,\ HC = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ GH = \frac{a}{2\cos x};$$

$$\text{пл.}\,\Delta GHC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8\cos x},$$

значитъ

$$\text{пл. } GAKC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos x};$$

$$\text{пл. } A_1 A G B_1 = \text{пл. } C_1 C G B_1 =$$

$$= \frac{(b - BG) + b}{2} \cdot a = \frac{4b - a\,tg\,x}{4} \cdot a.$$

Отсюда третья часть искомой поверхности, равная $A_1 A G B_1 + C_1 C G B_1 + GAKC$, выражается по формулѣ

$$\frac{4b - a\,tg\,x}{2} \cdot a + \frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos x} = 2ba + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos x} - tg\,x\right).$$

Итакъ, мы видимъ, что для нахожденія наименьшаго значенія послѣдняго выраженія достаточно найти наименьшее значеніе функціи

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} - tg\,x,$$

и, слѣдовательно, рѣшеніе задачи не зависитъ совершенно отъ размѣровъ a и b разсматриваемой призмы.

Первая производная функціи $f(x)$ выражается по формулѣ

$$(1) \qquad f'(x) = \frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}\sin x - 1}{\cos^2 x}.$$

Итакъ, мы получаемъ уравненіе

$$\sqrt{3}\sin x - 1 = 0,$$

откуда

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Такъ какъ по смыслу задачи уголъ x долженъ быть острымъ, то мы находимъ

$$x = \alpha = 35^0\,15'\,51'',8.$$

Чтобы показать, что получается дѣйствительно *minimum*, разсмотримъ вторую производную. Чтобы проще сдѣлать выкладку, перепишемъ уравненіе (1) такъ;

$$\cos^2 x\, f'(x) = \sqrt{3}\sin x - 1;$$

дифференцируя, получаемъ

$$-2\cos x \sin x\, f'(x) + \cos^2 x\, f''(x) = \sqrt{3}\cos x.$$

Подставляя сюда $x=\alpha$ и замѣчая, что $f'(\alpha)=0$, получаемъ

$$\cos\alpha\, f''(\alpha)=\sqrt{3}\,,$$

откуда

$$f''(\alpha)>0.$$

Интересно, что, какъ показываютъ наблюденія, пчелы дѣлаютъ ячейки своихъ сотъ очень близко къ тому виду, который получается по только что указанному рѣшенію, такъ что, повидимому, инстинктъ пчелъ заставляетъ ихъ достигать даннаго объема ячейки при наименьшей затратѣ матеріала воска.

§ 6. Разсмотримъ теперь задачу, составляющую сущность такъ называемаго *способа наименьшихъ квадратовъ*.

Въ наукахъ наблюдательныхъ при наблюденіяхъ и измѣреніяхъ всегда происходятъ неизбѣжныя ошибки. Цѣль раціонально проведенныхъ измѣрительныхъ методъ состоитъ въ достиженіи возможной малости этихъ ошибокъ. Такъ какъ неизбѣжныя ошибки наблюденій являются случайными, то обыкновенно при различныхъ испытаніяхъ получаются для искомой величины различныя числа.

Пусть нѣкоторая наблюдаемая величина x при рядѣ опытовъ получаетъ значенія

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n.$$

Является вопросъ о томъ, какое можно сдѣлать заключеніе о настоящей величинѣ x на основаніи чиселъ ряда (1). Конечно, если никакихъ данныхъ для рѣшенія этого вопроса, кромѣ указанія чиселъ (1), не существуетъ, то и нельзя сдѣлать никакого опредѣленнаго заключенія о дѣйствительномъ численномъ значеніи x. Приходится прибѣгать къ нѣкоторымъ произвольнымъ способамъ указанія такого значенія x, которое мы принимаемъ за наиболѣе для насъ подходящее.

Одинъ изъ самыхъ важныхъ пріемовъ, употребляемыхъ на практикѣ, это есть способъ наименьшихъ квадратовъ. Мы ищемъ такое значеніе x, чтобы сумма квадратовъ его уклоненій отъ чиселъ (1) было minimum, т. е., другими словами, имѣла minimum функція

$$f(x)=(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+(a_3-x)^2+\ldots+(a_n-x)^2.$$

Составляя производную, получаемъ

$$\frac{1}{2}f'(x)=-a_1-a_2-a_3-\ldots-a_n+nx.$$

Такъ какъ вторая производная будетъ опредѣляться изъ равенства

$$\frac{1}{2} f''(x) = + n$$

и будетъ положительна, то дѣйствительно, наша функція получаетъ minimum при такомъ значеніи x, которое удовлетворяетъ уравненію

$$-a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n + nx = 0,$$

т. е. при значеніи

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Итакъ, мы видимъ, что способъ наименьшихъ квадратовъ приводится къ выбору средней ариѳметической изъ наблюденныхъ величинъ.

Maxima и minima функцій многихъ перемѣнныхъ.

§ 7. Разсмотримъ функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

отъ n независимыхъ перемѣнныхъ. Если при нѣкоторой системѣ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ частныхъ значеній этихъ перемѣнныхъ имѣетъ мѣсто неравенство

$$(1) \qquad f(\xi_1 + h_1, \xi_2 + h_2, \ldots \xi_n + h_n) - f(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) < 0$$

при всѣхъ достаточно малыхъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ приращеній $h_1, h_2, \ldots h_n$, то значеніе $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ есть maximum функціи f.

Подобнымъ же образомъ при неравенствѣ

$$(2) \qquad f(\xi_1 + h_1, \xi_2 + h_2, \ldots \xi_n + h_n) - f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) > 0$$

имѣетъ мѣсто minimum функціи.

§ 8. Такъ какъ неравенства (1) или (2) предыдущаго §-а должны имѣть мѣсто при равенствахъ

$$h_2 = 0, h_3 = 0, \ldots h_n = 0,$$

то значеніе $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ должно быть maximum'омъ или minimum'омъ функціи $f(x_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ отъ одной перемѣнной x_1, т. е. должно быть

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Примѣняя тѣ же разсужденія къ другимъ перемѣннымъ независимымъ, получаемъ, какъ необходимыя условія maximum'a или minimum'a функціи $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, рядъ равенствъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \tag{1}$$

Другими словами, должно удовлетворяться равенство

$$df = 0.$$

§ 9. Требуется изслѣдовать относительно наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функцію

$$f(x, y) = ax^2 + 2\,b\,xy + cy^2.$$

Разсматриваемъ два уравненія

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} &= ax + by = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} &= bx + cy = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Первый случай. Если опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a, b \\ b, c \end{vmatrix} = ac - b^2 = \delta$$

не равенъ нулю, то получаются по уравненіямъ (1) значенія

$$x = 0, y = 0,$$

могущія давать maximum или minimum. Очевидно, что этотъ maximum или minimum будетъ равенъ нулю, ибо при $x = 0$, $y = 0$ заданная функція равна нулю.

Чтобы разсмотрѣть, который случай будетъ имѣть мѣсто на самомъ дѣлѣ, перепишемъ заданную функцію такъ:

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{1}{a}\left[(ax + by)^2 + \delta y^2\right]. \tag{2}$$

Если $\delta > 0$, то выраженіе въ квадратныхъ скобкахъ второй части уравненія (2) будетъ числомъ положительнымъ при всякихъ x и y, и мы получаемъ при $a > 0$ неравенство

$$f(x, y) - f(0, 0) > 0$$

и при $a < 0$

$$f(x, y) - f(0, 0) < 0.$$

Значитъ, $f(0, 0)$ есть maximum при $a < 0$ и minimum при $a > 0$.

Если же $\delta < 0$, то $f(0, 0)$ не maximum и не minimum, потому что, если положимъ $y = 0$, то при произвольномъ x знакъ разности

$$f(x, y) - f(0, 0) \tag{3}$$

будетъ совпадать со знакомъ числа a, если же возьмемъ такія близкія къ нулю значенія x и y, при которыхъ $ax + by = 0$, то знакъ разности (3) окажется обратнымъ знаку a. Слѣдовательно, при измѣненія x и y вблизи системы значеній 0, 0 разность (3) мѣняетъ свой знакъ, и, значитъ, $f(0, 0)$ не maximum и не minimum.

Второй случай. Положимъ

$$\delta = 0.$$

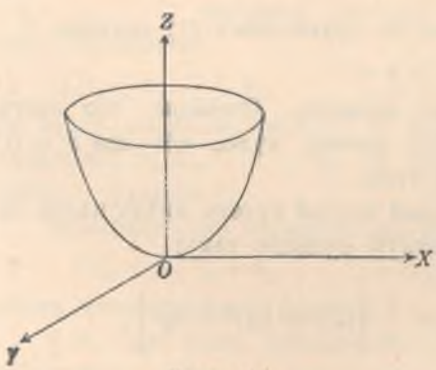
Тогда

$$f(x, y) = \frac{1}{a}(ax + by)^2.$$

Оказывается, что функція равняется нулю при всѣхъ значеніяхъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію

$$ax + by = 0, \tag{4}$$

причемъ равное нулю значеніе функціи будетъ minimum при $a > 0$ и maximum при $a < 0$.



Черт. 123.

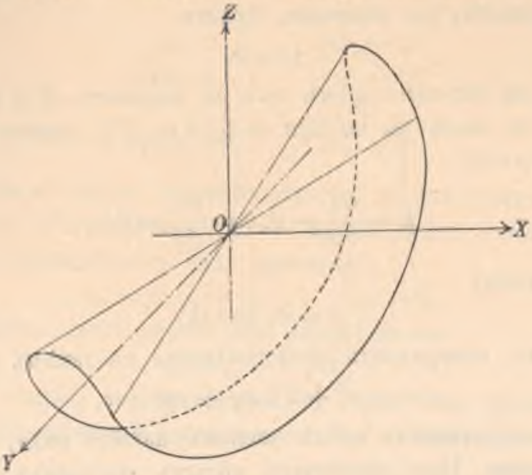
§ 10. Соображенія предыдущаго §-а могутъ быть иллюстрированы геометрически; разсмотримъ поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$z = ax^2 + 2\,b\,xy + cy^2.$$

Для опредѣленности рѣчи предположимъ неравенство $a > 0$. Тогда при $\delta > 0$ получаемъ поверхность, называемую эллиптическимъ параболоидомъ, касающуюся въ началѣ координатъ плоскости XY (черт. 123) и лежащую относительно этой поверхности съ той стороны, куда идетъ положительное направленіе оси

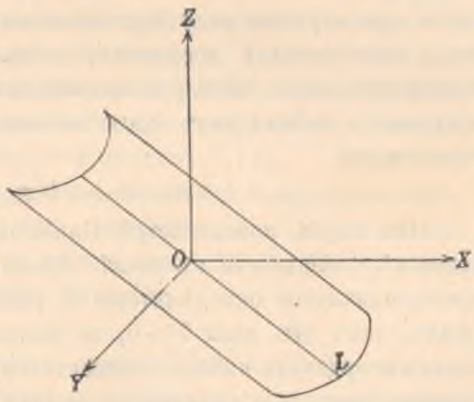
z-овъ. Minimum'у $z=0$ координаты z соотвѣтствуетъ, конечно, точка касанія.

Если $\delta<0$, то получаемъ поверхность (черт. 124), назы-



Черт. 124.

ваемую гиперболическимъ параболоидомъ и лежащую частью выше плоскости XY, частью ниже ея.



Черт. 125.

Наконецъ, при $\delta=0$ получается (черт. 125) цилиндрическая поверхность, касающанся плоскости XY по прямой OL, опредѣляемой уравненіемъ,

$$ax+by=0.$$

§ 11. Соображенія предыдущаго §-а играютъ большую роль въ теоріи кривизны поверхностей, ибо, раскладывая по формулѣ Maclaurin'а функцію отъ двухъ буквъ x и y, получимъ

$$f(x,y)=\rho+\alpha x+\beta y+ax^2+2\,b\,xy+cy^2+hx^3+\ \ldots,$$

такъ что всякая поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$z=f(x,y),$$

можетъ быть представлена уравненіемъ вида

$$z=\rho+\alpha x+\beta y+ax^2+2\,b\,xy+cy^2+hx^3+\kappa x^2 y+\ldots$$

Если мы возьмемъ начало координатъ въ нѣкоторой точкѣ этой поверхности, то, очевидно, будетъ

$$\rho=0.$$

Если мы возьмемъ кромѣ того за плоскость $X\,Y$ касательную плоскость, то, какъ мы видѣли въ § 58 гл. VI, должно получаться при $x=0, y=0$

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}=0, q=\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

откуда получимъ

$$\alpha=0, \beta=0.$$

Значитъ, поверхность представляется въ такомъ видѣ:

$$z=a\,x^2+2\,b\,xy+cy^2+\xi,$$

гдѣ ξ есть совокупность всѣхъ членовъ нашего ряда, начиная съ третьей степени. При достаточно малыхъ значеніяхъ координатъ x и y величина ξ есть безконечно малая, которой можно пренебречь при изученіи вида безконечно малой части заданной поверхности около начала координатъ, и мы можемъ сказать, что такая безконечно малая часть разсматриваемой поверхности около начала координатъ имѣетъ видъ соотвѣтственой безконечно малой части поверхности

$$z=ax^2+2\,b\,xy+cy^2.$$

Въ теоріи поверхностей Gauss'омъ введено было понятіе о кривизнѣ поверхности въ точкѣ. Gauss беретъ за кривизну число, пропорціональное опредѣлителю δ, разобранному въ предыдущихъ §§-ахъ, такъ что, если $\delta>0$, то мы говоримъ, что поверхность въ началѣ координатъ имѣетъ положительную кривизну. Если кривизна отрицательна, то поверхность имѣетъ сѣдлообразную форму и пересѣкается со своей касательной плоскостью. Наконецъ, если кривизна поверхности въ точкѣ, принятой за начало координатъ, равна нулю, то часть поверхности около этой точки имѣетъ видъ цилиндра.

Относительныя maxima и minima.

§ 12. Положимъ, что требуется найти maxima и minima функціи

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

гдѣ перемѣнныя независимыя связаны между собой слѣдующими k соотношеніями:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0. \end{aligned}$$

Если число всѣхъ перемѣнныхъ n, то изъ этихъ перемѣнныхъ будетъ обыкновенно $n - k$ независимыхъ, остальныя же будутъ ихъ функціями въ силу уравненій

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_k = 0.$$

Выяснивъ, какія именно изъ перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

мы будемъ считать независимыми, а какія ихъ функціями, мы получаемъ обыкновенный вопросъ о maxima и minima функціи $n - k$ перемѣнныхъ.

Такой способъ, однако, представляетъ неудобства, состоящія въ томъ, что иногда мы можемъ не сумѣть рѣшить систему (1) относительно какихъ нибудь изъ перемѣнныхъ. Даже въ тѣхъ случаяхъ, когда систему бываетъ возможно рѣшить, такое рѣшеніе можетъ, однако, усложнить задачу. Lagrange предложилъ методу, состоящую во введеніи k новыхъ параметровъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, и вся задача носитъ названіе *задачи на относительныя maxima и minima.*

Такъ какъ на основаніи равенства (1) всѣ функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ равны нулю, то вмѣсто заданной функціи f можно разсматривать maxima и minima функціи

$$f - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2 - \ldots - \lambda_k\varphi_k.$$

Приравнивая нулю частныя производныя, получимъ для нахожденія значеній независимыхъ перемѣнныхъ, могущихъ давать maxima и minima, n слѣдующихъ уравненій

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \ldots - \lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} - \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \ldots - \lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} - \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} - \ldots - \lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} = 0. \end{aligned}$$

Мы имѣемъ въ общемъ $n+k$ уравненій (1) и (2) съ $n+k$ перемѣнными независимыми

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k.$$

§ 13. Требуется найти maximum произведенія

$$f = x_1 x_2 \ldots x_n$$

при условіи

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a = 0,$$

причемъ всѣ x_i считаются положительными величинами.

Вводя одинъ новый параметръ λ, получимъ уравненія (2) предыдущаго §-а въ такомъ видѣ:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &x_2 x_3 \ldots x_n - \lambda = 0, \\ &x_1 x_3 \ldots x_n - \lambda = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_1 x_2 \ldots x_{n-1} - \lambda = 0. \end{aligned}$$

Умножая уравненія (2) по порядку на $x_1, x_2, \ldots x_n$, получаемъ

$$f = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \ldots = \lambda x_n,$$

откуда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

и на основаніи уравненія (1)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}.$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ получается maximum, то мы имѣемъ

$$x_1 x_2 \ldots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^n,$$

откуда

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} < \frac{a}{n}$$

или, наконецъ,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

т. е. *среднее геометрическое меньше средняго ариѳметическаго.*

Maxima и minima съ неравенствами.

§ 14. Весьма важными по частымъ приложеніямъ являются тѣ вопросы на maxima и minima, при которыхъ перемѣнныя независимыя кромѣ условій, выражаемыхъ равенствами, подчинены еще условіямъ, выраженнымъ неравенствами. Вопросы такого рода могутъ быть безконечно разнообразны. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ одного частнаго примѣра.

Найти наибольшее и наименьшее значеніи функціи

$$x^2+y^2+(x+y)^2,$$

когда перемѣнныя связаны условіями

$$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2.$$

Вводя новыя перемѣнныя ρ и ϑ при помощи равенствъ

$$x=\rho\cos\vartheta,\ y=\rho\sin\vartheta,$$

приводимъ задачу къ нахожденію maximum'а и minimum'а функціи

$$f=2\rho^2[1+\cos\vartheta\sin\vartheta]$$

при условіи

$$1 \leqq \rho^2 \leqq 2.$$

Мы получимъ, очевидно,

$$2\left[1+\frac{\sin 2\vartheta}{2}\right] \leqq f \leqq 4\left[1+\frac{\sin 2\vartheta}{2}\right].$$

Такъ какъ

$$-1 \leqq \sin 2\vartheta \leqq +1,$$

то получимъ окончательно

$$2\left[1-\frac{1}{2}\right] \leqq f \leqq 4\left[1+\frac{1}{2}\right]$$

или

$$1 \leqq f \leqq 6.$$

Значитъ, minimum будетъ $f=1$ при $2\vartheta=\frac{3}{2}\pi$ и $\rho^2=1$; этотъ minimum получается при

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Совершенно подобнымъ образомъ получается maximum $f=6$ при $2\vartheta=\frac{\pi}{2}$, $\rho^2=2$ или при

$$x=1,\ y=1.$$

Параллелограммъ Newton'a.

§ 15. Желая указать пріемы разложенія въ ряды алгебраическихъ функцій, Newton пришелъ къ рѣшенію одной особеннаго рода задачи на maxima и minima.

Пусть алгебраическое уравненіе, опредѣляющее y, какъ функцію отъ x, будетъ такого вида:

$$(1) \qquad A_1 x^{m_1} y^{n_1} + A_2 x^{m_2} y^{n_2} + A_3 x^{m_3} y^{n_3} + \ldots = 0,$$

гдѣ первая часть представляетъ собою сумму конечнаго числа слагаемыхъ.

Построимъ въ плоскости прямоугольныхъ координатъ точки, координатами которыхъ являются показатели при x и y въ одночленахъ, т. е. точки (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) . . . Показатели m_i и n_i мы предполагаемъ, очевидно, цѣлыми положительными числами или нулями.

Пусть y разложено въ рядъ по возрастающимъ степенямъ x

$$(2) \qquad y = \mathfrak{A} x^{\alpha} + \mathfrak{B} x^{\beta} + \ldots$$

Перепишемъ равенство (2) въ такомъ видѣ:

$$(3) \qquad y = \mathfrak{A}' x^{\alpha},$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} x^{\beta - \alpha} + \ldots$$

Очевидно, что

$$\lim_{x=0} \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}.$$

Подставляя выраженіе (3) въ уравненіе (1), получаемъ

$$(4) \qquad A_1 \mathfrak{A}'^{\,n_1} x^{m_1 + \alpha n_1} + A_2 \mathfrak{A}'^{\,n_2} x^{m_2 + \alpha n_2} + \ldots = 0.$$

Если число α указано такимъ образомъ, что въ рядѣ линейныхъ выраженій

$$(5) \qquad m_1 + \alpha n_1,\ m_2 + \alpha n_2,\ m_3 + \alpha n_3,\ \ldots,$$

стоящихъ въ показателяхъ, *одно* изъ этихъ выраженій, напримѣръ $m_i + \alpha n_i$, оказывается меньше всѣхъ остальныхъ, то по сокращеніи уравненія (4) на $x^{m_i + \alpha n_i}$ мы получимъ

$$(6) \qquad A_i \mathfrak{A}'^{\,n_i} + K_1 x^{\lambda_1} + K_2 x^{\lambda_2} + \ldots = 0,$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ суть положительные показатели. Тогда, подводя x къ нулю, получаемъ

$$A_i \mathfrak{A}^{n_i} = 0,$$

т. е.

$$\mathfrak{A} = 0,$$

и разложеніе (2) невозможно, ибо коэффиціентъ при первомъ членѣ равенъ нулю. Для того, чтобы разложеніе (2) стало возможнымъ, необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ два изъ линейныхъ выраженій (5) сдѣлались одинаковыми и меньшими всѣхъ остальныхъ. Такъ, напримѣръ, если будутъ одинаковы и меньше всѣхъ остальныхъ два первыхъ изъ числа выраженій (5), то, сокращая на $x^{m_1+\alpha n_1} = x^{m_2+\alpha n_2}$, получимъ

$$A_1 \mathfrak{A}'^{n_1} + A_2 \mathfrak{A}'^{n_2} + K_1 x^{\lambda_1} + K_2 x^{\lambda_2} + \ldots = 0.$$

Подводя x къ нулю, получаемъ

$$A_1 \mathfrak{A}^{n_1} + A_2 \mathfrak{A}^{n_2} = 0,$$

и тогда, если $n_2 > n_1$, то

$$\mathfrak{A} = \sqrt[n_2-n_1]{-\frac{A_1}{A_2}}.$$

§ 16. Итакъ, мы пришли къ задачѣ нахожденія такого значенія α, при которомъ два изъ выраженій

(1) $$m_1 + \alpha n_1, m_2 + \alpha n_2, m_3 + \alpha n_3, \ldots$$

дѣлаются равными между собою и не бо́льшими остальныхъ.

Такъ какъ выраженій (1) конечное число, то задачу можно рѣшить, очевидно, пробами. Можно взять изъ (1) два выраженія

(2) $$m_i + \alpha n_i \text{ и } m_\kappa + \alpha n_\kappa,$$

приравнять ихъ, т. е. положить

$$m_i + \alpha n_i = m_\kappa + \alpha n_\kappa,$$

откуда получится

(3) $$\alpha = \frac{m_i - m_\kappa}{n_\kappa - n_i},$$

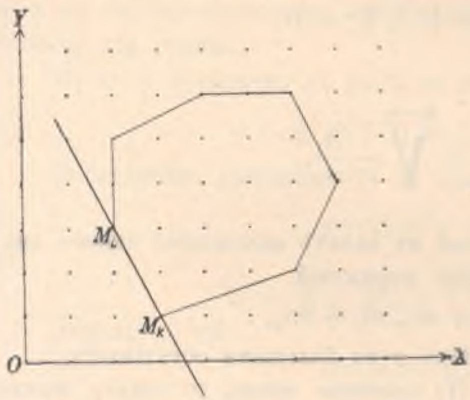
и подставить такое значеніе во всѣ выраженія (1). Если при этомъ дѣйствительно выраженія (2) окажутся не бо́льшими всѣхъ остальныхъ, то значеніе (3) для α будетъ однимъ изъ искомыхъ.

Newton далъ простое геометрическое правило, позволяющее избѣжать излишняго числа пробъ и прямо находить искомыя значенія α. Lagrange представилъ правило Newton'а въ аналитической формѣ. Сообщимъ здѣсь правило Newton'а.

Разсмотримъ картину всѣхъ точекъ $M_i(m_i, n_i)$, соотвѣтствующихъ показателямъ различныхъ членовъ заданнаго алгебраическаго уравненія. Легко убѣдиться, что, если пара выраженій (2) даетъ выраженіе (3) для α, рѣшающее задачу, то тогда прямая, соединяющая точки M_i и M_k, такъ расположена, что остальныя точки лежатъ выше ея. Разсмотримъ прямую линію

(1) $$x + \alpha y = \beta.$$

Очевидно, что α будетъ тангенсомъ угла, который прямая образуетъ съ осью y-овъ, а β будетъ абсцисса той точки, въ которой прямая пересѣкаетъ ось x-овъ. Тогда очевидно, что $m_i + \alpha n_i$ дастъ выраженіе β для прямой, имѣющей видъ (1) съ даннымъ угловымъ коэффиціентомъ α и проходящей черезъ точку M_i. Слѣдовательно, задача рѣшается при помощи такого направленія α, при которомъ два выраженія для β, соотвѣтствующія двумъ точкамъ M_i и M_k, одинаковы и не больше остальныхъ, а отсюда вытекаетъ слѣдующее геометрическое построеніе.



Черт. 126.

Проводимъ (черт. 126) такой многоугольный контуръ, вершинами котораго были бы нѣкоторыя изъ точекъ M_i, чтобы всѣ остальныя точки заключались внутри этого контура. Тогда тѣ изъ сторонъ контура, отсѣкающихъ на обѣихъ осяхъ положительные отрѣзки, относительно которыхъ контуръ и начало координатъ расположены по разныя стороны, даютъ рѣшенія выставленной задачи.

§ 17. Пояснимъ эту теорію на примѣрѣ. Требуется разложить по возрастающимъ степенямъ x функцію y, опредѣляемую уравненіемъ

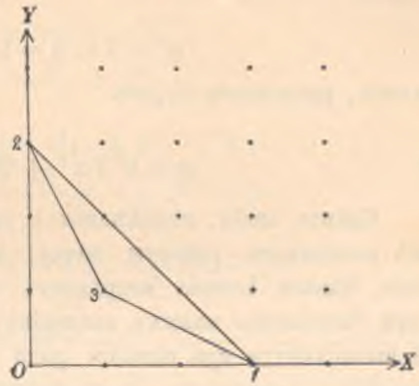
(1) $$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Получаемъ три точки (черт. 127). Точка 1 соотвѣствуетъ члену x^3, точка 2 члену y^3, точка 3 члену $-3\,xy$. Для опредѣленія показателя α, съ котораго начнется разложеніе

(2) $\quad y = \mathfrak{A}' x^{\alpha}$,

могутъ служить двѣ стороны (1, 3) и (2, 3). Линейныя выраженія (1) предыдущаго §-а для даннаго случая будутъ

(3) $\quad 3, 3\,\alpha, \alpha + 1$.



Черт. 127.

Сторона (1, 3) даетъ $3 = \alpha + 1$, т. е. $\alpha = 2$, и дѣйствительно, въ этомъ случаѣ выраженія (3) принимаютъ численныя значенія 3, 6, 3, такъ что выраженія для точекъ (1) и (3) оказываются равными между собою и меньшими, чѣмъ число 6 для точки (2). Подставляя выраженіе (2) въ уравненіе (1), получимъ

$$x^3 + \mathfrak{A}'^3 x^6 - 3\,x^3 \mathfrak{A}' = 0,$$

откуда, сокращая на x^3,

$$1 + \mathfrak{A}'^3 x^3 - 3\,\mathfrak{A}' = 0.$$

Подводя x къ предѣлу 0, найдемъ

$$3\,\mathfrak{A} = 1, \mathfrak{A} = \frac{1}{3}.$$

Значитъ, разложеніе y будетъ имѣть видъ

(4) $$y = \frac{1}{3} x^2 + \mathfrak{B} x^{\beta} + \ldots$$

Показатели β и коэффиціенты $\mathfrak{B}, \ldots$ опредѣлятся при помощи подстановки ряда (4) въ уравненіе (1) и подбора этихъ показателей и коэффиціентовъ для уничтоженія всѣхъ членовъ, чтобы уравненіе (1) дѣйствительно удовлетворялось.

Вторая сторона (3, 2) даетъ равенство

$$3\,\alpha = \alpha + 1,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

и тогда придется откинуть первый членъ и рѣшить уравненіе

$$y^3-3xy=0,$$

откуда

$$y^2=3x,\ y=\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}};$$

значитъ, разложеніе будетъ

$$y=\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}+\mathfrak{B}x^2+\ldots \tag{5}$$

Кривая линія, опредѣляемая уравненіемъ (1) имѣетъ въ началѣ координатъ узловую точку, въ которой пересѣкаются двѣ вѣтви. Вблизи начала координатъ численныя значенія ординаты y при безконечно малыхъ значеніяхъ x на одной изъ этихъ вѣтвей вычисляются при помощи ряда (4), а на другой при помощи ряда (5).

Чебышевскіе вопросы.

Функціи, наименѣе уклоняющіяся отъ нуля.

§ 18. Совершенно особаго характера вопросы на maxima и minima были поставлены и рѣшены П. Л. Чебышевымъ. Для характеристики этихъ вопросовъ рѣшимъ основную задачу Чебышева о нахожденіи цѣлой функціи степени n со старшимъ коэффиціентомъ, равнымъ единицѣ, при условіи, чтобы эта функція наименѣе уклонялась отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.

Чебышевъ показалъ, что такая функція для промежутка $(-1,+1)$ есть не что иное, какъ функція

$$f(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x). \tag{1}$$

Въ самомъ дѣлѣ, для вычисленія этой функціи (1) можно будетъ поступить такъ. Введемъ уголъ φ при помощи равенства $x=\cos\varphi$, тогда мы получаемъ

$$f(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\varphi.$$

Значитъ, функція Чебышева есть не что иное, какъ та цѣлая функція степени n, при помощи которой косинусъ кратной дуги $\cos n\varphi$ выражается черезъ косинусъ простой дуги $\cos\varphi$. Покажемъ, что старшій коэффиціентъ функція $\cos(n \arccos x)$ есть 2^{n-1}. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\cos\varphi = x, \cos(n \arccos x) = \cos n\varphi,$$
$$\cos\varphi + i\sin\varphi = x + \sqrt{x^2-1},$$
$$\cos\varphi - i\sin\varphi = x - \sqrt{x^2-1},$$

откуда

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (x + \sqrt{x^2-1})^n,$$
$$\cos n\varphi - i\sin n\varphi = (x - \sqrt{x^2-1})^n,$$

слѣдовательно,

$$\cos n\varphi = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} =$$
$$= p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots$$

Раздѣляя обѣ части уравненія на x^n, получимъ

$$p_0 + \frac{p_1}{x} + \ldots = \frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n}{2}.$$

Полагаемъ $x = \infty$, тогда

$$p_0 = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

Итакъ, старшій коэффиціентъ функціи (1) равенъ единицѣ.

Докажемъ теперь, что функція (1) есть наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, +1)$. Допустимъ, что въ этомъ промежуткѣ другая функція $\psi(x)$ менѣе уклоняется отъ нуля. Мы замѣчаемъ, что функція (1) уклоняется отъ нуля на величину $\frac{1}{2^{n-1}}$, такъ какъ наибольшая абсолютная величина функціи $\cos(n \arccos x)$ есть 1; это уклоненіе происходитъ при значеніяхъ

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi,$$

т. е. когда x принимаетъ значенія

(2) $$x_0 = 1, x_1 = \cos\frac{\pi}{n}, x_2 = \cos\frac{2\pi}{n}, \ldots$$
$$x_{n-1} = \cos\frac{n-1}{n}\pi, x_n = -1.$$

Такъ какъ значенія функціи $f(x)$ при значеніяхъ (2) перемѣннаго независимаго будутъ

$$\frac{1}{2^{n-1}}, -\frac{1}{2^{n-1}}, +\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots \frac{(-1)^n}{2^{n-1}},$$

то, слѣдовательно, если функція $\psi(x)$ уклоняется отъ нуля менѣе, чѣмъ Чебышевская функція, то будутъ существовать неравенства

$$\begin{aligned} f(x_0) - \psi(x_0) &> 0, \\ f(x_1) - \psi(x_1) &< 0, \\ f(x_2) - \psi(x_2) &> 0, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Итакъ, разность $f(x) - \psi(x)$ будетъ имѣть по крайней мѣрѣ одинъ корень во всѣхъ промежуткахъ

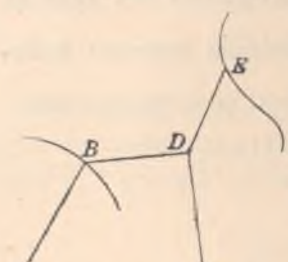
$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n),$$

что невозможно, ибо разность $f(x) - \psi(x)$ степени $n-1$, такъ какъ обѣ функціи $f(x)$ и $\psi(x)$ имѣютъ старшій коэффиціентъ, равный единицѣ. Итакъ, функція Чебышева (1) есть, дѣйствительно, функція, наименѣе уклоняющаяся отъ нуля изъ всѣхъ цѣлыхъ функцій степени n въ промежуткѣ $(-1, +1)$.

Приведенное доказательство принадлежитъ академику А. Маркову.

Механизмы Чебышева.

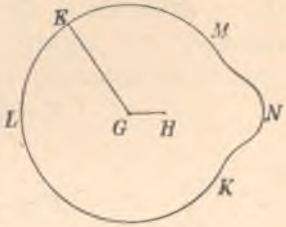
§ 19. Чебышевъ разсматривалъ различныя разновидности механизма такого рода, гдѣ A и C (черт. 128) суть точки, около которыхъ вращаются два рычага AB и CD. Въ точкахъ B и D къ этимъ рычагамъ при помощи шарнировъ прикрѣпленъ рычагъ BDE, представляющій собою два прямолинейныхъ стержня, скрѣпленныхъ другъ съ другомъ въ точкѣ D подъ опредѣленнымъ угломъ. Тогда, при вращеніи точки B по кругу радіуса BA около точки A, точка E описываетъ нѣкоторую кривую линію. При этомъ Чебышевъ показываетъ, что, измѣняя размѣры стержней AB, BD, DC, DE, а также уголъ BDE и разстояніе центровъ вращенія A и C, можно



Черт. 128.

достигнуть различныхъ родовъ полезныхъ для практики движеній точки E.

Особенное вниманіе Чебышевъ обращаетъ на тотъ случай, когда точка E описываетъ линію, мало уклоняющуюся отъ прямой. Затѣмъ также интересенъ случай, когда точка E описываетъ кривую линію вида $KLMN$ (черт. 129), въ которой часть KLM мало уклоняется отъ круга, такъ что если къ точкѣ E прикрѣпленъ на шарнирѣ стержень EG, равный радіусу того круга, отъ котораго мало уклоняется кривая линія, тогда точка G будетъ находится почти въ покоѣ, когда точка E описываетъ часть KLM, затѣмъ эта точка G испытаетъ внезапный толчекъ по направленію къ точкѣ H, когда точка E будетъ описывать часть MNK разсматриваемой линіи. Такимъ образомъ, этотъ механизмъ осуществляетъ при помощи системы рычаговъ, связанныхъ шарнирами, преобразованіе непрерывнаго круговаго движенія рукоятки B въ движеніе, сопровождающееся толчками.



Черт. 129.

На этомъ принципѣ была построена Чебышевымъ швырялка для сортировки зеренъ, которую онъ охотно демонстрировалъ своимъ гостямъ. Кромѣ того имъ былъ построенъ цѣлый рядъ оригинальныхъ механизмовъ, какъ напримѣръ тачка, въ которой переднее колесо замѣнено было ступающимъ механизмомъ съ двумя ногами, затѣмъ лодка съ особенными веслами и подвижной пюпитръ, прикрѣпляемый къ креслу, который двигался въ горизонтальной плоскость.

Несмотря на оригинальность замысла этихъ приборовъ, они имѣютъ мало практическаго значенія, и весь интересъ этихъ изслѣдованій состоитъ въ теоретической части, въ которой Чебышевъ рѣшалъ цѣлый рядъ весьма важныхъ и совершенно новыхъ вопросовъ о наименьшихъ и наибольшихъ величинахъ. Характерное свойство этихъ вопросовъ состоитъ въ ихъ связи съ теоріей алгебраическихъ непрерывныхъ дробей.

Теорема Чебышева о географическихъ картахъ.

§ 20. Въ § 13 гл. VII мы видѣли, что конформному изображенію одной плоскости на другой соотвѣтствуетъ нѣкоторая функція отъ комплекснаго перемѣннаго. То же самое можно сказать о конформномъ изображеніи любой поверхности. Разсмотримъ поверхность, опредѣляемую уравненіями

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \omega(u, v).$$

Тогда квадратъ дифференціала дуги на этой поверхности выразится по формулѣ

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

гдѣ

$$E = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2;$$

E, F и G суть, очевидно, нѣкоторыя опредѣленныя функціи отъ u и v.

Если мы выраженіе (1) приравняемъ нулю, т. е. напишемъ равенство

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0,$$

то, рѣшая относительно одного изъ дифференціаловъ, получимъ

$$du = \frac{-F \mp \sqrt{F^2 - GE}}{E}\,dv$$

или иначе

$$(2) \qquad Edu + dv(F \pm i\sqrt{GE - F^2}) = 0.$$

Возьмемъ въ уравненіи (2) верхній знакъ, т. е. напишемъ

$$Edu + dv(F + i\sqrt{GE - F^2}) = 0,$$

и пусть первая часть этого уравненія послѣ умноженія на нѣкоторый множитель μ обращается въ полный дифференціалъ. Значитъ

$$(3) \qquad d\xi = \mu\,[E\,du + dv\,(F + i\sqrt{GE - F^2})].$$

Обозначимъ черезъ μ_1 и ξ_1 тѣ значенія функцій μ и ξ, которыя получаются отъ замѣны $+i$ на $-i$. Тогда мы получимъ

$$(4) \qquad d\xi_1 = \mu_1\,[E\,du + dv(F - i\sqrt{GE - F^2})];$$

перемножая (3) и (4), получаемъ

$$(5) \qquad d\xi\,d\xi_1 = E\mu\mu_1\,ds^2.$$

Если мы вмѣсто криволинейныхъ координатъ u и v поверхности возьмемъ координаты ξ и ξ_1, то эти координаты носятъ названіе *симметрическихъ*, и говорятъ, что поверхность отнесена къ симметрическимъ координатамъ, если существуетъ формула (5).

Произведеніе $\mu\mu_1$ величинъ мнимыхъ сопряженныхъ есть величина вещественная. Если мы отдѣлимъ въ выраженіяхъ ξ и ξ_1 вещественную часть отъ мнимой, то мы получимъ

$$\xi = \alpha + i\beta; \xi_1 = \alpha - i\beta,$$

гдѣ α и β суть нѣкоторыя вещественныя функціи отъ первоначальныхъ координатъ u и v. Уравненіе (5) обратится въ такое:

$$ds^2 = \lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2), \tag{6}$$

гдѣ

$$\lambda^2 = \frac{1}{E\mu\mu_1}.$$

Перемѣнныя α и β носятъ названіе *картографическихъ координатъ* поверхности.

§ 21. Разсмотримъ изображеніе нашей поверхности, опредѣляемой картографическими координатами α и β, на плоскости XY. Изображеніе (нѣкоторая карта) получится, если X и Y будутъ заданы въ видѣ нѣкоторыхъ функцій отъ α и β,

$$X = \Phi(\alpha, \beta), \quad Y = \Psi(\alpha, \beta),$$

такъ что каждой точкѣ поверхности, опредѣляемой координатами α_0 и β_0, будетъ соотвѣтствовать опредѣленная точка карты съ прямоугольными координатами

$$X_0 = \Phi(\alpha_0, \beta_0), Y_0 = \Psi(\alpha_0 \beta_0).$$

Условіе подобія въ безконечно малыхъ частяхъ, какъ мы видѣли въ § 13 гл. VII, будетъ состоять въ томъ, чтобы отношеніе квадрата дифференціала дуги на картѣ

$$dX^2 + dY^2$$

къ квадрату длины дуги на поверхности

$$\lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2)$$

было нѣкоторой опредѣленной функціей отъ α, β, которую мы обозначимъ черезъ m^2, гдѣ m есть масштабъ карты, т. е. должно существовать уравненіе

$$dX^2 + dY^2 = n^2 (d\alpha^2 + d\beta^2), \tag{1}$$

гдѣ

$$n = m\lambda.$$

Умножая обѣ части равенства (1) на тождество

$$1 = cos^2 \omega + sin^2 \omega,$$

получимъ равенство

$$dX^2 + dY^2 = n^2 (cos\, \omega\, d\alpha - sin\, \omega\, d\beta)^2 + \\ + n^2 (sin\, \omega\, d\alpha + cos\, \omega\, d\beta)^2. \tag{2}$$

Вслѣдствіе произвольности ω, эта формула можетъ быть разбита на двѣ слѣдующихъ:

$$dX = n (cos\, \omega\, d\alpha - sin\, \omega\, d\beta), \\ dY = n (sin\, \omega\, d\alpha + cos\, \omega\, d\beta), \tag{3}$$

причемъ n и ω, конечно, надо подобрать такимъ образомъ, чтобы вторыя части въ равенствахъ (3) были полными дифференціалами.

Обозначая

$$n\, cos\, \omega = \xi,\ n\, sin\, \omega = \eta, \tag{4}$$

мы получаемъ

$$dX = \xi\, d\alpha - \eta\, d\beta, \\ dY = \eta\, d\alpha + \xi\, d\beta. \tag{5}$$

Умножая второе изъ уравненій (5) на $i = \sqrt{-1}$ и прибавляя къ первому или вычитая изъ него, получимъ

$$dX + i\, dY = (\xi + i\eta)(d\alpha + i\, d\beta), \\ dX - i\, dY = (\xi - i\eta)(d\alpha - i\, d\beta). \tag{6}$$

Такъ какъ правыя части уравненій (6) должны быть полными дифференціалами, то $\xi + i\eta$ должно быть нѣкоторой функціей отъ $\alpha + i\beta$, а $\xi - i\eta$ функціей отъ $\alpha - i\beta$. Полагаемъ

$$\xi + i\eta = f'(\alpha + i\beta), \\ \xi - i\eta = F'(\alpha - i\beta), \tag{7}$$

гдѣ $f(z)$ есть произвольно взятая функція отъ z, а $F(z)$ получается изъ $f(z)$ замѣной въ параметрахъ послѣдней $+i$ на $-i$. Представимъ уравненія (6) въ такомъ видѣ:

$$d(X + iY) = f'(\alpha + i\beta)\, d(\alpha + i\beta), \\ d(X - iY) = F'(\alpha - i\beta)\, d(\alpha - i\beta),$$

откуда, интегрируя, получаемъ

$$X + iY = f(\alpha + i\beta), \\ X - iY = F(\alpha - i\beta).$$

Отсюда окончательно формулы, выражающія конформное изображеніе заданной поверхности, получаются въ такомъ видѣ:

$$X = \frac{f(\alpha + i\beta) + F(\alpha - i\beta)}{2}, \\ Y = \frac{f(\alpha + i\beta) - F(\alpha - i\beta)}{2i}. \tag{8}$$

Перемножая уравненія (6), мы замѣчаемъ, что

$$dX^2 + dY^2 = (\xi^2 + \eta^2)(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

слѣдовательно на основаніи равенствъ (7)

$$\xi^2 + \eta^2 = f'(\alpha + i\beta)\,F'(\alpha - i\beta) = n^2 = \lambda^2 m^2,$$

откуда масштабъ m выражается по формулѣ

$$m = \frac{\sqrt{f'(\alpha + i\beta)\,F'(\alpha - i\beta)}}{\lambda}, \tag{9}$$

гдѣ λ^2 есть коэффиціентъ квадрата линейнаго элемента поверхности.

§ 22. Формулы (8) и (9) найдены Lagrange'емъ въ его знаменитомъ мемуарѣ о географическихъ картахъ. Lagrange поставилъ себѣ задачей найти функціи f и F для случая поверхностей вращенія такимъ образомъ, чтобы меридіаны и параллели изображались прямыми линіями или кругами. Въ случаѣ шара получилась такъ называемая *стереографическая* проекція, бывшая извѣстной еще древнимъ грекамъ.

Эта проекція получается такимъ образомъ. Проводится къ шару въ одномъ изъ его полюсовъ касательная плоскость. Тогда, если мы возьмемъ какую нибудь точку на шарѣ и соединимъ эту точку прямою съ противоположнымъ полюсомъ шара, то, продолжая эту прямую до пересѣченія съ касательной плоскостью, получимъ проекцію. Если будемъ, такимъ образомъ, всѣмъ точкамъ на шарѣ сопоставлять точки на плоскости, то каждой фигурѣ на шарѣ будетъ соотвѣтствовать ея проекція на плоскости. Указанное проектированіе и есть то, которое называется стереографической проекціей.

§ 23. Чебышевъ поставилъ себѣ другую задачу, подобрать функціи f и F такимъ образомъ, чтобы колебанія масштаба при плоскомъ изображеніи нѣкоторой страны, ограниченной контуромъ C, были наименьшія.

Если поверхность не навертывается безъ складокъ и разрывовъ на плоскость, то масштабъ не можетъ быть числомъ постояннымъ на картѣ. Онъ долженъ измѣняться отъ точкѣ къ точкѣ. Значитъ, какія бы функціи f и F мы ни выбирали, будетъ для каждаго выбора существовать нѣкоторое опредѣленное колебаніе внутри данной страны.

Назовемъ уклоненіемъ масштаба внутри данной страны разность между наибольшимъ и наименьшимъ значеніями этого масштаба. Чебышевъ высказалъ въ 1853 г. безъ доказательства такую теорему, относящуюся къ изображеніямъ шара на плоскости.

Уклоненіе масштаба будетъ наименьшимъ для такой карты, у которой масштабъ вдоль по границѣ изображаемой страны сохраняетъ постоянную величину.

Мнѣ удалось найти простое доказательство этой теоремы въ 1894 г. Краткое изложеніе этого доказательства сообщено было мною на конгрессѣ французской ассоціаціи, имѣвшемъ мѣсто въ гор. Caen въ августѣ 1894 г. и напечатано потомъ въ трудахъ конгресса. Въ послѣднее время я обобщилъ уже теорему Чебышева на случай произвольной поверхности.

§ 24. Здѣсь кстати я считаю необходимымъ упомянуть о моемъ рѣшеніи другой задачи, представлявшей серьезныя трудности, относящейся къ картамъ. Я рѣшилъ для *эквивалентныхъ* картъ задачу, подобную той, которая, какъ мы только что видѣли, была рѣшена Lagrange'емъ для конформныхъ картъ. Подъ картами эквивалентными разумѣются такія изображенія кривой поверхности на плоскости, въ которыхъ сохраняются всѣ площади, т. е., другими словами, площадь всякой криволинейной фигуры на поверхности точно равна площади соотвѣтственной фигуры на картѣ.

Возможность построенія такихъ картъ слѣдуетъ изъ такихъ соображеній. Пусть карта опредѣляется формулами

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),$$

гдѣ u и v криволинейныя координаты поверхности. Тогда площадь на картѣ изображается интеграломъ

$$\iint dx\,dy = \iint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) du\,dv.$$

Если мы желаемъ, чтобы площадь сохранилась на картѣ, то этотъ интегралъ долженъ точно равняться интегралу

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv,$$

т. е. должно быть уравненіе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \sqrt{EG - F^2}. \tag{1}$$

Оказывается, что измѣненіемъ криволинейныхъ координатъ u и v можно это уравненіе упростить

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 1. \tag{2}$$

Отъ рѣшенія этого дифференціальнаго уравненія (см. гл. X) и зависитъ, слѣдовательно, нахожденіе эквивалентныхъ картъ, сохраняющихъ площади. Въ статьѣ „Sur la construction des cartes géographiques", Journ. de math. Paris (5), 1,317 (1896) я далъ простой и общій способъ рѣшенія уравненія (2). Этотъ способъ состоитъ въ слѣдующемъ. Перепишемъ уравненіе (2) такъ:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=1, \tag{3}$$

и возьмемъ за новыя независимыя перемѣнныя x и v, а за ихъ функціи y и u. Тогда уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

и если мы обозначимъ черезъ $f(x,v)$ совершенно произвольную функцію, то уравненіе (4) можетъ быть рѣшено такъ:

$$\begin{aligned} y&=f'_x(x,v),\\ u&=f'_v(x,v). \end{aligned} \tag{5}$$

Вопросъ, который подлежитъ нашему рѣшенію, состоитъ въ нахожденіи произвольной функціи f такимъ образомъ, чтобы меридіаны и параллели изображались прямыми линіями и кругами. Мною вопросъ былъ рѣшенъ вполнѣ, т. е. найдены всѣ возможныя карты такого рода. Получилось 11 сортовъ проекцій, чертежи которыхъ помѣщены въ моей книгѣ „Объ основныхъ задачахъ математической теоріи построенія географическихъ картъ", Петербургъ, 1896.

Задача Менделѣева.

§ 25. Знаменитый русскій химикъ Менделѣевъ поставилъ слѣдующую задачу: найти предѣлы измѣняемости коффиціентовъ квадратнаго трехчлена

$$ax^2+2bx+c$$

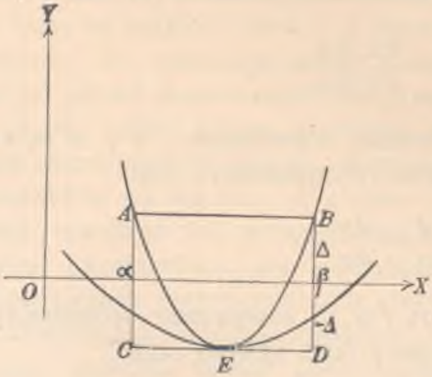
при условіи, чтобы этотъ трехчленъ не уклонялся отъ нуля болѣе, чѣмъ на величину Δ въ данномъ промежуткѣ (α, β).

Очевидно, достаточно разсматривать случай, когда коэффиціентъ a положителенъ. Задача сводится къ нахожденію предѣловъ коэффиціентовъ параболы

$$y=ax^2+2bx+c, \tag{1}$$

проходящей въ полосѣ между двумя прямолинейными отрѣзками AB и CD (черт. 130).

Рѣшеніе задачи оказывается слѣдующимъ. Наибольшее по абсолютной величинѣ значеніе коэффиціентовъ a, b, c получается для такой параболы, которая проходитъ черезъ двѣ точки A и B и касается стороны CD въ серединѣ E.



Черт. 130.

Для полученія коэффиціентовъ придется въ уравненіе параболы (1) подставить координаты точекъ A, B и E. Получаемъ

$$\Delta = a\alpha^2 + 2b\alpha + c,$$
$$\Delta = a\beta^2 + 2b\beta + c,$$
$$-\Delta = a\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 2b\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + c.$$

Рѣшая эти три уравненія относительно трехъ неизвѣстныхъ a, b, c, получаемъ для этихъ неизвѣстныхъ выраженія черезъ Δ, α и β. Разсмотримъ только выраженіе для перваго коэффиціента a; получается

$$a = \frac{8\Delta}{(\alpha-\beta)^2}.$$

Легко убѣдиться, что для всѣхъ параболъ, удовлетворяющихъ требованію Менделѣева, будетъ существовать неравенство

$$|a| \leq \frac{8\Delta}{(\alpha-\beta)^2}. \tag{2}$$

На девятомъ съѣздѣ естествоиспытателей и врачей я показалъ, что неравенства (2) и тѣ, которыя получаются для коэффиціентовъ b и c, могутъ быть указаны на основаніи простыхъ геометрическихъ соображеній. Я ограничусь доказательствомъ только неравенства (2).

Разсмотримъ кривизну въ вершинѣ параболы (1). Такъ какъ вершина параболы (1) есть ея нижняя точка, то въ выраженіи кривизны

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

будетъ $y'=0$, ибо вершина соотвѣтствуетъ minimum'у функціи y. Но съ другой стороны непосредственнымъ дифференцированіемъ уравненія (1) находимъ

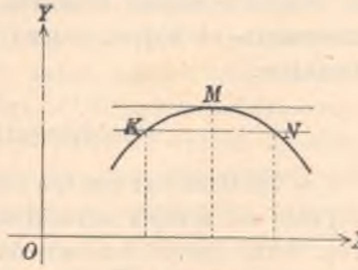
$$y''=2a,$$

слѣдовательно число $2a$ оказывается кривизною параболы. Изъ геометрическихъ соображеній очевидно, что изъ всѣхъ параболъ, проходящихъ между двумя отрѣзками AB и CD, наибольшую кривизну будетъ имѣть та, которая будетъ упираться въ эти отрѣзки. Слѣдовательно, будетъ всегда имѣть мѣсто неравенство (2).

Задача Менделѣева была обобщена академикомъ А. Марковымъ и его братомъ Вл. Марковымъ, ранняя смерть котораго (въ 26 лѣтъ) отняла отъ русской науки выдающагося ученаго. Вл. Марковъ въ бытность еще студентомъ написалъ замѣчательное сочиненіе, въ которомъ трактуетъ вопросы, подобные Менделѣевскому, и приходитъ къ новой замѣчательной теоремѣ алгебры, которую можно видѣть въ моемъ курсѣ алгебраическаго анализа.

Принципъ Fermat'a.

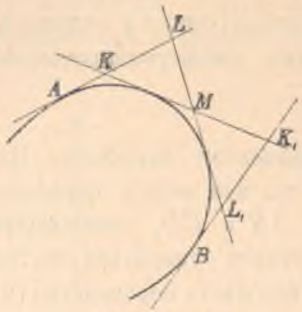
§ 26. Уже задолго до Newton'a и Leibniz'a давались пріемы для рѣшенія задачъ на maxima и minima. Я долженъ здѣсь обратить вниманіе на одинъ изъ такихъ пріемовъ, принадлежащій знаменитому Fermat'y. Этотъ пріемъ основанъ на томъ, что вблизи наибольшаго значенія функціи (въ точкѣ M) существуетъ два одинаковыхъ значенія функціи (въ точкахъ K и N) для двухъ безконечно близкихъ значеній независимаго перемѣннаго (черт. 131). Этотъ пріемъ даетъ часто возможность проще рѣшать задачи на maxima и minima, не прибѣгая къ выкладкамъ. Такъ, напримѣръ, изъ принципа Fermat'a получается непосредственно слѣдующая теорема.



Черт. 131.

Если задана сомкнутая кривая, то многоугольникъ, описанный около нея, будетъ имѣть наименьшую площадь въ томъ случаѣ, когда всѣ стороны его касаются замкнутой линіи серединами.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что около кривой линіи (черт. 132) описанъ нѣкоторый многоугольникъ, всѣ стороны котораго указаны, кромѣ одной KMK_1: Требуется провести эту послѣднюю сторону такимъ образомъ, чтобы площадь описаннаго многоугольника была наименьшей. По принципу Fermat'а около искомаго положенія послѣдней стороны должны существовать двѣ касательныя KMK_1 и LML_1, безконечно близкія другъ къ другу и дающія одинаковыя площади для многоугольника. Тогда должны быть равновеликими два треугольника KML и $K_1 ML_1$, т. е. должно быть



Черт. 132.

$$\frac{1}{2} KM \ . \ LM \ . \ \sin LMK = \frac{1}{2} K_1 M \ . \ L_1 M \ . \ \sin L_1 MK_1,$$

но $\angle LMK = \angle L_1MK_1$, слѣдовательно, получаемъ

$$KM \ . \ LM = K_1 M . L_1 M.$$

Сближая касательныя KK_1 и LL_1, мы получаемъ въ предѣлѣ

$$LM = KM; L_1 M = K_1 M,$$

откуда

$$KM^2 = K_1 M^2, \text{ т. е. } KM = K_1 M.$$

Другими словами, точка касанія M есть середина стороны KK_1.

§ 27. Изъ доказаной теоремы вытекаетъ, что изъ всѣхъ многоугольниковъ даннаго числа сторонъ, описанныхъ около круга, правильные имѣютъ наименьшую площадь. Совершенно подобнымъ же образомъ можно показать, что изъ всѣхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, только правильные обладаютъ наибольшей площадью.

Изопериметрическая задача.

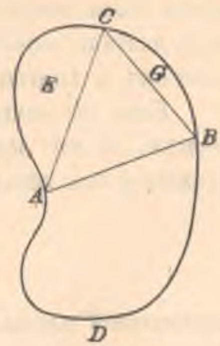
§ 28. Одна изъ самыхъ древнихъ задачъ съ ея разновидностями получила въ исторіи математики названіе *изопериметрической задачи*. Дѣло идетъ о нахожденіи сомкнутой линіи, имѣющей данный периметръ и наибольшую площадь.

Оказывается, что наибольшую площадь имѣетъ всегда наиболѣе симметричная фигура. Такъ, напримѣръ, мы видѣли, что изъ всѣхъ прямоугольниковъ даннаго периметра наибольшую площадь имѣетъ самый симметричный, т. е. квадратъ. Подобнымъ же образомъ изъ всѣхъ треугольниковъ даннаго периметра имѣетъ наибольшую площадь треугольникъ равносторонній.

Изъ всѣхъ ломанныхъ и кривыхъ линій даннаго периметра наибольшую площадь имѣетъ кругъ.

Steiner'у принадлежитъ слѣдующій замѣчательно простой способъ доказательства этого предложенія.

Пусть нѣкоторая сомкнутая линія (черт. 133) даетъ при данномъ периметрѣ наибольшую площадь. Раздѣлимъ точками A и B этотъ периметръ пополамъ. Тогда двѣ части ACB и ADB, на которыя площадь раздѣляется прямою, соединяющею точки A и B, должны быть равновелики, потому что, если, напримѣръ, площадь ACB будетъ больше площади ADB, то вмѣсто ADB мы можемъ взять новую линію, которая получится поворотомъ на 180^0 вокругъ оси AB площади ACB, и тогда выйдетъ фигура, имѣющая тотъ же периметръ, но бо́льшую площадь, что противорѣчитъ предположенію.



Черт. 133.

Итакъ, обѣ площади ACB и ADB должны быть одинаковы. Мы можемъ, слѣдовательно, изъ фигуръ, имѣющихъ данный периметръ и наибольшую площадь, выбрать симметричную относительно прямой AB, ибо можно будетъ откинуть площадь ADB и замѣнить ее площадью, которая получится черезъ опрокидываніе на 180^0 площади ACB около прямой AB. Возьмемъ теперь какую нибудь произвольную точку C на контурѣ и соединимъ ее прямыми съ точками A и B. Если наша фигура дѣйствительно даетъ наибольшую площадь, то уголъ ACB долженъ быть непремѣнно прямой, потому что, если этотъ уголъ не будетъ прямымъ, то можно будетъ построить фигуру съ тѣмъ же периметромъ, но имѣющую бо́льшую площадь. Эту фигуру можно такъ получить: построимъ новый треугольникъ $A_1\,C_1\,B_1$ съ прямымъ угломъ при точкѣ C_1, причемъ $A_1\,C_1 = A\,C$, $B_1\,C_1 = B\,C$. Тогда мы видимъ изъ элементарныхъ геометрическихъ соображеній, что треугольникъ $A_1\,B_1\,C_1$ имѣетъ площадь бо́льшую, чѣмъ треугольникъ ACB. Прикладывая къ сторонѣ $A_1\,C_1$ сегментъ E нашей фигуры, а къ сторонѣ $B_1\,C_1$

сегментъ G, мы получаемъ новую фигуру съ тѣмъ же периметромъ, но съ бóльшей площадью, что противорѣчитъ предположенію.

Итакъ, дѣйствительно, контуръ долженъ быть таковъ, что, если мы соединимъ прямыми съ точками A и B любую точку C этого контура, то уголъ при точкѣ C долженъ оказаться непремѣнно прямымъ. Отсюда слѣдуетъ, что контуръ долженъ быть кругомъ.

Варіаціонное исчисленіе.

§ 29. Разобранная въ предыдущемъ §-ѣ изопериметрическая задача была поводомъ къ изобрѣтенію новаго исчисленія, которое было названо *варіаціоннымъ*. Основы этого исчисленія изложены Euler'омъ и Lagrange'емъ.

Если мы нашу изопериметрическую задачу поставимъ аналитически, то мы замѣтимъ, что дѣло идетъ о нахожденіи такой функціи y отъ независимаго перемѣннаго x, при которой интегралъ

$$\int y\,dx,$$

выражающій площадь фигуры, будетъ наибольшимъ, а длина периметра фигуры, выражаемая интеграломъ

$$\int\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

сохраняетъ свою постоянную величину.

Итакъ, можно характеризировать варіаціонное исчисленіе какъ такое, которое даетъ пріемы нахожденія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ опредѣленныхъ интеграловъ вида

$$\int F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})\,dx,$$

гдѣ подинтегральная функція F есть функція отъ независимаго перемѣннаго x, нѣкоторой искомой функціи y и ея производныхъ $y', y'', \ldots y^{(n)}$, и вопросъ сводится къ нахожденію вида функціи y, дающей искомый maximum или minimum интеграла. Названіе исчисленія происходитъ отъ того, что мы варьируемъ (измѣняемъ) искомую функцію y, желая достигнуть наибольшей или наименьшей величины интеграла.

Варіаціонное исчисленіе обобщается также на случай двойныхъ интеграловъ, распространенныхъ на нѣкоторую область численныхъ значеній двухъ перемѣнныхъ x и y. Тогда ищется функція z такимъ образомъ, чтобы интегралъ вида

$$\iint F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ . \ . \ . \right) dx\, dy$$

получалъ наименьшее значеніе.

Варіаціонное исчисленіе получило въ послѣднее время серьезное усовершенствованіе своихъ пріемовъ послѣ выдающихся по значенію работъ Weierstrass'a и Hilbert'a.

ГЛАВА X.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

Исключеніе произвольныхъ постоянныхъ и функцій.

§ 1. Разсмотримъ уравненіе

$$y = F(x, c_1, c_2, \ldots c_n), \tag{1}$$

гдѣ F нѣкоторая заданная функція отъ перемѣнной независимой x и постоянныхъ произвольныхъ $c_1, c_2, \ldots c_n$. Дифференцируя n разъ по независимой перемѣнной x, получимъ рядъ равенствъ

$$\begin{aligned} y' &= F'(x, c_1, c_2, \ldots c_n), \\ y'' &= F''(x, c_1, c_2, \ldots c_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= F^{(n)}(x, c_1, c_2, \ldots c_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая изъ $n+1$ уравненій (1) и (2) n постоянныхъ произвольныхъ $c_1, c_2, \ldots c_n$, получимъ одно уравненіе вида

$$\Omega(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

связывающее функцію y, ея производныя и независимую перемѣнную.

§ 2. Возьмемъ, напримѣръ, общее уравненіе круговъ на плоскости

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2. \tag{1}$$

Для исключенія трехъ постоянныхъ произвольныхъ a, b, c будемъ это уравненіе три раза дифференцировать, считая y функціей отъ x, опредѣляемой этимъ самымъ уравненіемъ (1). Получаемъ

$$\begin{aligned} x - a + (y-b)\,y' &= 0, \\ 1 + (y-b)\,y'' + y'^2 &= 0, \\ (y-b)\,y''' + 3\,y'\,y'' &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для исключенія постоянныхъ произвольныхъ достаточны два послѣднихъ уравненія (2), и мы получаемъ

$$3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2) = 0. \tag{3}$$

§ 3. Если мы будемъ разсматривать функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, то является возможность при помощи дифференцированія исключать произвольныя функціи и получать соотношенія между частными производными. Напримѣръ,

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay), \tag{1}$$

гдѣ φ и ψ предполагаются произвольными функціями, первая отъ аргумента $x + ay$, вторая отъ аргумента $x - ay$, x и y независимыя перемѣнныя и a нѣкоторое заданное постоянное число. Дифференцируя два раза по x и два раза по y, получаемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \varphi'(x + ay) + \psi'(x - ay), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \varphi''(x + ay) + \psi''(x - ay), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= a\varphi'(x + ay) - a\psi'(x - ay), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= a^2\varphi''(x + ay) + a^2\psi''(x - ay). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Изъ уравненій (2) и (3) можно исключить вторыя производныя, и мы получаемъ уравненіе

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

выражающее связь между частными производными послѣ исключенія произвольныхъ функцій.

§ 4. Если уравненіе, выражающее зависимость функціи отъ независимыхъ перемѣнныхъ, заключаетъ постоянныя произвольныя или произвольныя функціи, то черезъ исключеніе ихъ получается уравненіе, которое называется *дифференціальнымъ уравненіемъ* разсматриваемой функціи. Такъ, напримѣръ, въ § 1 уравненіе (3) есть дифференціальное для функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (1); въ § 2 уравненіе (3) есть дифференціальное уравненіе, характеризующее всѣ круги на плоскости, и, наконецъ, въ § 3 уравненіе (4) есть дифференціальное уравненіе для функціи z, опредѣляемой уравненіемъ (1).

Если дифференціальное уравненіе заключаетъ функцію y отъ одной независимой перемѣнной x и ея производныя по этой независимой перемѣнной, то оно называется *обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ*, напримѣръ, уравненія (3) въ §§ 1 и 2. Если же дифференціальное уравненіе заключаетъ частныя производныя функціи многихъ перемѣнныхъ, то оно называется *дифференціальнымъ уравненіемъ въ частныхъ производныхъ*.

§ 5. Обратный процессъ возстановленія по заданному дифференціальному уравненію первоначальнаго уравненія съ произвольными постоянными или произвольными функціями носитъ названіе *интегрированія дифференціальнаго уравненія*, причемъ то первоначальное уравненіе, которое заключаетъ эти произвольныя постоянныя или функціи, опредѣляетъ функцію самаго общаго вида, удовлетворяющую дифференціальному уравненію, и носитъ названіе *общаго интеграла*.

То рѣшеніе дифференціальнаго уравненія, которое получается при заданіи частныхъ значеній постояннымъ произвольнымъ или произвольнымъ функціямъ, носитъ названіе *частнаго рѣшенія* дифференціальнаго уравненія. Напримѣръ, если мы положимъ въ равенствѣ (1) § 3 $\varphi(t) = t^2, \psi(t) = t^2$, то получимъ

$$z = (x + ay)^2 + (x - ay)^2,$$

т. е. получаемъ частное рѣшеніе

$$z = 2(x^2 + a^2 y^2)$$

дифференціальнаго уравненія

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 6. Часто существуютъ у дифференціальныхъ уравненій такъ называемыя *особенныя рѣшенія*, которыя не получаются изъ общаго интеграла при помощи выбора произвольныхъ постоянныхъ или произвольныхъ функцій. На существованіе такихъ особенныхъ рѣшеній обратилъ вниманіе впервые Euler, основатель и творецъ всей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій, изложенной имъ въ четырехтомномъ трактатѣ „Institutiones calculi integralis". Euler замѣтилъ существованіе особенныхъ рѣшеній на рядѣ задачъ, взятыхъ изъ механики и связанныхъ съ интегрированіемъ дифференціальныхъ уравненій. Существованіе такихъ рѣшеній ему казалось сначала фактомъ парадоксальнымъ, между тѣмъ какъ бываютъ случаи, когда особенное рѣшеніе даетъ настоящій отвѣтъ на задачу, рѣшаемую разсматриваемымъ дифференціальнымъ уравненіемъ. Первая общая теорія особенныхъ рѣшеній была дана Lagrange'емъ.

§ 7. Чтобы показать на простомъ примѣрѣ значеніе особенныхъ рѣшеній, разсмотримъ такую задачу. Требуется найти такую кривую линію на плоскости, чтобы разстояніе начала координатъ отъ всѣхъ касательныхъ къ ней было равно постоянному числу a.

Такъ какъ уравненіе касательной къ линіи имѣетъ видъ

$$\eta - y - y'(\xi - x) = 0,$$

то, выражая равенство числу a разстоянія этой касательной отъ начала координатъ, получаемъ

$$\frac{0 - y - y'(0 - x)}{-\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

откуда получается дифференціальное уравненіе

(1) $$y - y'x = a\sqrt{1 + y'^2}$$

искомой кривой линіи. Для интегрированія этого уравненія, продифференцируемъ его по x; тогда будемъ имѣть

$$-y''x = \frac{a\,y'\,y''}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

или иначе

$$y''\left[x + a\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right] = 0.$$

Возможны два предположенія:

(3) $$y'' = 0,$$

(4) $$x + a\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

Предположеніе (3) ведетъ къ нахожденію общаго интеграла, а именно, интегрируя уравненія (3), получаемъ

$$y' = \alpha,$$

гдѣ α постоянное число. Переписывая послѣднее уравненіе въ видѣ

$$dy = \alpha\,dx$$

и интегрируя, получимъ окончательно

(5) $$y = \alpha x + \beta,$$

гдѣ β также постоянная величина.

Получилось тривіальное и неинтересное само по себѣ рѣшеніе задачи, состоящее въ томъ, что всякая прямая линія, если разстояніе ея отъ начала координатъ равно числу a, будетъ служить рѣшеніемъ задачи. Для того, чтобы подобрать постоянныя α и β въ уравненіи (5) такъ, чтобы разстояніе отъ начала координатъ равнялось a, придется положить

$$\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} = a,$$

откуда получается общій интегралъ

(6) $$y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2},$$

выражающій прямую линію и заключающій одно постоянное произвольное α.

Чтобы убѣдиться, что уравненіе (6) дѣйствительно есть общій интегралъ разсматриваемаго уравненія (1), достаточно исключить постоянное произвольное α при помощи дифференцированія. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе (6) по x, получаемъ

(7) $$y' = \alpha,$$

исключая же α изъ уравненій (6) и (7), получимъ какъ разъ уравненіе (1).

Изъ геометрическихъ соображеній мы догадываемся уже, что кривыхъ линій, рѣшающихъ нашу задачу, существуетъ только одна, а именно кругъ радіуса a, имѣющій центръ въ началѣ координатъ. Такъ какъ этотъ кругъ, очевидно, нельзя получить изъ уравненія прямой (6) никакимъ выборомъ постоянной α, то, слѣдовательно, этотъ кругъ, представляющій настоящее рѣшеніе задачи, является особеннымъ рѣшеніемъ разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія. Это особенное рѣшеніе мы получимъ, разсматривая равенство (4). Въ самомъ дѣлѣ, простая выкладка исключенія производной y' изъ двухъ уравненій (1) и (4) приводитъ насъ къ искомому уравненію круга

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

§ 8. Въ § 1 мы видѣли, что, если первоначальное уравненіе заключаетъ n произвольныхъ постоянныхъ, то при помощи n-кратнаго дифференцированія можно притти къ дифференціальному уравнению, заключающему производныя до порядка n включительно. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ называть *порядкомъ* дифференціальнаго уравненія высшій изъ порядковъ входящихъ въ него производныхъ.

Первый вопросъ, который является, состоитъ въ томъ, можно ли всякое дифференціальное уравненіе порядка n разсматривать, какъ результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ общаго интеграла, заключающаго какъ разъ n этихъ произвольныхъ постоянныхъ. Вся исторія теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій приводитъ насъ къ утвердительному результату, а именно, что общій интегралъ дифференціальнаго уравненія n-го порядка заключаетъ какъ разъ n постоянныхъ произвольныхъ.

Далеко не такъ простъ и ясенъ вопросъ о зависимости между порядкомъ дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ и числомъ входящимъ въ его общій интегралъ произвольныхъ функцій. Что касается уравненій перваго порядка въ частныхъ производныхъ, т. е. такихъ уравненій, въ которыя входятъ только частныя производныя перваго порядка отъ искомой функціи, то можно считать установленнымъ, что въ общій интегралъ этихъ уравненій будетъ входить одна произвольная функція. Но, начиная уже съ уравненій второго порядка, дѣло становится менѣе яснымъ. На примѣрѣ § 3 мы видѣли, что общій интегралъ дифференціальнаго уравненія второго порядка заключаетъ двѣ произвольныя функціи, но существуютъ дифференціальныя уравненія второго порядка съ частными производными, для которыхъ можно написать общій интегралъ, заключающій одну только произвольную функцію.

Въ послѣднее время отчасти изъ теоретическихъ соображеній, отчасти подъ вліяніемъ требованій практики, изученіе теоріи уравненій съ частными производными все болѣе склоняется отъ вопросовъ нахожденія общихъ рѣшеній съ произвольными элементами къ нахожденію частнаго вида рѣшеній, удовлетворяющихъ нѣкоторымъ добавочнымъ условіямъ, причемъ эти добавочныя условія подбираютъ обыкновенно такъ, чтобы получилось единственное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія.

Пріемы интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

§ 9. Указанное уже нами геніальное твореніе Euler'а „Institutiones calculi integralis" представляетъ основной трактатъ по интегрированію дифференціальныхъ уравненій, который еще до сихъ поръ можетъ считаться прекраснымъ руководствомъ въ этой области. Пріемы, указанные Euler'омъ для интегрированія дифференціальныхъ уравненій остаются почти единственными до настоящаго времени. Въ томъ случаѣ, когда дифференціальныя уравненія не интегрируются въ функціяхъ извѣстныхъ, они представляютъ дальнѣйшій источникъ для введенія въ науку новыхъ трансцендентныхъ.

Въ нашемъ краткомъ изложеніи мы ограничимся указаніемъ на самые важные пріемы интегрированія.

Отдѣленіе перемѣнныхъ.

§ 10. Пусть разсматривается уравненіе перваго порядка

(1) $$M(x, y) + y' N(x. y) = 0,$$

гдѣ M и N заданныя функціи отъ x и y. Это уравненіе можно будетъ переписать въ видѣ

(2) $$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

Если нѣкоторое уравненіе приведено къ виду (2), причемъ функція M зависитъ только отъ одного x, а функція N отъ одного y, то говорятъ, что *перемѣнныя отдѣлены*. Въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ видъ

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0,$$

и, интегрируя, мы получаемъ

$$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная величина. Напримѣръ, если задано уравненіе

$$x + y y' = 0,$$

то, переписывая его въ видѣ

$$x\, dx + y\, dy = 0,$$

послѣ интегрированія получаемъ

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Здѣсь можно освободиться отъ знаменателя 2 и написать уравненіе такъ:

$$x^2 + y^2 = C,$$

потому что можно одной буквой C обозначить постоянное произвольное число $2\ C$.

Интегрирующій множитель.

§ 11. Положимъ, требуется интегрировать уравненіе

(1) $$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Если функціи M и N суть частныя производныя одной и той же функціи R, тогда первая часть уравненія (1) представляетъ собою полный дифференціалъ функціи R. Другими словами, если

(2) $$M = \frac{\partial R}{\partial x},\ N = \frac{\partial R}{\partial y},$$

то уравненіе (1) можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

(3) $$d\,R = 0,$$

и мы получимъ общій интегралъ, написавши

$$R = C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

Дифференцируя первое изъ уравненій (2) по y, а второе по x, получимъ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y},$$

откуда

(4) $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Итакъ, мы видимъ, что указанное выше интегрированіе уравненія (1) при помощи представленія его въ видѣ (3) возможно только въ томъ случаѣ, когда функціи M и N удовлетворяютъ условію (4).

Оказывается, что если функціи M и N не удовлетворяютъ условію (4), то первая часть уравненія (1) не будетъ полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи R, но эта первая часть обратится въ полный дифференціалъ послѣ умноженія ея на нѣкоторый множитель ρ, который есть опредѣленная функція отъ x и y. Такой множитель ρ называется *интегрирующимъ множителемъ*, ибо очевидно, что, если такой множитель найденъ, то по умноженіи на него всего уравненія въ первой части получается полный дифференціалъ, и, значитъ, можно интегрировать уравненіе такимъ пріемомъ, какъ сказано выше.

Итакъ разсмотримъ уравненіе

$$(4) \qquad \rho M dx + \rho N dy = 0.$$

Мы предполагаемъ, что ρ подобрано правильно, значитъ, условія (4) для уравненія (5) должны удовлетворяться, и мы имѣемъ

$$\frac{\partial (\rho M)}{\partial y} = \frac{\partial (\rho N)}{\partial x},$$

или иначе

$$(6) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} N - \frac{\partial \rho}{\partial y} M + \rho \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = 0.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что искомый интегрирующій множитель ρ долженъ удовлетворять уравненію съ частными производными перваго порядка (6).

Приведенныя разсужденія убѣждаютъ насъ въ томъ, что нахожденіе интегрирующаго множителя для даннаго уравненія (1) или, что одно и то же, интегрированіе этого уравненія (1) есть задача, равносильная съ интегрированіемъ уравненія (6) въ частныхъ производныхъ. Часто удается просто найти рѣшеніе уравненія (6) въ частныхъ производныхъ, и такимъ образомъ достигается интегрированіе заданнаго уравненія (1) при помощи интегрирующаго множителя.

§ 12. Пояснимъ методу интегрирующаго множителя на примѣрѣ *линейнаго* уравненія перваго порядка

$$(1) \qquad y' + Py + Q = 0,$$

гдѣ P и Q заданныя функціи отъ одного перемѣннаго независимаго x. Это уравненіе можно переписать въ видѣ

$$(2) \qquad (Py + Q)\, dx + dy = 0.$$

Сравнивая съ обозначеніями предыдущаго §-а, получаемъ

$$M = Py + Q, N = 1.$$

Отсюда уравненіе (6) предыдущаго §-а для интегрирующаго множителя представится въ видѣ

$$(3) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial y}(Py + Q) - \rho P = 0.$$

Такъ какъ за ρ достаточно взять какое угодно изъ рѣшеній уравненія (3), то для упрощенія задачи предположимъ, что ρ зависитъ отъ одного x. Тогда

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{d\rho}{dx},$$

и, значитъ, уравненіе (3) можно переписать такъ:

$$\frac{d\rho}{dx}-\rho P=0.$$

Здѣсь перемѣнныя отдѣляются, ибо послѣднее уравненіе можно переписать въ видѣ

$$\frac{d\rho}{\rho}=P\,dx.$$

Интегрируя, получаемъ

$$lg\,\rho=\int P\,dx,$$

$$\rho=e^{\int P dx}.$$

Умножая на полученное выраженіе ρ уравненіе (2), будемъ имѣть

$$(y\,P\,dx+dy)\,e^{\int P dx}+e^{\int P dx}\,Q\,dx=0,$$

или иначе

$$d\left[ye^{\int P dx}\right]=-e^{\int P dx}\,Q\,dx.$$

Интегрируя, получаемъ

$$y\,e^{\int P dx}=C-\int e^{\int P dx}\,Q\,dx,$$

откуда

$$y=e^{-\int P dx}\left[C-\int e^{\int P dx}\,Q\,d\,x\right]. \tag{4}$$

Въ XVIII столѣтіи интегралъ называли также *квадратурой*, ибо интегралъ выражаетъ, какъ извѣстно, площадь кривой. Поэтому, разсматривая формулу (4), мы можемъ сказать, что выраженіе функціи y получилось *въ квадратурахъ*. Выраженіе *„уравненіе рѣшается въ квадратурахъ"* подчеркиваетъ то обстоятельство, что общій интегралъ уравненія можно представить черезъ квадратуры. Такое рѣшеніе въ квадратурахъ встрѣчается только въ рѣдкихъ случаяхъ. Въ большинствѣ случаевъ дифференціальныя уравненія въ квадратурахъ не рѣшаются, и интегрированіе ихъ представляетъ операцію болѣе высокаго порядка.

Линейныя уравненія.

§ 13. Подъ линейнымъ уравненіемъ порядка n разумѣется уравненіе вида

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + \ldots \tag{1}$$

$$\ldots + X_{n-1} \frac{d y}{d x} + X_n y = X,$$

гдѣ всѣ коэффиціенты $X_0, X_1, \ldots X_n, X$ суть заданныя функціи отъ одного перемѣннаго независимаго x. Если функція X, стоящая во второй части уравненія (1), тождественно равна нулю, то говорятъ, что линейное уравненіе есть уравненіе безъ послѣдняго члена. Если же эта функція X отлична отъ нуля, то уравненіе называется уравненіемъ съ послѣднимъ членомъ.

Замѣчательно, что достаточно знать одно частное рѣшеніе уравненія съ послѣднимъ членомъ для того, чтобы свести полное нахожденіе общаго интеграла уравненія съ послѣднимъ членомъ къ болѣе простой задачѣ нахожденія общаго интеграла уравненія безъ послѣдняго члена.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть y_0 есть частное рѣшеніе уравненія (1). Тогда, введя новую перемѣнную z при помощи равенства

$$y = y_0 + z, \tag{2}$$

получимъ для z уравненіе

$$X_0 \frac{d^n z}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} z}{d x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dz}{dx} + X_n z = 0,$$

т. е. уравненіе безъ послѣдняго члена.

§ 14. Особенно просто интегрируется линейное уравненіе безъ послѣдняго члена въ томъ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты постоянныя числа, т. е. въ случаѣ уравненія

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Покажемъ, что уравненіе (1) имѣетъ частное рѣшеніе вида

$$(2) \qquad y = e^{\lambda x},$$

гдѣ λ нѣкоторое постоянное число, подлежащее выбору.

Такъ какъ

$$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x},$$

то уравненіе (1) послѣ подстановки выраженія (2) обратится въ такое:

$$(a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

Мы удовлетворимъ послѣднему уравненію, если положимъ

$$(3) \qquad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Итакъ, числа λ нужно искать среди корней алгебраическаго уравненія (3). Ограничимся разсмотрѣніемъ случая, когда уравненіе (3) не имѣетъ кратныхъ корней, отсылая читателя для случая кратныхъ корней къ болѣе подробнымъ курсамъ интегрированія уравненій. Обозначимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ всѣ различные корни уравненія (3). Тогда мы получаемъ n частныхъ рѣшеній

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots e^{\lambda_n x}$$

дифференціальнаго уравненія (1). Общій интегралъ уравненія (1) будетъ имѣть видъ

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x},$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_n$ постоянныя произвольныя.

§ 15. То обстоятельство, что общій интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія съ постоянными коэффиціентами линейно выражается черезъ постоянныя произвольныя $C_1, C_2, \ldots C_n$, имѣетъ мѣсто и въ общемъ случаѣ для уравненій безъ послѣдняго члена, т. е. общій интегралъ уравненія

$$(1) \qquad X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = 0$$

имѣетъ видъ

$$(2) \qquad y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x),$$

гдѣ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ суть n частныхъ рѣшеній уравненія (1).

Замѣчательно, что, если мы найдемъ общій интегралъ (2) уравненія (1), то при помощи квадратуръ можно будетъ найти частное рѣшеніе уравненія съ послѣднимъ членомъ

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = X \tag{3}$$

и, такимъ образомъ, проинтегрировать это послѣднее.

Мы укажемъ способъ Lagrange'a, носящій названіе способа *варіаціи произвольныхъ постоянныхъ*. Будемъ искать частное рѣшеніе уравненія (3) подъ видомъ формулы (2), причемъ C_1, $C_2, \ldots C_n$ мы будемъ считать уже не постоянными произвольными, а функціями отъ независимаго перемѣннаго x. Поставимъ для этихъ функцій такія ограниченія, чтобы функція y и ея $n-1$ производныхъ имѣли тотъ же видъ при перемѣнныхъ C_i, какъ и въ случаѣ постоянныхъ C_i. Для этой цѣли дифференцируемъ уравненіе (2); получаемъ

$$y' = \frac{dC_1}{dx}\varphi_1 + \frac{dC_2}{dx}\varphi_2 + \ldots + \frac{dC_n}{dx}\varphi_n + C_1\varphi_1' + \\ + C_2\varphi_2' + \ldots + C_n\varphi_n'.$$

Очевидно, что эта производная y' будетъ имѣть то же выраженіе

$$y' = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2' + \ldots + C_n\varphi_n' \tag{4}$$

при перемѣнныхъ C_i, что и при постоянныхъ, если мы положимъ

$$\frac{dC_1}{dx}\varphi_1 + \frac{dC_2}{dx}\varphi_2 + \ldots + \frac{dC_n}{dx}\varphi_n = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя уравненіе (4), мы найдемъ, что выраженіе для y'' не измѣнится, если мы положимъ

$$\frac{d\,C_1}{dx}\varphi_1' + \frac{d\,C_2}{dx}\varphi_2' + \ldots + \frac{p\,C_n}{dx}\varphi_n' = 0. \tag{6}$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, получимъ рядъ уравненій

$$\begin{aligned} &\frac{d\,C_1}{d\,x}\varphi_1'' + \frac{d\,C_2}{dx}\varphi_2'' + \ldots + \frac{d\,C_n}{dx}\varphi_n'' = 0, \\ (7)\quad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d\,C_1}{dx}\varphi_1^{(n-2)} + \frac{d\,C_2}{dx}\varphi_2^{(n-2)} + \ldots + \frac{d\,C_n}{dx}\varphi_n^{(n-2)} = 0\,. \end{aligned}$$

Наконецъ, дифференцируя выраженіе $(n-1)$-ой производной

$$y^{(n-1)} = C_1 \varphi_1^{(n-1)} + C_2 \varphi_2^{(n-1)} + \ldots + C_n \varphi_n^{(n-1)},$$

получимъ

$$y^{(n)} = \frac{d\,C_1}{d\,x} \varphi_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{d\,C_n}{dx} \varphi_n^{(n-1)} + C_1 \varphi_1^{(n)} + \ldots$$
$$\ldots + C_n \varphi_n^{(n)}.$$

Въ этомъ выраженіи мы уже не будемъ ничего приравнивать нулю.

Подставляя теперь всѣ выраженія производныхъ въ наше уравненіе (3) съ послѣднимъ членомъ, получимъ

$$\frac{d\,C_1}{d\,x} \varphi_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{d\,C_n}{d\,x} \varphi_n^{(n-1)} = \frac{X}{X_0}. \tag{8}$$

Рѣшая n уравненій (5), (6), (7), (8) относительно n производныхъ $\frac{d\,C_1}{d\,x}, \frac{d\,C_2}{d\,x}, \ldots \frac{d\,C_n}{d\,x}$, получимъ

$$\frac{d\,C_1}{d\,x} = \psi_1(x), \frac{d\,C_2}{d\,x} = \psi_2(x), \ldots \frac{d\,C_n}{d\,x} = \psi_n(x),$$

гдѣ $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ будутъ нѣкоторыя опредѣленныя функціи отъ x. Отсюда $C_1, C_2, \ldots C_n$, дающія искомое частное рѣшеніе, получаются въ квадратурахъ.

Теорія Fuchs'a.

§ 16. Въ статьѣ „Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre“ (Math. Annalen, Bd. 48) Коркинъ высказываетъ слѣдующія общія замѣчанія относительно характера современныхъ изслѣдованій по интегрированію дифференціальныхъ уравненій.

„Въ послѣднее время пытаются примѣнить къ дифференціальнымъ уравненіямъ теорію функцій комплекснаго перемѣннаго, которая въ свою очередь вытекаетъ изъ изученія функцій алгебраическихъ и ихъ интеграловъ. Но эта теорія при большой общности своихъ теоремъ имѣетъ существенное несовершенство, а именно, въ ней отсутствуютъ методы вычисленія неизвѣстныхъ функцій. Это же вычисленіе есть настоящее интегрированіе уравненія и окончательная цѣль его анализа. Чтобы подвинуться впередъ въ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій одной теоріи функцій недостаточно. Для этого нужно присоединить къ этой теоріи соображенія, ей совершенно чуждыя.

Я думаю, что для цѣли вычисленія неизвѣстныхъ мы не имѣемъ до сихъ поръ никакой другой методы, какъ слѣдовать пути старыхъ математиковъ, т. е. ограничиться внимательнымъ изученіемъ уравненій частнаго вида, искать новыя интегрируемыя уравненія; тѣмъ болѣе, что очень простые частные случаи, трактованные соотвѣтственнымъ образомъ, могутъ привести къ очень общимъ заключеніямъ".

Очевидно, что въ приведенныхъ словахъ подъ именемъ старыхъ математиковъ авторъ разумѣетъ великаго Euler'а, а потому нельзя не сочувствовать автору въ его уваженіи къ методамъ этого человѣка. Но необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что незамѣченные случаи простого интегрированія уравненій дѣлаются все рѣже и рѣже, такъ что является вопросъ, что же дѣлать съ большинствомъ дифференціальныхъ уравненій, для которыхъ мы не находимъ простыхъ пріемовъ интегрированія. Оставить такія уравненія совершенно безъ изслѣдованія было бы нецѣлесообразно въ виду ихъ практическихъ приложеній. Поэтому, естественно, возникло въ послѣднее время новое направленіе въ теоріи интегрированія уравненій, которое обращаетъ вниманіе также и на тѣ уравненія, которыя простыми пріемами не интегрируются, а именно, за невозможностью найти хорошія методы вычисленія изучаютъ *свойства* функцій, опредѣляемыхъ этими дифференціальными уравненіями.

Мнѣ кажется, что было бы несправедливо сказать, что изученіе свойствъ функцій есть задача менѣе достойная вниманія, чѣмъ задача вычисленія этихъ функцій, потому что тогда пришлось бы сказать, напримѣръ, что главное значеніе функцій Θ въ теоріи эллиптическихъ функцій состоитъ не въ ихъ замѣчательныхъ свойствахъ, изъ которыхъ въ настоящее время выводится такое множество заключеній, а въ томъ, что они даютъ возможность хорошо вычислять численное значеніе эллиптическихъ функцій.

Что касается приложенія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій, то я согласился бы вполнѣ съ вышеприведенными словами Коркина, только мотивировалъ бы мои возраженія нѣсколько иначе. Коркинъ видитъ въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго большую общность при отсутствіи методъ вычисленія. Я высказалъ бы мысль совершенно обратную, т. е. повторилъ бы еще разъ соображенія, высказанныя въ гл. VII, а именно, что теорія функцій комплекснаго перемѣннаго налагаетъ извѣстныя ограниченія на разсматриваемыя функціи и едва ли въ этомъ смыслѣ подходитъ къ задачѣ нахожденія общихъ интеграловъ, т. е. къ задачѣ нахожденія совокупностей всѣхъ возможныхъ рѣшеній даннаго уравненія. Въ этомъ отношеніи теорія функцій вещественнаго перемѣннаго значительно шире.

Съ другой стороны нельзя не признать за теоріей функцій комплекснаго перемѣннаго громадныхъ заслугъ въ математикѣ XIX столѣтія. Безъ нея была бы невозможна совершенная теорія эллиптическихъ функцій съ ея глубокими обобщеніями, давшими намъ современную теорію Abel'евыхъ функцій.

Въ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій теорія функцій также дала серьезные результаты, отрицать достоинство которыхъ было бы крайне несправедливо. Я имѣю въ виду теорію Fuchs'а, относящуюся къ изученію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ точки зрѣнія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго. На этой теоріи подтверждаются вышеприведенныя слова Коркина, что „частные случаи, трактованные соотвѣтственнымъ образомъ, могутъ привести къ очень общимъ заключеніямъ".

Дѣло въ томъ, что теорія Fuchs'а линейныхъ уравненій является обобщеніемъ знаменитыхъ изслѣдованій Gauss'а о такъ называемомъ *гипергеометрическомъ рядѣ.*

Gauss обратилъ вниманіе на одинъ результатъ Euler'а относящійся къ интегрированію нѣкотораго уравненія второго порядка при помощи особеннаго ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго независимаго. Gauss разсматриваетъ и называетъ гипергеометрическимъ слѣдующій рядъ:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

Оказывается, что этотъ рядъ есть интегралъ такого линейнаго дифференціальнаго уравненія второго порядка:

$$(1) \qquad (x - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + \Big[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\Big]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Gauss показалъ цѣлый рядъ замѣчательныхъ свойствъ гипергеометрическаго ряда. Изъ этихъ свойствъ вытекаютъ свойства интеграловъ дифференціальнаго уравненія (1), которые, какъ оказалось, могутъ быть облечены въ довольно изящную теорію, послужившую основаніемъ для обобщенія Fuchs'а.

Гипергеометрическій рядъ находится въ большой связи съ теоріей эллиптическихъ функцій, ибо при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ и $\gamma = 1$ получается дифференціальное уравненіе

$$x(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}y = 0,$$

которому удовлетворяетъ слѣдующій эллиптическій интегралъ:

$$y = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-xz^2)}}.$$

Теорія Sophus'а Lie.

§ 17. Здѣсь мы должны упомянуть объ изслѣдованіяхъ Sophus'а Lie, выдающагося математика конца XIX столѣтія. Lie желалъ сдѣлать для дифференціальныхъ уравненій нѣчто, соотвѣтствующее теоріи Galois для алгебраическихъ уравненій, т. е., другими словами, онъ искалъ приложеній къ дифференціальнымъ уравненіямъ теоріи непрерывныхъ группъ преобразованій перемѣнныхъ.

Въ послѣднее время, послѣ смерти Lie замѣчается нѣкоторое охлажденіе интереса къ его методамъ, связанное, несомнѣнно, съ трудностью полученія въ этомъ направленіи новыхъ результатовъ.

Совокупныя обыкновенныя дифференціальныя уравненія.

§ 18. Пусть задана нѣкоторая система m дифференціальныхъ уравненій, въ которыя входятъ единственная независимая перемѣнная x, рядъ ея функцій y, z, u . . . , причемъ число этихъ функцій n, и кромѣ того рядъ производныхъ этихъ функцій по независимой перемѣнной x.

Если оставить въ сторонѣ исключительные случаи, то происходитъ явленіе, аналогичное тому, которое мы имѣемъ въ алгебрѣ при m уравненіяхъ съ n неизвѣстными, а именно, если неизвѣстныхъ функцій будетъ меньше, чѣмъ дифференціальныхъ уравненій, то должны существовать нѣкоторыя условія для того, чтобы эти уравненія были совмѣстимы. Обратно, если искомыхъ функцій больше, чѣмъ уравненій, то нѣкоторыя функціи остаются произвольными, и, наконецъ, является подлежащимъ разсмотрѣнію случай наиболѣе важный, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ функцій.

Чтобы понять, какъ нужно интегрировать систему уравненій, достаточно разсмотрѣть простѣйшій случай двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными функціями. Пусть, напримѣръ, заданы уравненія

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

$$(2) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^p y}{dx^p}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0.$$

Исключая y изъ этихъ уравненій, мы получимъ одно дифференціальное уравненіе съ одной искомой функціей z, черезъ интегрированіе котораго и получится эта функція. Чтобы произвести такое исключеніе, продифференцируемъ p разъ уравненіе (1) и m разъ уравненіе (2). Тогда получимъ $p+m+2$ уравненій, изъ которыхъ способами обыкновенной алгебры исключимъ $m+p+1$ неизвѣстныхъ

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m+p} y}{dx^{m+p}}.$$

Окончательное уравненіе относительно z будетъ такого порядка, который равенъ большему изъ чиселъ $n+p$ и $q+m$. Конечно, порядокъ этотъ можетъ быть меньше, если для исключенія не надо разсматривать всѣхъ $m+p+2$ уравненій.

Уравненія съ частными производными.

§ 19. Обращаясь къ интегрированію уравненій съ частными производными, ограничимся разсмотрѣніемъ только случая двухъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Искомая функція, опредѣляемая дифференціальнымъ уравненіемъ, пусть будетъ z.

Обозначимъ частныя производныя z слѣдующимъ образомъ:

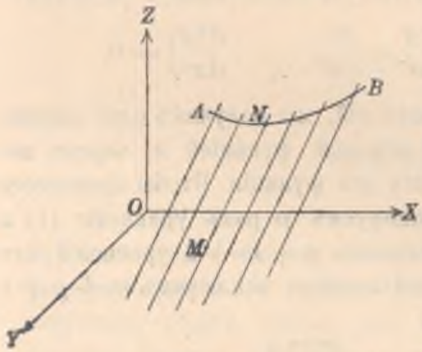
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Такъ какъ уравненіе $z = \varphi(x, y)$ опредѣляетъ нѣкоторую поверхность въ трехмѣрномъ пространствѣ, то очевидно, что теорія интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными съ двумя перемѣнными независимыми должна прилагаться въ теоріи поверхностей. Эта связь теоріи поверхностей съ уравненіями въ частныхъ производныхъ была предметомъ знаменитаго трактата Monge'a „L'Application de l'Analyse à la Géométrie".

Разсмотримъ нѣсколько наиболѣе важныхъ задачъ, трактованныхъ Monge'емъ.

Поверхности цилиндрическія.

§ 20. *Цилиндрическими поверхностями* называются поверхности, описанныя прямою MN (черт. 134), перемѣщающейся параллельно нѣкоторой опредѣленной прямой въ пространствѣ и опирающейся на нѣкоторую заданную кривую AB. Прямая MN, описывающая цилиндръ, носитъ названіе его *образующей*, а кривая AB называется *направляющей* цилиндра.



Черт. 134.

Пусть

(1) $x = az + \alpha, y = bz + \beta$

будутъ уравненія образующей цилиндра. Такъ какъ образующая не измѣняетъ своего направленія, то a и b числа постоянныя, а α и β тѣ перемѣнные параметры, различнымъ значеніямъ которыхъ соотвѣтствуютъ различныя образующія. Пусть

(2) $$F(x, y, z) = 0,$$
$$F_1(x, y, z) = 0$$

суть уравненія направляющей AB. Исключая три буквы x, y, z изъ четырехъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе

(3) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

связывающее параметры α и β. Рѣшая уравненіе (3) относительно β, получимъ

$$\beta = \Omega(\alpha).$$

Подставляя сюда выраженія параметровъ α и β изъ уравненій (1), получимъ уравненіе

(5) $$y - bz = \Omega(x - az),$$

гдѣ Ω какая нибудь функція.

Это уравненіе есть наиболѣе общее уравненіе *въ конечныхъ величинахъ* цилиндрическихъ поверхностей. *Дифференціальное* уравненіе цилиндрическихъ поверхностей получимъ, исключая произвольную функцію Ω. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе (5) по x и по y, получимъ

$$-bp = \Omega'(x - az)(1 - ap)$$
$$1 - bq = \Omega'(x - az)(-aq).$$

Исключая производную $\Omega'(x - az)$, получимъ

$$ap + bq = 1. \tag{6}$$

Уравненіе (6) есть дифференціальное уравненіе цилиндрическихъ поверхностей. Это уравненіе выражаетъ то геометрическое свойство цилиндрическихъ поверхностей, что касательныя плоскости параллельны образующимъ поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе касательной плоскости есть

$$\zeta - z = (\xi - x)p + (\eta - y)q,$$

условіе же того, что эта касательная плоскость параллельна прямой

$$\xi = az, \eta = bz$$

будетъ (§ 49 гл. II)

$$ap + bq = 1.$$

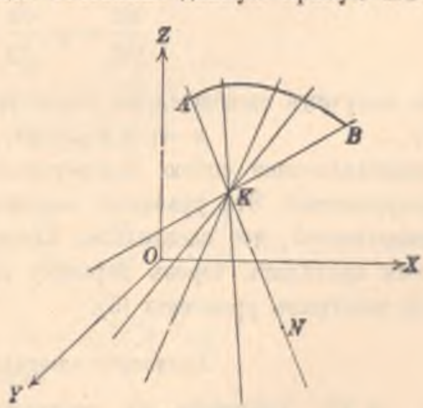
Уравненіе (5), заключающее произвольную функцію, есть общій интегралъ послѣдняго уравненія.

Поверхности коническія.

§ 21. *Коническими поверхностями* называются такія поверхности, которыя описываются прямой KN, проходящей черезъ постоянную точку K и встрѣчающей постоянно данную кривую AB. Пусть a, b, c будутъ координаты вершины K конической поверхности. Тогда уравненія прямолинейной образующей могутъ быть написаны въ видѣ

$$x - a = \alpha(z - c), \tag{1}$$
$$y - b = \beta(z - c),$$

гдѣ α и β перемѣнные угловые коэффиціенты. Для того, чтобы получить условіе, при которомъ эта прямая проходитъ черезъ направляющую



Черт. 135.

AB конуса, уравненія которой пусть будутъ

$$F_1(x, y, z) = 0, \; F_2(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

необходимо исключить буквы x, y, z изъ четырехъ уравненій (1), (2). Получается одно соотношеніе между остальными буквами, которое дастъ β, какъ нѣкоторую функцію отъ α:

$$\beta = \Omega(\alpha). \tag{3}$$

Подставляя сюда выраженія α, β изъ уравненій (1), получимъ

$$\frac{y-b}{z-c} = \Omega\left(\frac{x-a}{z-c}\right). \tag{4}$$

Уравненіе (4) при произвольной функціи Ω представляетъ собою общее уравненіе коническихъ поверхностей, имѣющихъ данную вершину. Дифференцируя уравненіе (4) по x и по y, получаемъ

$$\left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_x = \Omega'\left(\frac{x-a}{z-c}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_x,$$

$$\left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_y = \Omega'\left(\frac{x-a}{z-c}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_y.$$

Исключая производную Ω', получимъ

$$\left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_x \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_y - \left(\frac{y-b}{z-c}\right)'_y \left(\frac{x-a}{z-c}\right)'_x = 0.$$

Раскрывая это уравненіе и обозначая по прежнему

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

мы получимъ окончательно такое уравненіе

$$z-c = p(x-a) + q(y-b), \tag{5}$$

представляющее собою *дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей*. Это уравненіе выражаетъ то свойство коническихъ поверхностей, что касательная плоскость во всякой точкѣ поверхности проходитъ черезъ вершину конуса. Уравненіе (4) есть общій интегралъ уравненія (5).

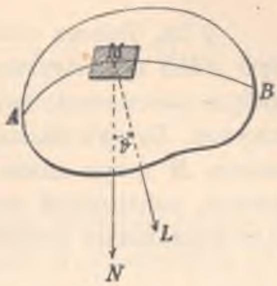
Уравненія второго порядка.

§ 22. Уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка вида

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

даютъ классы поверхностей, у которыхъ обладаетъ извѣстнымъ свойствомъ, выражаемымъ уравненіемъ (1), *кривизна* линій, проведенныхъ по поверхности.

§ 23. Пусть $f(x, y, z) = 0$ есть заданное уравненіе поверхности (черт. 136). Проведемъ по поверхности какую нибудь произвольную кривую AMB и разсмотримъ нѣкоторую ея точку M. Пусть MN будетъ нормаль къ поверхности въ точкѣ M, ея косинусы угловъ съ осями будутъ (§ 58 гл. VI)



Черт. 136.

$$(1)\qquad \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Пусть ML обозначаетъ главную нормаль кривой AMB въ точкѣ M, тогда ея косинусы угловъ опредѣляются (§ 52 гл. VI) по формуламъ

$$(2)\qquad \rho\frac{d^2x}{d\sigma^2}, \rho\frac{d^2y}{d\sigma^2}, \rho\frac{d^2z}{d\sigma^2},$$

гдѣ ρ есть радіусъ первой кривизны линіи AMB, а σ ея дуга.

Обозначая черезъ ϑ уголъ между нормалью поверхности (1) и главной нормалью (2) нѣкоторой линіи, проведенной по поверхности, получимъ

$$(3)\qquad \cos\vartheta = \rho\frac{-p\dfrac{d^2x}{d\sigma^2} - q\dfrac{d^2y}{d\sigma^2} + \dfrac{d^2z}{d\sigma^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

но $dz = p\,dx + q\,dy$, отсюда

$$(4)\qquad d\frac{dz}{d\sigma} = p\,d\frac{dx}{d\sigma} + q\,d\frac{dy}{d\sigma} + \frac{dx}{d\sigma}dp + \frac{dy}{d\sigma}dq;$$

далѣе

$$dp = r\,dx + s\,dy,\ dq = s\,dx + t\,dy.$$

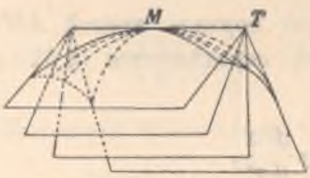
Подставляя въ (4) получимъ

$$\frac{d\dfrac{dz}{d\sigma}}{d\sigma} - p\frac{d\dfrac{dx}{d\sigma}}{d\sigma} - q\frac{d\dfrac{dy}{d\sigma}}{d\sigma} = r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2;$$

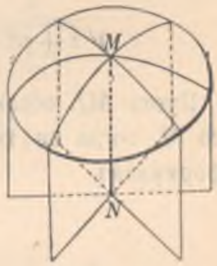
отсюда формулу (3) можно будетъ окончательно переписать такъ

$$(5) \qquad \rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}.\cos\theta}{r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2}.$$

§ 24. Будемъ теперь разсматривать не произвольную кривую AMB на поверхности, а только сѣченіе поверхности какою нибудь плоскостью, другими словами, пусть кривая AMB будетъ плоская. Будемъ называть *нормальнымъ сѣченіемъ* поверхности *въ точкѣ* M такую линію, которая лежитъ въ пересѣченіи съ плоскостью, проходящей черезъ нормаль къ поверхности въ точкѣ M. Для нормальнаго сѣченія $\theta = 0$.



Черт. 137.



Черт. 138.

Если мы будемъ проводить черезъ точку M поверхности различныя сѣкущія плоскости, то является важнымъ изучить, какъ мѣняется радіусъ кривизны ρ (см. (5) § 23) отъ плоскости къ плоскости. Тутъ приходится обратить вниманіе на слѣдующіе два факта: 1) какъ измѣняется радіусъ ρ, когда сѣкущая плоскость вращается около какой нибудь касательной MT (черт. 137), проведеной къ поверхности черезъ точку M; 2) какъ измѣняется ρ при вращеніи сѣкущей плоскости около нормали MN къ поверхности (черт. 138).

Теорема Meusnier.

§ 25. Если мы вращаемъ плоскость около опредѣленной касательной MT, то остаются безъ измѣненія выраженія

$$\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma},$$

кромѣ того не мѣняются числа p, q, r, s, t, ибо эти числа представляютъ изъ себя значенія производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для точки M, которая остается неподвижной.

Итакъ, обозначая

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2} \quad (\vartheta = 0),$$

получимъ

(1) $$\rho = \rho_0 \cos\vartheta;$$

послѣдняя формула (1) выражаетъ теорему Meusnier: *радіусъ кривизны ρ въ какой нибудь точкѣ M кривой S, проведенной по поверхности, равенъ произведенію радіуса кривизны ρ_0 нормальнаго сѣченія, имѣющаго общую касательную MT съ кривою, и косинуса угла ϑ между плоскостью нормальнаго сѣченія и соприкасающейся плоскостью точки M данной кривой S.*

Теорема Euler'а.

§ 26. Euler показалъ, что кривизна

$$\frac{1}{\rho}$$

нормальнаго сѣченія при вращеніи его плоскости около нормали поверхности измѣняется въ нѣкоторыхъ конечныхъ границахъ

$$\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2},$$

причемъ одно изъ этихъ чиселъ является minimum'омъ функціи $\frac{1}{\rho}$, а другое число ея maximum'омъ.

Если $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$, то величина $\frac{1}{\rho}$ есть постоянная. Послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто для всѣхъ точекъ шара.

Чтобы убѣдиться проще въ справедливости теоремы Euler'а, поступимъ такъ: полагаемъ $\cos\vartheta = 1$ и вводимъ въ разсмотрѣніе вмѣсто функціи $\frac{1}{\rho}$ новую величину

$$\tau = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\rho} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{d\sigma^2},$$

но

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2 =$$
$$= (1+p^2)\,dx^2 + 2\,pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2.$$

Обозначимъ

$$\xi = \frac{dx}{dy};$$

получимъ

$$\tau = \frac{r\xi^2 + 2s\xi + t}{(1+p^2)\xi^2 + 2pq\xi + 1 + q^2}. \tag{1}$$

Итакъ, при вращеніи плоскости мѣняется только одна величина ξ.

Примѣняя принципъ Fermat'a (§ 26 гл. IX) мы замѣчаемъ, что maximum и minimum для τ долженъ соотвѣтствовать кратному корню уравненія (1), если въ немъ разсматривать ξ, какъ неизвѣстную величину.

Въ самомъ дѣлѣ, переписывая уравненіе (1) въ видѣ

$$[r-(1+p^2)\tau]\xi^2 + 2[s-pq\tau]\xi + t - (1+q^2)\tau = 0,$$

получимъ, какъ условіе для кратности корней, равенство

$$[s-pq\tau]^2 - [r-(1+p^2)\tau][t-(1+q^2)\tau] = 0,$$

раскрывая которое, получаемъ для опредѣленія τ квадратное уравненіе

$$\tau^2(1+p^2+q^2) - [r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)]\tau + rt - s^2 = 0;$$

подставляя $\tau = \dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\rho}$, получаемъ

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2(1+p^2+q^2)^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{1}{\rho}[r(1+q^2) - 2spq +$$
$$+ t(1+p^2)] + rt - s^2 = 0; \tag{2}$$

корнями этого уравненія и будутъ указанные выше предѣлы $\dfrac{1}{\rho_1}$ и $\dfrac{1}{\rho_2}$ кривизны $\dfrac{1}{\rho}$.

Получаемъ

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)}{\left(\sqrt{1+p^2+q^2}\right)^3}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \tag{4}$$

§ 27. Выраженіе $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$ носитъ названіе *средней* кривизны поверхности въ точкѣ M. Если средняя кривизна поверхности равна нулю во всѣхъ точкахъ, то поверхность удовлетворяетъ, очевидно, уравненію

$$r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)=0.$$

Это уравненіе есть дифференціальное уравненіе такъ называемыхъ *минимальныхъ поверхностей*, такъ какъ поверхности, удовлетворяющія этому уравненію, обладаютъ свойствомъ имѣть наименьшую площадь внутри даннаго контура.

§ 28. Въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ „Disquisitiones generales circa superficies curvas" Gauss обращаетъ вниманіе на то обстоятельство, что естественнѣе всего является мысль принять за кривизну поверхности выраженіе

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \tag{1}$$

Gauss вводитъ въ разсмотрѣніе понятіе объ *изгибаніи* поверхности безъ *складокъ* и *разрыва* и приходитъ къ заключенію, что *при изгибаніи поверхности кривизна (1) соотвѣтственныхъ точекъ не мѣняется.*

Поверхности, развертывающіяся на плоскость.

§ 29. Если Gauss'ова кривизна равна нулю во всѣхъ точкахъ поверхности, то поверхность удовлетворяетъ уравненію

$$rt-s^2=0. \tag{1}$$

Покажемъ, какъ это уравненіе проинтегрировать. Легко убѣдиться, что зависимость (1) между вторыми производными равносильна тому обстоятельству, что одна изъ первыхъ производныхъ p, q есть функція отъ другой, т. е.

$$q=f(p), \tag{2}$$

гдѣ f совершенно произвольная функція.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе (2) по x и y, получимъ

$$\frac{\partial q}{\partial x} = f'(p)\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} = f'(p)\frac{\partial p}{\partial y},$$

или

$$s = f'(p)\, r,\; t = f'(p)\, s,$$

откуда черезъ исключеніе $f'(p)$ получаемъ какъ разъ уравненіе (1). Мы не будемъ останавливаться на доказательствѣ обратнаго предложенія, что изъ уравненія (1) вытекаетъ, какъ слѣдствіе, уравненіе (2).

Интегрируя уравненіе

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

получаемъ

$$z = \int (p\,dx + q\,dy) = \int p\,dx + \int q\,dy;$$

интегрируя по частямъ, получимъ

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp,$$

$$\int q\,dy = qy - \int y\,dq,$$

откуда

(3) $$z = px + qy - \int (x\,dp + y\,dq);$$

но изъ (2) получаемъ $dq = f'(p)\,dp$, откуда формула (3) перепишется такъ

(4) $$z = px + qy - \int [x + y f'(p)]\,dp;$$

для интегрируемости выраженіе

$$x + y f'(p)$$

должно быть произвольно взятой функціей отъ одного p; мы можемъ положить

(5) $$x + y f'(p) = \varphi'(p),$$

изъ $\varphi(p)$ знакъ произвольной функціи.

Тогда въ формулѣ (4) можно будетъ произвести интегрированіе, и мы получимъ

$$z = px + qy + \varphi(p).$$

Итакъ, получается окончательный интегралъ уравненія (1), выраженный двумя уравненіями

$$(6)\qquad \begin{aligned} z &= px + f(p)\,y + \varphi(p), \\ 0 &= x + f'(p)\,y + \varphi'(p). \end{aligned}$$

Если p считать постояннымъ числомъ, то уравненія (6), будучи первой степени относительно x, y, z, выражаютъ нѣкоторую прямую. Геометрическимъ мѣстомъ всѣхъ этихъ прямыхъ, получаемыхъ при различныхъ p, является поверхность *нулевой кривизны*.

Основнымъ свойствомъ поверхностей нулевой кривизны (въ согласіи съ теоремой Gauss'а) является возможность *развертыванія* этихъ поверхностей на плоскость. Эти поверхности (черт. 139) суть *линейчатыя*, ибо состоятъ изъ прямыхъ (6); эти *прямолинейныя образующія поверхности* суть касательныя къ одной кривой линіи, называемой *ребромъ возврата* поверхности.

Черт. 139.

Если ребро возврата обращается въ точку, то поверхность дѣлается *коническою*; при удаленіи ребра возврата на безконечность получается *цилиндрическая* поверхность.

§ 30. Можно задать *линейчатую* поверхность, т. е. такую, которая образована непрерывнымъ перемѣщеніемъ въ пространствѣ нѣкоторой прямой, уравненіями прямой

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= az + \alpha, \\ y &= bz + \beta, \end{aligned}$$

въ которыхъ четыре коэффиціента a, b, α, β суть функціи отъ одного перемѣннаго параметра.

Всѣ линейчатыя поверхности раздѣляются на два класса: на *развертывающіяся* и на *косыя*; развертывающіяся суть тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію

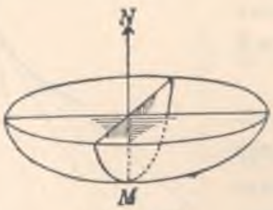
$$(2)\qquad rt - s^2 = 0,$$

косыя—тѣ, которыя этому уравненію не удовлетворяютъ.

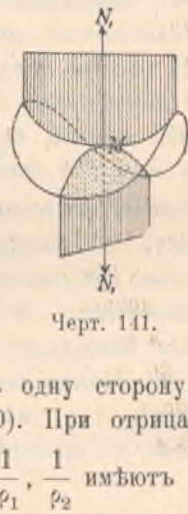
§ 31. Euler показалъ, что плоскости нормальныхъ сѣченій, соотвѣтствующія maximum'у и minimum'у кривизны $\frac{1}{\rho}$, лежатъ одна къ другой подъ прямымъ угломъ; онѣ называются *главными плоскостями* точки M заданной поверхности.

§ 32. Существуетъ характерное отличіе вида части поверхности около точки M въ случаѣ положительной кривизны $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ и въ случаѣ отрицательной кривизны.

При положительной кривизнѣ $\left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} > 0\right)$ обѣ главныя кривизны $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, вогнутости



Черт. 140.



Черт. 141.

обоихъ главныхъ сѣченій направлены въ одну сторону, и поверхность имѣетъ видъ *чаши* (черт. 140). При отрицательной кривизнѣ $\left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} < 0\right)$ обѣ главныя кривизны $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ имѣютъ разные знаки, и поверхность имѣетъ сѣдлообразный видъ (черт. 141).

Общія теоріи.

§ 33. Обращаясь къ уравненіямъ съ частными производными въ случаѣ произвольнаго числа перемѣнныхъ независимыхъ, мы можемъ сказать, что теорія такихъ уравненій перваго порядка вида

$$f\left(x_1\, x_2\, .\; .\, x_n, V, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, .\; .\; .\, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$

гдѣ V есть искомая функція отъ $x_1 x_2 \ldots x_n$, можетъ считаться хорошо разработанной благодаря классическимъ изслѣдованіямъ Cauchy, Jacobi и Lie.

Въ области уравненій съ частными производными высшаго порядка, гдѣ еще до сихъ поръ многое остается неизслѣдованнымъ, необходимо подчеркнуть замѣчательныя изслѣдованія Monge'a и Ampère'a, относящіяся къ уравненіямъ второго порядка съ двумя перемѣнными независимыми вида

$$(1) \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

гдѣ коэффиціенты H, K, L, M, N суть заданныя функціи отъ x, y, z, p, q.

§ 34. Въ области уравненій съ частными производными въ русской литературѣ имѣется рядъ изслѣдованій видныхъ математиковъ: Коркина, Имшенецкаго, Сонина, Ляпунова, Стеклова, Ермакова, Кояловича, Салтыкова и другихъ.

Касательныя преобразованія.

§ 35. Замѣчательный мемуаръ Ampère'a, посвященный уравненіямъ вида (1) предыдущаго §-а несомнѣнно вдохновилъ Sophus'a Lie при созданіи имъ теоріи такъ называемымъ *касательныхъ преобразованій* (Berührungstransformationen), теоріи, получившей извѣстность въ послѣднее время.

Пояснимъ понятіе о касательномъ преобразованіи на одномъ простомъ частномъ случаѣ. Пусть x, y двѣ перемѣнныя независимыя, z ихъ нѣкоторая функція и p, q двѣ частныя производныя перваго порядка функціи z по x и по y.

Пусть заданы формулы

$$(2) \quad X = f_1(x, y, z, p, q),\ Y = f_2(x, y, z, p, q),\ Z = f_3(x, y, z, p, q);$$

$$(3) \qquad P = \varphi_1(x, y, z, p, q),\ Q = \varphi_2(x, y, z, p, q).$$

Такъ какъ функціи f_1, f_2, f_3 въ уравненіяхъ (2) зависятъ отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, то на основаніи § 48 гл. VI мы заключаемъ, что уравненія (2) опредѣляютъ въ координатахъ X, Y, Z новую поверхность. Плоскость, проходящая черезъ точку (X, Y, Z) и имѣющая угловые коэффиціенты

$$(4) \qquad -P, -Q, 1,$$

не будетъ, *вообще говоря*, касательною къ новой поверхности. Для того, чтобы произошло такое касаніе плоскости (4) съ поверхностью, необходимо, чтобы подобно тому, какъ для прежнихъ перемѣнныхъ имѣло мѣсто равенство

(5) $$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

было такое же равенство и относительно новыхъ буквъ, т. е.

(6) $$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0.$$

Итакъ, для существованія касанія необходимо, чтобы уравненіе (5) влекло, какъ слѣдствіе, новое (6).

Итакъ, для полученія касательнаго преобразованія необходимо функціи $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2$ подобрать такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \omega\,(dz - p\,dx - q\,dy),$$

гдѣ ω нѣкоторая функція отъ x, y, z, p, q.

Подобныя преобразованія относятся къ какому угодно числу перемѣнныхъ независимыхъ.

Поверхности съ постоянной кривизной.

§ 36. Считаемъ полезнымъ сказать еще нѣсколько словъ о поверхностяхъ съ постоянной кривизной. Если кривизна равна нулю, то эти поверхности развертываются на плоскость. Вся плоская геометрія сохраняется для этихъ поверхностей. Прямымъ линіямъ плоскости соотвѣтствуютъ на поверхности особенныя кривыя, называемыя *геодезическими* и представляющія кривыя кратчайшихъ разстояній между точками поверхности.

Такъ напримѣръ, если мы будемъ навертывать плоскость на круговой цилиндръ, то прямыя линіи плоскости будутъ навертываться по винтовымъ линіямъ (§ 56 гл. VI); значитъ, винтовыя линіи суть геодезическія на круговомъ цилиндрѣ.

Совершенно подобнымъ образомъ, если мы разсмотримъ поверхности съ постоянной положительной кривизной, опредѣляемыя по уравненію

(1) $$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{a^2},$$

то, какъ оказывается, эти поверхности накладываются на шаръ.

Нахожденіе всѣхъ поверхностей, налагаемыхъ на шаръ, зависитъ отъ полнаго интегрированія уравненія второго порядка (1). Эта задача до сихъ поръ не рѣшена. Въ ней все зависитъ отъ уравненія

(2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \sin z,$$

интегрированіе котораго превосходитъ силы современнаго анализа.

Замѣчательно, что тоже уравненіе (2) встрѣчается въ другомъ вопросѣ, поставленномъ Чебышевымъ, а именно въ вопросѣ *одѣванія шара* (или вообще какой нибудь поверхности) *нитяными тканями*.

Ради наглядности, предложимъ читателю представить себѣ резиновый мячикъ въ сѣткѣ, какъ обычно продаются такіе мячики въ игрушечныхъ магазинахъ. Сѣтка облегаетъ форму мячика; спрашивается, по какимъ линіямъ располагаются на мячикѣ нити сѣтки?

§ 37. Обратимся теперь къ поверхностямъ съ постоянной отрицательной кривизной, опредѣляемымъ по уравненію

(1) $$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = -\frac{1}{a^2},$$

или

(2) $$(1 + p^2 + q^2)^2 + a^2(rt - s^2) = 0;$$

такія поверхности всѣ накладываются на одну изъ нихъ.

Обыкновенно выбираютъ, какъ представительницу, наиболѣе простую изъ этихъ поверхностей, называемую *псевдосферой*.

Эта поверхность получается, какъ поверхность вращенія, удовлетворяющая уравненію (2).

Согласно § 68 главы VI пишемъ уравненіе меридіана поверхности въ такомъ видѣ:

(3) $$\rho = f(z), \text{ гдѣ } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Дифференцируя (3) по x и y, получимъ

(4) $$\frac{x}{\rho} = f'(z)\, p, \quad \frac{y}{\rho} = f'(z)\, q.$$

Дифференцируя уравненія (4) еще разъ по x и y, получимъ

(5) $$\frac{x^2}{\rho^3} = f''(z)\, p^2 + f'(z)\, r, \quad -\frac{xy}{\rho^3} = f''(z)\, pq + f'(z)\, s,$$

$$\frac{y^2}{\rho^3} = f''(z)\, q^2 + f(z)\, t.$$

Выражая пять величинъ p, q, r, s, t черезъ другія при помощи пяти уравненій (4) и (5) и подставляя полученныя выраженія въ уравненіе (2), получаемъ:

$$f = a^2 \frac{f''}{(1+f'^2)^2};$$

умножая обѣ части этого уравненія на $2\, f' dz$, получаемъ

$$d[f^2] = a^2 \frac{d[f'^2]}{(1+f'^2)^2}.$$

Интегрируя, получаемъ

$$f^2 - \alpha^2 = -\frac{a^2}{1+f'^2};$$

отсюда

$$f'^2 = \frac{a^2 - \alpha^2 + f^2}{\alpha^2 - f^2};$$

но $f = \rho$, слѣдовательно,

$$\int \sqrt{\frac{\alpha^2 - \rho^2}{a^2 - \alpha^2 + \rho^2}}\, d\rho = z. \tag{6}$$

Вообще говоря, меридіанъ (6) искомой поверхности получается въ эллиптическихъ функціяхъ.

Самая простая поверхность получается при $\alpha = a$, тогда имѣемъ

$$\int \sqrt{a^2 - \rho^2} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = z, \tag{7}$$

и интегралъ берется въ конечномъ видѣ. Предоставляя читателю въ видѣ упражненія докончить интегрированіе, мы здѣсь разсмотримъ формулу (7) съ тѣмъ, чтобы, не производя интегрированія, указать замѣчательное свойство кривой (7), показанное еще Huyghens'омъ.

Введемъ обычныя обозначенія координатъ точекъ плоской кривой x и y, чтобы уравненіе (3) имѣло видъ

$$y = f(x).$$

Замѣнимъ z на x и ρ на y, тогда уравненіе (7) можно будетъ переписать такъ:

$$\sqrt{a^2 - y^2}\,\frac{dy}{y} = dx;$$

иначе:

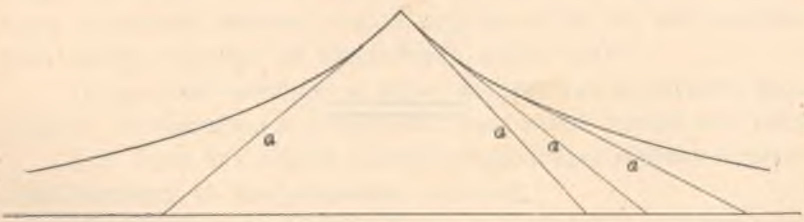
$$\sqrt{a^2 - y^2}\,y' = y;$$

рѣшая это уравненіе относительно a получимъ

$$a = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Послѣднее уравненіе выражаетъ на основаніи соображеній § 29 гл. VI свойство кривой имѣть постоянную касательную a.

Эта кривая (черт. 142) носитъ названіе *траекторіи Huyghens'а*



Черт. 142.

и обладаетъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что ея эволюта есть линія, опредѣляемая уравненіемъ

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x+\alpha}{a}} + e^{\frac{-x-\alpha}{a}}}{2} \qquad (\alpha \text{ — постоянное число})$$

и называемая *цѣпной линіей*. По цѣпной линіи, какъ показывается въ механикѣ, свѣшиваются тяжелыя цѣпи.

Итакъ, поверхность, называемая псевдосферой, происходитъ отъ вращенія траекторіи около оси x-овъ (оси z-овъ въ первоначальныхъ обозначеніяхъ).

На псевдосферѣ (черт. 143) провѣряются всѣ законы геометріи Лобачевскаго (§ 85 гл. II). Это было показано въ первый разъ итальянскимъ ученымъ Beltrami. Такимъ образомъ получалось, съ одной стороны, наглядное толкованіе плоской геометріи Лобачевскаго при помощи образовъ обыкновенной эвклидовской геометріи, съ другой стороны, желаніе провѣрить законы геометріи Лобачевскаго на псевдосферѣ привело къ болѣе подробному изученію свойствъ поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Черт. 143.

Если бы мы хотѣли найти геометрическій образъ, взятый изъ эвклидовой геометріи, накоторомъ бы провѣрялась пространственная геометрія Лобачевскаго, то пришлось бы разсматривать эвклидову геометрію четырехъ измѣреній и взять въ ней кривое пространство трехъ измѣреній, представляющее аналогъ псевдосферы.

ГЛАВА XI.

Приближенныя вычисленія. Конечныя разности.

§ 1. Приложенія математики требуютъ развитія пріемовъ приближеннаго вычисленія. Замѣчательно, что всѣ приложенія математики, какъ въ техникѣ, такъ и въ натуральной философіи, не требуютъ очень большой точности. Изъ природы трудно взять болѣе трехъ знаковъ послѣ запятой, если принимать за единицу измѣряемый объектъ. Возьмемъ, напримѣръ, графическія эпюры, столь важныя для техники. Если мы примемъ за единицу метръ, то дробь 0,0001 уже даетъ столь малую длину, что при самомъ тщательномъ исполненіи чертежа нельзя поручиться за то, что неизбѣжныя ошибки черченія не превзойдутъ дроби 0,0001.

То же самое относится ко всѣмъ измѣреніямъ въ наукахъ физическихъ, не исключая и астрономіи, какъ самой точной изъ нихъ.

§ 2. Одна изъ самыхъ важныхъ задачъ приближеннаго вычисленія состоитъ въ *табулированіи функцій.*

Положимъ, дана функція $f(x)$, и требуется составить таблицу ея частныхъ значеній.

Построеніе всякой математической таблицы обусловливается ея цѣлью.

При построеніи таблицы какой нибудь функціи $f(x)$ имѣется обыкновенно въ виду, что эта таблица должна давать возможность вычислять съ извѣстной точностью функцію $f(x)$ для всякаго значенія x.

Какъ примѣръ табулированія функціи, можно привести знакомыя читателю изъ элементарнаго курса *логариѳмическія таблицы.* Въ этихъ таблицахъ помѣщены значенія функцій

$$Lg_{10}\,x,\ Lg_{10}\,sin\,x,\ Lg_{10}\,tg\,x.$$

Каждая таблица приспособлена къ извѣстной степени точности. Такъ напримѣръ, пятизначные логариѳмы представляютъ такую таблицу, что каждый вычисленный по ней логариѳмъ будетъ отличаться отъ настоящаго своего значенія менѣе чѣмъ на $\frac{1}{10^5}$; семизначные логариѳмы даютъ точность $\frac{1}{10^7}$ и. т. д.

§ 3. Скажемъ въ двухъ словахъ о принципахъ составленія таблицъ непрерывныхъ функцій. Наши общія соображенія будутъ конечно относиться въ частности къ логариѳмическимъ таблицамъ.

Обыкновенно въ таблицѣ помѣщаются значенія функціи, вычисленныя съ извѣстной точностью для ряда значеній перемѣнной независимой, образующихъ ариѳметическую прогрессію

(1) $a-2h, a-h, a, a+h, a+2h, a+3h, \ldots$

Итакъ, таблица образуется изъ значеній

(2) $f(a-2h), f(a-h), f(a), f(a+h), f(a+2h), f(a+3h), \ldots$

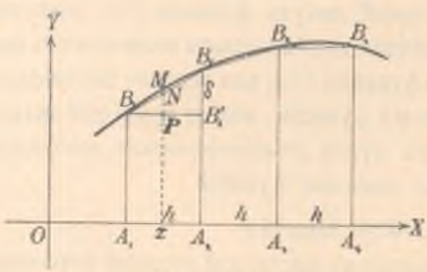
Если требуется вычислить значеніе функціи $f(x)$ для одного изъ значеній (1) независимаго перемѣннаго x, то мы прямо выписываемъ это значеніе $f(x)$ изъ таблицы (2).

Если же требуется вычислить значеніе функціи $f(x)$ для какого нибудь произвольнаго значенія x, лежащаго въ промежуткѣ между двумя рядомъ стоящими членами

$$a+kh, a+(k+1)h$$

ариѳметической прогрессіи (1), то у насъ получается задача такъ называемаго *интерполированія*, т. е. задача нахожденія промежуточныхъ значеній функціи, лежащихъ между двумя рядомъ стоящими числами таблицы (2).

Таблица должна быть всегда такъ составлена, чтобы при помощи короткаго и простого вычисленія получалось значеніе функціи при всякомъ промежуточномъ значеніи x съ тою степенью точности, которую обѣщаетъ составленная таблица.



Черт. 144.

§ 4. Для ясности представимъ табулируемую функцію $f(x)$ кривою на плоскости (черт. 144), тогда табличныя числа представляютъ не что иное, какъ ординаты

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$$

этой кривой.

Если мы соединимъ точки $B_1, B_2, B_3, \ldots$ кривой прямыми $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \ldots$, то получимъ вписанный въ кривую многоугольникъ $B_1 B_2 B_3 B_4$ . . . . Чѣмъ меньше величина h, т. е. чѣмъ гуще составлена таблица, тѣмъ ближе многоугольникъ подходитъ къ кривой. Если мы возьмемъ ординату $xPNM$ кривой, соотвѣтствующую абсциссѣ $x = Ox$, удовлетворяющей неравенству

$$OA_1 < Ox < OA_2,$$

то подъ *прямолинейнымъ интерполированіемъ* разумѣется замѣна ординаты $x\ M = f(x)$ кривой ординатой $x\ N$ прямой $B_1 B_2$. Такимъ образомъ, при прямолинейномъ интерполированіи мы замѣняемъ сложное вычисленіе заданной функціи $f(x)$ простымъ вычисленіемъ ординаты прямой $B_1 B_2$. Конечно, при такой замѣнѣ мы дѣлаемъ ошибку MN; допущеніе такой ошибки оправдывается тѣмъ обстоятельствомъ, что неизбѣжно всѣ числа таблицы ошибочны, такъ такъ мы всегда ограничиваемся извѣстнымъ числомъ цифръ при составленіи таблицы, а остальныя откидываемъ.

Для правильно составленной таблицы необходимо густоту таблицы довести до такой степени, чтобы ошибка MN прямолинейнаго интерполированія не выходила изъ предѣловъ точности таблицы.

Посмотримъ теперь, какъ вычислить ординату xN прямой $B_1 B_2$;

$$xN = A_1 B_1 + PN, \text{ но } \frac{PN}{B_1 P} = \frac{B_2' B_2}{B_1 B_2'};$$

обозначая отношеніе $\dfrac{B_1 P}{B_1 B'_2} = \xi$, а $B'_2 B_2 = \delta$, замѣчаемъ, что

$$xN = A_1 B_1 + \xi \delta.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что прямолинейное интерполированіе есть не что иное, какъ примѣненіе *пропорціональныхъ частей* (partes proportionales; P. P.), употребляемое при логариѳмическихъ таблицахъ.

Необходимость дѣлать таблицу болѣе густою, т. е. вписывать большее число ординатъ, если мы желаемъ увеличить точность таблицы, а съ другой стороны оставить прямолинейное интерполированіе влечетъ, какъ слѣдствіе, увеличеніе объема таблицы: такъ напримѣръ, четырехзначная таблица логариѳмовъ помѣщается на одномъ листѣ бумаги, пятизначная таблица представляетъ маленькую книгу въ 150 страницъ, семизначная таблица является уже объемистой книгой in 8° въ 600 страницъ; наконецъ, изданныя въ 1891 году французскимъ военнымъ вѣдомствомъ восьмизначныя таблицы представляютъ уже громадный томъ (большой квартъ).

§ 5. Для возможнаго увеличенія точности таблицъ существуетъ общепринятое правило: *увеличивать на единицу послѣднюю сохраненную цифру, если отброшенная дробь болѣе половины единицы послѣдняго знака таблицы.*

Такъ напримѣръ, если мы возьмемъ семизначный логариѳмъ числа 1556, то получимъ

$$Lg\,1556 = 3,1920096.$$

Въ пятизначной же таблицѣ вмѣсто числа 3,19200 помѣщается число 3,19201, ибо дробь 0,96, составленая изъ откинутыхъ двухъ послѣднихъ цифръ, болѣе половины.

Это правило заставляетъ при составленіи таблицы съ n знаками вычислять всегда больше знаковъ, чтобы знать, гдѣ надо послѣ откидыванія лишнихъ знаковъ увеличить на единицу послѣднюю цифру.

Итакъ, точность *хорошо* составленной n-значной таблицы есть

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n},$$

т. е. указанный въ таблицѣ логариѳмъ отличается отъ настоящаго не болѣе, чѣмъ на дробь $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$.

Въ восьмизначныхъ таблицахъ заключается еще новое усовершенствованіе, состоящее въ томъ, что указаны точками тѣ логариѳмы, послѣдняя цифра которыхъ увеличена.

Такъ напримѣръ, мантисса логариѳма числа 106201 написана въ таблицѣ такъ:

02612861.;

это надо понимать такъ, что настоящая мантисса будетъ

02612860 . . .

§ 6. Логариѳмическія таблицы, какъ таблицы, приспособленныя къ широкому практическому употребленію, составлены по принципу прямолинейнаго интерполированія, для того чтобы по возможности упростить способъ ихъ употребленія.

Если, съ одной стороны, таблица предназначается для употребленія спеціалистовъ математиковъ, съ другой стороны, является затруднительнымъ вычисленіе очень большого числа ординатъ, тогда является возможнымъ упростить дѣло составленія таблицы. Можно не составлять достаточно густо таблицу, но зато придется указать другой способъ интерполированія.

Формула интерполированія Lagrange'а.

§ 7. Правило прямолинейнаго интерполированія является простѣйшимъ случаемъ болѣе общей формулы интерполированія, указанной Lagrange'емъ.

Правило прямолинейнаго интерполированія сводится на проведеніе прямой $B_1 B_2$ черезъ двѣ точки

$$B_1\,(x=a_1,\, y=f(a_1)) \text{ и } B_2\,(x=a_2,\, y=f(a_2)),$$

уравненіе этой прямой будетъ (§ 43 гл. II)

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-f(a_1)}{f(a_2)-f(a_1)},$$

откуда

$$y=\frac{f(a_1)}{a_1-a_2}(x-a_2)+\frac{f(a_2)}{a_2-a_1}(x-a_1). \tag{1}$$

Если мы обозначимъ $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)$ и кромѣ того

$$\varphi_1(x)=\frac{\varphi(x)}{x-a_1},\ \varphi_2(x)=\frac{\varphi(x)}{x-a_2},$$

то формулу (1) можно будетъ переписать въ видѣ

$$y=\frac{f(a_1)}{\varphi_1(a_1)}\varphi_1(x)+\frac{f(a_2)}{\varphi_2(a_2)}\varphi_2(x). \tag{2}$$

Эту формулу можно обобщить такъ: проведемъ кривую линію $(n-1)$-го порядка, опредѣляемую уравненіемъ

$$y=A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n, \tag{3}$$

т. е., другими словами, подберемъ коэффиціенты $A_1, A_2, \ldots A_n$ такъ, чтобы кривая (3) прошла черезъ n точекъ заданной кривой $y=f(x)$:

$$(a_1, f(a_1)),\ (a_2, f(a_2)),\ \ldots\ (a_n, f(a_n));$$

очевидно, что коэффиціенты A_i подлежатъ опредѣленію изъ n уравненій

$$(4)\quad \begin{aligned} f(a_1) &= A_1 a_1^{n-1} + A_2 a_1^{n-2} + \ldots + A_n, \\ f(a_2) &= A_1 a_2^{n-1} + A_2 a_2^{n-2} + \ldots + A_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(a_n) &= A_1 a_n^{n-1} + A_2 a_n^{n-2} + \ldots + A_n. \end{aligned}$$

Lagrange показалъ возможность болѣе простого рѣшенія уравненій (4), если предварительно написать вторую часть уравненія (3) въ нѣсколько иномъ видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n);$$

кромѣ того

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{x - a_1}, \ \varphi_2(x) = \frac{\varphi(x)}{x - a_2}, \ldots \varphi_n(x) = \frac{\varphi(x)}{x - a_n}.$$

Напишемъ уравненіе (3) въ видѣ

$$(5)\quad y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x),$$

гдѣ $C_1, C_2, \ldots C_n$ пока произвольные коэффиціенты, имѣя въ виду, что

$$\varphi_i(a_k) = 0,$$

если i не равно k, а $\varphi_i(a_i)$ отлично отъ нуля, если всѣ a_i различны.

Подставляя въ уравненіе (5) $x = a_i$, $y = f(a_i)$, получимъ

$$f(a_i) = C_1 \, . \, 0 + C_2 \, . \, 0 + \ldots + C_i \varphi_i(a_i) + \ldots + C_n \, . \, 0;$$

отсюда

$$C_i = \frac{f(a_i)}{\varphi_i(a_i)},$$

и мы получаемъ формулу Lagrange'а,

$$y = \frac{f(a_1)}{\varphi_1(a_1)} \varphi_1(x) + \frac{f(a_2)}{\varphi_2(a_2)} \varphi_2(x) + \ldots + \frac{f(a_n)}{\varphi_n(a_n)} \varphi_n(x).$$

Конечныя разности.

§ 8. Вопросы о табулированіи и приближенномъ вычисленіи функцій привели къ созданію характерной отрасли математики, называемой *разностнымъ исчисленіемъ* или *теоріей конечныхъ разностей*.

Теорія конечныхъ разностей имѣетъ близкое сродство съ дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіями; Leibniz'а и

Newton'a надо считать первыми основателями этой теоріи. Какъ первое руководство по разностному исчисленію надо указать книгу Brook Taylor'a, *„Methodus incrementorum directa et inversa“*, London, 1715.

Въ Россіи конечныя разности были предметомъ изученія школы Чебышева. Однимъ изъ лучшихъ руководствъ является книга А. Маркова: *„Исчисленіе конечныхъ разностей“* (переведена на нѣмецкій языкъ).

§ 9. Если задана функція $f(x)$, то выраженіе

$$f(x+h)-f(x)$$

называется *первой разностью* или просто *разностью* функціи $f(x)$ и обозначается

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x).$$

Разность $\Delta f(x)$ есть, очевидно, функція отъ перемѣннаго x и постояннаго числа h.

Разность отъ $\Delta f(x)$ называется *второй разностью* функціи $f(x)$ и обозначается

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+h)-\Delta f(x).$$

Подобнымъ образомъ вводится понятіе о разностяхъ болѣе высокихъ порядковъ:

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta^2 f(x+h)-\Delta^2 f(x), \\ \Delta^4 f(x) &= \Delta^3 f(x+h)-\Delta^3 f(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

§ 10. Напримѣръ, если $f(x)=x^3$, $h=1$, то

$$\begin{aligned} & f(0)=0, f(1)=1, f(2)=8, f(3)=27, f(4)=64\ \ldots \\ & \Delta\ f(0)=1, \Delta f(1)=7, \Delta f(2)=19, \Delta f(3)=37, \ldots \\ & \Delta^2 f(0)=6, \Delta^2 f(1)=12, \Delta^2 f(2)=18, \ldots \\ & \Delta^3 f(0)=6, \Delta^3 f(1)=6, \ldots \\ & \Delta^4 f(0)=0. \end{aligned}$$

§ 11. Значенія

(1) $$f(a), \Delta f(a), \Delta^2 f(a), \ldots\,.$$

выражаются черезъ значенія

(2) $$f(a), f(a+h), f(a+2h), \ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a),$$
$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+h) - \Delta f(a) = f(a+2h) - f(a+h) -$$
$$- [f(a+h) - f(a)] = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a),$$

. . . .

Обратно, значенія (2) выражаются черезъ значенія (1). Въ самомъ дѣлѣ

$$f(a+h) = f(a) + \Delta f(a), \tag{3}$$

далѣе

$$f(a+2h) = f(a+h) + \Delta f(a+h);$$

примѣняя формулу (3) къ первой разности $\Delta f(a)$, получимъ

$$\Delta f(a+h) = \Delta f(a) + \Delta^2 f(a),$$

откуда получаемъ окончательно,

$$f(a+2h) = f(a) + 2\Delta f(a+h) + \Delta^2 f(a), \tag{4}$$

. . . .

По индукціи можно доказать для произвольнаго цѣлаго числа n формулу Newton'a

$$f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{1}\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(a) + \tag{5}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 f(a) + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-1)n}\Delta^n f(a).$$

§ 12. Newton предложилъ разсматривать формулу (5) предыдущаго параграфа, какъ интерполяціонную, примѣняя ее къ случаю дробнаго n, меньшаго единицы. Тогда получимъ значеніе

$$f(a+nh),$$

для средняго значенія $a+nh$ аргумента x, лежащаго между a и $a+h$.

§ 13. Понятіе, обратное разности, есть понятіе о конечной суммѣ

$$\sum_a^b f(x) = f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+nh), \tag{1}$$

гдѣ $a+(n+1)h = b$.

Существуетъ замѣчательная связь между конечной суммой (1) и опредѣленнымъ интеграломъ $\int_a^b f(x)\,dx$, указанная въ общемъ видѣ Euler'омъ:

$$\sum_a^b f(x) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x) - \frac{1}{2}\left\{f(b) - f(a)\right\} + $$
$$+ \frac{h}{12}\left\{f'(b) - f'(a)\right\} - \ldots$$

Эта связь позволяетъ вычислять опредѣленный интегралъ при помощи конечныхъ суммъ. Получаются такимъ образомъ пріемы приближеннаго вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ, носящіе названіе *механическихъ квадратуръ*.

Наиболѣе извѣстныя формулы такого вида получены Simpson'омъ, Cotes'омъ, Gauss'омъ и Чебышевымъ.

§ 14. Въ исчисленіи конечныхъ разностей проводится большая аналогія съ дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіями. Такъ напримѣръ, интегрированіе дифференціальныхъ уравненій имѣетъ свой аналогъ въ конечныхъ разностяхъ при разсмотрѣніи уравненій вида

(1) $$F\{f(a), \Delta f(a), \Delta^2 f(a), \ldots \Delta^n f(a)\} = 0.$$

Задача рѣшенія такого рода уравненій, гдѣ F заданная функція отъ конечныхъ разностей

$$f(a), \Delta f(a), \Delta^2 f(a), \ldots \Delta^n f(a),$$

сводится къ нахожденію функціи $f(x)$, удовлетворяющей уравненію (1). Такая задача носитъ названіе задачи *интегрированія уравненія въ конечныхъ разностяхъ*.

§ 15. Существуетъ рядъ механическихъ приборовъ, рѣшающихъ различныя задачи приближеннаго вычисленія. Перечислимъ главнѣйшіе изъ нихъ.

Логариѳмическая линейка—представляетъ изъ себя двузначную таблицу логариѳмовъ.

Планиметры—приборы для нахожденія площадей, ограниченныхъ сомкнутыми контурами.

Въ этихъ приборахъ мы обводимъ нѣкоторымъ подвижнымъ штифтомъ заданный контуръ. Приборъ даетъ автоматически число, выражающее обведенную площадь.

Интеграторы—приборы, вычерчивающіе кривую

$$y = \int f(x)\, dx,$$

когда задана кривая $y = f(x)$.

Существуютъ также механизмы для рѣшенія алгебраическихъ и дифференціальныхъ уравненій.

ГЛАВА XII.

Аналитическая механика.

§ 1. Механика есть наука о движеніи матеріальныхъ тѣлъ.

При построеніи аналитической механики мы не даемъ опредѣленія того, что мы разумѣемъ подъ словомъ *матерія*. Это опредѣленіе намъ не нужно, ибо мы изучаемъ не матерію въ самой себѣ, а лишь движеніе ея въ трехмѣрномъ пространствѣ.

Мы представляемъ себѣ *тѣла*, какъ ограниченныя со всѣхъ сторонъ части матеріи, имѣющія опредѣленную внѣшнюю *форму* и опредѣленный *объемъ*.

Мы называемъ *массой* тѣла количество заключенной въ немъ матеріи. Это понятіе о массѣ не есть что либо апріорное, и мы приходимъ къ точному его установленію только при развитіи самой системы аналитической механики.

§ 2. Для составленія упрощенной схемы аналитическая механика вводитъ нѣкоторыя новыя условныя понятія. Главнѣйшее изъ этихъ понятій есть понятіе о такъ называемой *матеріальной точкѣ*. Матеріальной точкой называется тѣло извѣстной массы *безконечно малое* по размѣрамъ. Лучше сказать такъ: матеріальная точка есть геометрическая точка съ присоединеннымъ къ ней произвольно взятымъ *положительнымъ числомъ*, называемымъ ея *массой*.

§ 3. Тѣла конечныхъ размѣровъ разсматриваются, какъ совокупности матеріальныхъ точекъ.

§ 4. Мы говоримъ, что тѣло движется, если различныя его части мѣняютъ положеніе въ пространствѣ. Такъ какъ пространство безконечно и одинаково во всѣхъ своихъ частяхъ, то мы можемъ судить о покоѣ или движеніи тѣлъ только по ихъ положенію относительно другихъ тѣлъ, считаемыхъ неподвижными.

Итакъ, всѣ доступныя нашему пониманію движенія суть относительныя.

§ 5. Всѣ тѣла мы считаемъ подвижными, не закрѣпленными въ пространствѣ, но мы придаемъ матеріи свойство, которое мы называемъ свойствомъ *инерціи*, а именно, по нашему мнѣнію, матерія не обладаетъ инициативой начала движенія или же произвольнаго измѣненія установившагося движенія.

Newton выражаетъ это начало инерціи въ видѣ своего перваго закона механики.

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Законъ I. Каждое тѣло упорствуетъ въ своемъ состояніи покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія, пока дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состояніе.

§ 6. На основаніи этого закона матеріальная точка будетъ сохранять свое прямолинейное и равномѣрное движеніе, т. е., другими словами, будетъ сохранять свою *скорость* по величинѣ и по направленію, если на нее не дѣйствуютъ никакія внѣшнія силы.

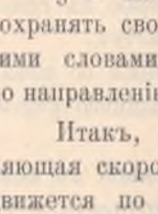
Итакъ, *сила* по Newton'у опредѣляется, какъ причина, измѣняющая скорость тѣла по величинѣ или направленію. Если тѣло движется по кривой линіи, то это тѣло должно испытывать на себѣ дѣйствіе нѣкоторой силы.

Newton опредѣляетъ силу слѣдующимъ образомъ.

Definitio IV. Vis impressa est actio in corpus exercita ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi in directum.

Опредѣленіе IV. Сила приложенная есть производимое на тѣло принужденіе къ измѣненію его состоянія покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія.

§ 7. Если при движеніи точки по кривой S (черт 145) при нѣкоторомъ положеніи ея M прекращается внезапно дѣйствіе силы, заставляющей ее описывать эту линію S, то точка, съ этого момента времени предоставленная самой себѣ, будетъ двигаться равномѣрно по касательной MT съ пріобрѣтенной въ предшествующемъ движеніи скоростью.



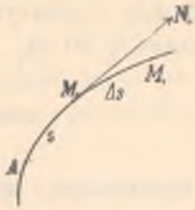
Черт 145.

Примѣромъ такого движенія можетъ служить движеніе камня, пущеннаго при помощи пращи.

§ 8. Чтобы составить себѣ понятіе о скорости криволинейнаго движенія, разсмотримъ кривую (черт. 146), описываемую нѣкоторой точкой, такъ называемую *траекторіею* движенія точки; можно задать движеніе уравненіями (§ 23 гл. VI)

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t),$$

гдѣ прямоугольныя координаты точки выражены функціями отъ времени t.



Черт. 146.

Пусть въ моментъ времени t_0 точка занимаетъ на траекторіи положеніе M_0, а въ моментъ t_1 положеніе M_1; обозначимъ черезъ s длину дуги траекторіи, отсчитываемую отъ нѣкоторой начальной точки A, тогда будемъ имѣть

$$\Delta s = M_0 M_1,$$
$$\Delta t = t_1 - t_0.$$

Средней скоростью на дугѣ $M_0 M_1$ будемъ называть величину

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Предѣлъ этого выраженія при $\Delta t = 0$, т. е. производную дуги s по времени

$$\frac{ds}{dt} \tag{1}$$

мы будемъ называть *величиною скорости* въ моментъ $t = t_0$.

Что касается направленія скорости, то по мѣрѣ уменьшенія Δt до нуля хорда $M_0 M_1$ стремится совпасть съ касательной, слѣдовательно, за направленіе скорости въ данный моментъ криволинейнаго движенія надо принять касательную, соотвѣтствующую этому моменту.

Итакъ, подъ скоростью криволинейнаго движенія въ нѣкоторый моментъ времени t мы разумѣемъ отрѣзокъ длины $\frac{ds}{dt}$, отложенный по касательной, соотвѣтствующей этому моменту, отъ точки касанія въ ту сторону, куда тѣло по кривой въ этотъ моментъ направлятся.

§ 9. Проекціи скорости на координатныхъ осяхъ найдутся по формуламъ

$$\frac{ds}{dt}\cos\alpha, \frac{ds}{dt}\cos\beta, \frac{ds}{dt}\cos\gamma,$$

гдѣ α, β, γ суть углы касательной съ осями координатъ. По формуламъ § 50 гл. VI мы имѣемъ

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

слѣдовательно, проекціи скорости на осяхъ координатъ будутъ

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \frac{dy}{dt} = \psi'(t), \frac{dz}{dt} = \omega'(t). \tag{1}$$

Если эти проекціи (1) будутъ числами постоянными, тогда и сама скорость будетъ постоянна по величинѣ и по направленію, и мы имѣемъ

$$\frac{dx}{dt} = a, \frac{dy}{dt} = b, \frac{dz}{dt} = c,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$x = at + \alpha, y = bt + \beta, z = ct + \gamma, \tag{2}$$

гдѣ α, β, γ постоянныя, вводимыя интегрированіемъ.

Итакъ, получается прямолинейное равномѣрное движеніе, имѣющее траекторію

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c} = t.$$

§ 10. Сила, отклоняющая движеніе отъ прямолинейнаго направленія, производитъ, какъ говорятъ, *ускореніе* въ движеніи, причемъ подъ ускореніемъ понимается измѣненіе скорости или по величинѣ, или по направленію, или по величинѣ и по направленію. За мѣру ускоренія принимается отрѣзокъ, имѣющій проекціями на осяхъ координатъ величины

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1}$$

§ 11. Масса точки разсматривается, какъ элементъ, препятствующій дѣйствію силы. Говорятъ, что надо приложить къ точкѣ тѣмъ бо́льшую силу для полученія даннаго ускоренія, чѣмъ больше масса этой точки.

Отсюда мы заключаемъ, что по заданному движенію точки мы можемъ себѣ составить представленіе о силѣ, заставляющей эту точку производить данное движеніе; эту силу мы будемъ называть *движущей силой* и опредѣлять ее по величинѣ и направленію слѣдующимъ образомъ.

Опредѣленіе. Величина движущей силы равна произведенію ускоренія на массу. Направленіе же ея опредѣляется ея проекціями на осяхъ

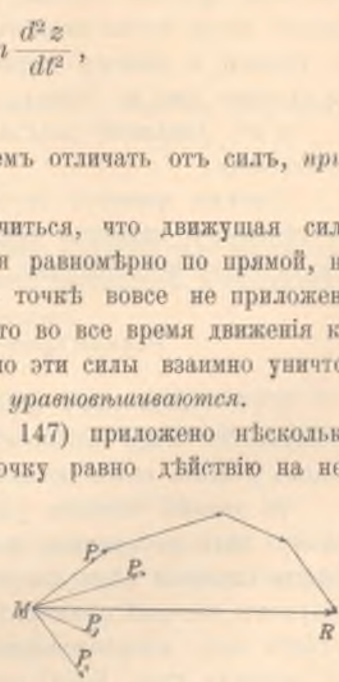
$$m\frac{d^2x}{dt^2}, m\frac{d^2y}{dt^2}, m\frac{d^2z}{dt^2},$$

гдѣ m есть масса точки.

§ 12. Движущую силу мы будемъ отличать отъ силъ, *приложенныхъ* къ тѣлу.

Въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что движущая сила равна нулю, такъ что точка движется равномѣрно по прямой, но изъ этого еще не слѣдуетъ, что къ точкѣ вовсе не приложено никакихъ силъ; можетъ случиться, что во все время движенія къ точкѣ приложены нѣкоторыя силы, но эти силы взаимно уничтожаются или, какъ говорятъ, взаимно *уравновѣшиваются.*

§ 13. Если къ точкѣ M (черт. 147) приложено нѣсколько силъ, то дѣйствіе этихъ силъ на точку равно дѣйствію на нее одной силы, называемой *равнодѣйствующей* всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.



Черт. 147.

Основнымъ принципомъ механики является полученіе равнодѣйствующей, какъ геометрической суммы (§ 21 гл. II), слагаемыми которой являются заданныя силы.

§ 14. Можно высказать такое положеніе: движущая сила равняется равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ. Отсюда является возможность написать такія *дифференціальныя уравненія движенія точки*

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = T\cos\lambda, m\frac{d^2y}{dt^2} = T\cos\mu, m\frac{d^2z}{dt^2} = T\cos\nu,$$

гдѣ T равнодѣйствующая силъ приложенныхъ, а λ, μ, ν углы съ осями координатъ этой равнодѣйствующей.

§ 15. Аналитическую механику дѣлятъ обыкновенно на двѣ части: *кинематику* и *динамику*.

Кинематика представляетъ изъ себя чисто геометрическую часть механики, гдѣ изучается движеніе независимо отъ причинъ его.

Динамика разсматриваетъ зависимость между движеніемъ матеріи и причинами его.

Поэтому мы можемъ сказать, что разсмотрѣніе движущей силы или, другими словами, ускоренія составляетъ предметъ кинематики; когда же мы вводимъ въ разсмотрѣніе силы, приложенныя къ тѣламъ, и пишемъ дифференціальныя уравненія движенія, то мы входимъ уже въ область динамики.

§ 16. Динамика раздѣляется въ свою очередь на *статику* и *кинетику*.

Статика изучаетъ законы равновѣсія силъ, приложенныхъ къ тѣламъ, а кинетика трактуетъ о движеніяхъ, производимыхъ силами неуравновѣшенными.

Равномѣрно-ускоренное движеніе.

§ 17. Разсмотримъ задачу паденія тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ подъ вліяніемъ силы тяжести. Силу тяжести мы можемъ считать силой постоянной по величинѣ и по направленію.

Въ такомъ чистомъ упрощенномъ видѣ мы не можемъ на самомъ дѣлѣ воспроизвести явленія паденія тѣлъ, такъ какъ въ дѣйствительности тѣла падаютъ въ пространствѣ, наполненномъ воздухомъ, который представляетъ нѣкоторое сопротивленіе паденію и даетъ силу, направленную обратно силѣ тяжести и зависящую отъ скорости тѣла. Кромѣ того мы должны предполагать, что сила тяжести направлена къ центру земли, слѣдовательно, если мы имѣемъ два падающихъ тѣла, то силы тяжести, къ нимъ приложенныя, не будутъ параллельны между собой, такъ какъ направленія ихъ образуютъ прямыя, сходящіяся въ центрѣ земли.

Далѣе, притяженіе къ центру земли приходится считать измѣняющимся по закону Newton'а обратно пропорціонально квадрату разстоянія до центра; поэтому тѣла, находящіяся выше отъ поверхности земли, приходится считать притягивающимися меньшей силой.

Вслѣдствіе сравнительно большого разстоянія центра земли отъ насъ можно считать измѣненія силы тяжести отъ высоты и по направленію ничтожными, такъ что можно допускать, что паденіе тѣлъ въ обыденной жизни есть движеніе, происходящее подъ вліяніемъ постоянной по величинѣ и направленію силы.

§ 18. Мы можемъ предполагать, что паденіе тѣла происходитъ по оси Z, причемъ положительное направленіе этой оси будемъ считать идущимъ внизъ.

Достаточно разсмотрѣть одно изъ уравненій (1) § 14, а именно

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=T,$$

гдѣ T есть постоянная сила тяжести; обозначая $\frac{T}{m}$ черезъ g, получаемъ

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g, \tag{1}$$

гдѣ постоянное число g есть такъ называемое *ускореніе силы тяжести.*

Если мы примемъ за единицу длины сантиметръ, а за единицу времени секунду, то g выражается числомъ

$$g=980,94\ .\ .\ .$$

Ускореніе силы тяжести въ какомъ либо мѣстѣ земной поверхности подъ широтой λ и на высотѣ h сантиметровъ надъ уровнемъ моря равняется

$$g=980,6056-2,5028\cos 2\lambda-0,000003\,h.$$

Предположимъ, что въ начальный моментъ времени ($t=0$) точка находится въ началѣ координатъ и пущена свободно падать безъ начальнаго толчка по оси Z.

Интегрируя уравненіе (1), получимъ

$$\frac{dz}{dt}=g\,t+g_1,$$

гдѣ g_1 постоянная величина. Очевидно $g_1=0$, такъ какъ въ начальный моментъ $t=0$ скорость $\frac{dz}{dt}$ равна нулю, слѣдовательно

$$\frac{dz}{dt}=gt. \tag{2}$$

Интегрируя еще разъ, получаемъ

$$z=\frac{gt^2}{2}; \tag{3}$$

добавочная постоянная опять принята нами равною нулю, такъ какъ при $t=0$ мы имѣемъ $z=0$.

Формула (2) показываетъ, что паденіе тяжелыхъ тѣлъ есть движеніе равномѣрно-ускоренное, такъ какъ скорость gt съ возрастаніемъ времени t равномѣрно возрастаетъ.

Планетная задача.

§ 19. Разсмотримъ задачу о движеніи матеріальной точки подъ вліяніемъ силы притяженія къ началу координатъ по закону всемірнаго тяготѣнія Newton'а.

Мы эту задачу называемъ планетною, ибо она близко подходитъ къ задачѣ движенія планеты около солнца. Конечно, мы предполагаемъ, что другихъ планетъ и ихъ притяженія на данную планету не существуетъ.

Итакъ, примемъ законъ притяженія къ началу координатъ, выражающійся формулой

$$\mu \frac{m}{r^2}, \tag{1}$$

гдѣ μ—нѣкоторое постоянное число, m—масса точки (планеты), а $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, т. е. разстоянію точки (x, y, z) до начала координатъ.

Законъ притяженія, выражаемый формулой (1), можно словами формулировать слѣдующимъ образомъ.

Притяженіе прямо пропорціонально массѣ притягиваемаго тѣла и обратно пропорціонально квадрату разстоянія до притягивающаго центра.

Теперь выраженіе (1) подставимъ въ формулы (1) § 14 вмѣсто T. На основаніи же формулъ § 29 гл. II мы получаемъ

$$\cos\lambda = -\frac{x}{r}, \cos\nu = -\frac{y}{r}, \cos\nu = -\frac{z}{r};$$

знакъ минусъ поставленъ въ этихъ формулахъ, такъ какъ направленіе силы притяженія идетъ отъ точки къ началу координатъ, а не обратно, какъ это предполагалось въ § 29 гл. II.

§ 20. Итакъ, получаемъ дифференціальныя уравненія нашей задачи въ такомъ видѣ:

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{r^3}, \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{r^3}, \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu\frac{z}{r^3};$$

уравненія (1) можно представить въ видѣ пропорціи

(2) $$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = \frac{z''}{z},$$

гдѣ черезъ x'', y'', z'' обозначены для сокращенія вторыя производныя $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$.

Изъ пропорціи (2) имѣемъ три уравненія

$$yz'' - zy'' = 0, zx'' - xz'' = 0, xy'' - yx'' = 0,$$

или иначе

$$(yz' - zy')' = 0, (zx' - xz')' = 0, (xy' - yx')' = 0.$$

Интегрируя, получимъ

(3) $$yz' - zy' = C_1, zx' - xz' = C_2, xy' - yx' = C_3;$$

умножая послѣднее уравненіе по порядку на x, y, z и складывая, получаемъ въ лѣвой части тождественно нуль; отсюда имѣемъ уравненіе

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0$$

плоскости, проходящей черезъ начало координатъ. Итакъ, движеніе оказывается плоскимъ, что позволяетъ задачу значительно упростить, а именно, принять плоскость движенія за плоскость XY, оставляя притягивающій центръ въ началѣ координатъ.

§ 21. Полагая $z = 0$ во все время движенія точки, приходимъ къ плоской задачѣ интегрированія только двухъ уравненій

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{r^3}, \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{r^3},$$

гдѣ $r^2 = x^2 + y^2$.

Существуютъ два весьма важныхъ съ механической точки зрѣнія интеграла системы (1): *интегралъ живой силы* и *интегралъ площадей*.

Для полученія интеграла живой силы поступимъ такъ: умножимъ уравненія (1) на $m\frac{dx}{dt}$ и $m\frac{dy}{dt}$ и сложимъ ихъ, тогда получимъ

$$m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right]=-\frac{\mu m}{r^2}\,\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{r}$$

или

$$\frac{m}{2}\,\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=-\frac{\mu m}{r^2}\,\frac{dr}{dt}.$$

Интегрируя, получаемъ

$$\frac{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{2}=\frac{\mu m}{r}+h. \tag{2}$$

Это и есть интегралъ живой силы, такъ какъ подъ живой силой въ движеніи точки разумѣется какъ разъ первая часть уравненія (2), т. е. половина произведенія массы m на квадратъ скорости $\frac{ds}{dt}$.

Функція $\frac{\mu m}{r}$ есть не что иное, какъ Newton'овъ потенціалъ, т. е. такая функція, производная которой по r

$$-\frac{\mu m}{r^2}$$

выражаетъ силу, приложенную къ тѣлу. Уравненіе

$$\frac{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{2}-\frac{\mu m}{r}=h,$$

выражаетъ нѣкоторый механическій законъ, который имѣетъ мѣсто въ большомъ числѣ задачъ аналитической механики. Этотъ законъ носитъ названіе *закона сохраненія энергіи.*

Живая сила $\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ называется иначе *кинетической энергіей* движущейся точки, а потенціалъ $-\frac{\mu m}{r}$ иногда называется *потенціальной энергіей.*

Законъ сохраненія энергіи формулируется иногда такъ: *полная энергія* въ движеніи одной точки или системы точекъ, состоящая изъ кинетической и потенціальной, есть величина постоянная во все время движенія.

Извѣстно, что этотъ законъ сохраненія энергіи, получившій свое начало изъ разсмотрѣнія скромнаго уравненія, выражающаго интегралъ живой силы, разросся въ широкій принципъ, сыгравшій въ исторіи физики XIX столѣтія первостепенную роль.

Переходимъ теперь къ интегралу площадей; изъ уравненій (1) получаемъ

$$x\frac{d^2 y}{d t^2}-y\frac{d^2 x}{d t^2}=0,$$

откуда послѣ интегрированія имѣемъ

$$(3)\qquad x\frac{d y}{d t}-y\frac{d x}{d t}=2\sigma,$$

гдѣ σ постоянная величина.

Введемъ полярныя координаты

$$x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta;$$

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\vartheta-\sin\vartheta.r\frac{d\vartheta}{dt},\ \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\vartheta+\cos\vartheta.r\frac{d\vartheta}{dt};$$

отсюда уравненіе (3) приметъ видъ

$$(5)\qquad \frac{1}{2}r^2\frac{d\vartheta}{dt}=\sigma.$$

Мы знаемъ (§ 60 гл. VI) что $\frac{1}{2}r^2\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{dW}{dt}$, гдѣ W (черт. 148) есть площадь сектора, описаннаго радіусомъ векторомъ; слѣдовательно

Черт. 148.

$$\frac{dW}{dt}=\sigma,$$

откуда послѣ интегрированія получаемъ

$$(6)\qquad W=\sigma t+\sigma_1.$$

Получается знаменитый законъ Кеплера.

Площади секторовъ, описанныя радіусомъ векторомъ въ одинаковыя времена, одинаковы.

Чтобы получить уравненіе траекторіи въ полярныхъ координатахъ, проще всего поступить такъ: ввести полярныя координаты въ интегралъ живой силы.

Возвышая въ квадратъ уравненія (4) и складывая ихъ, получимъ

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2;$$

отсюда уравненіе живой силы даетъ

$$(7)\qquad dr^2+r^2d\vartheta^2=\left(\frac{2\mu}{r}+\frac{2h}{m}\right)dt^2;$$

исключая изъ этого уравненія dt при помощи интеграла (5) площадей, получимъ

$$dr^2=-r^2d\vartheta^2+\frac{r^4}{4\sigma^2}\left(\frac{2\mu}{r}+\frac{2h}{m}\right)d\vartheta^2,$$

$$\frac{4\sigma^2dr^2}{r^4}=d\vartheta^2\left\{\frac{2\mu}{r}+\frac{2h}{m}-\frac{4\sigma^2}{r^2}\right\},$$

$$d\frac{2\sigma}{r}=-d\vartheta\sqrt{\frac{2h}{m}+\frac{\mu}{\sigma}\frac{2\sigma}{r}-\left(\frac{2\sigma}{r}\right)^2},$$

$$d\left(\frac{2\sigma}{r}\right)=-d\vartheta\sqrt{\frac{2h}{m}+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}-\left(\frac{2\sigma}{r}-\frac{\mu}{2\sigma}\right)^2}.$$

Положимъ $\frac{2\sigma}{r}-\frac{\mu}{2\sigma}=\rho$; получимъ

$$d\rho=-d\vartheta\sqrt{\frac{2h}{m}+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}-\rho^2}.$$

Но число $\frac{2h}{m}+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}$, очевидно, число положительное, такъ какъ на основаніи уравненій (2) и (5) мы получаемъ

$$\frac{2h}{m}+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu^2}{r^4\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left[r\frac{d\vartheta}{dt}-\frac{\mu}{r^2\frac{d\vartheta}{dt}}\right]^2.$$

Итакъ, можно положить

$$\frac{2h}{m}+\frac{\mu^2}{4\sigma^2}=\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2;$$

имѣемъ

$$-\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4\sigma^2}e^2-\rho^2}}=d\vartheta;$$

интегрируя, получимъ

$$arc\cos\frac{\rho}{\frac{\mu e}{2\sigma}}=\vartheta+C,$$

откуда

$$\rho=\frac{\mu e}{2\sigma}\cos(\vartheta+C),$$

или, обозначая $\vartheta+C=\varphi$, будемъ имѣть

$$\frac{2\sigma}{r}-\frac{\mu}{2\sigma}=\frac{\mu e}{2\sigma}\cos\varphi,$$

$$\frac{2\sigma}{r}=\frac{\mu}{2\sigma}(1+e\cos\varphi),$$

и окончательно

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

гдѣ $p=\frac{4\sigma^2}{\mu}$.

Получаемъ на основаніи § 75 гл. II основной законъ Кеплера.

Планета движется по коническому сѣченію, въ фокусѣ котораго находится солнце.

§ 22. Обращаясь къ разсмотрѣнію задачъ на движеніе системъ точекъ, разсмотримъ упомянутую уже нами задачу о n точкахъ, притягивающихъ другъ друга по закону Newton'а.

Пусть разсматриваются n точекъ $M_1, M_2 \ldots M_n$; обозначимъ для каждой изъ этихъ точекъ M_i массу черезъ m_i и координаты черезъ x_i, y_i, z_i.

Такъ какъ каждая точка M_i двигается подъ вліяніемъ $n-1$ силъ притяженія къ остальнымъ $n-1$ точкамъ, то движущая сила точки будетъ равнодѣйствующей этихъ силъ.

Въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія точки M_i придется писать въ правыхъ частяхъ проекціи этой равнодѣйствующей на оси координатъ; другими словами, придется писать сумму проекцій силъ, составляющихъ эту равнодѣйствующую.

Отсюда уравненія движенія напишутся такъ:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = \mu \sum_k \frac{m_k m_i}{r_{ik}^3} (x_k - x_i), \; m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \mu \sum_k \frac{m_k m_i}{r_{ik}^3} (y_k - y_i),$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \mu \sum_k \frac{m_k m_i}{r_{ik}^3} (z_k - z_i), \tag{1}$$

гдѣ $r_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}$ есть разстояніе между точками M_k и M_i.

Въ системѣ уравненій (1) суммы $\sum\limits_k$ распространяются на значенія k, отличныя отъ i.

Давая значку i всѣ значенія $1, 2, 3 \ldots n$ получимъ $3n$ дифференціальныхъ уравненій для опредѣленія $3n$ координатъ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$.

Мы упомянули въ § 48 гл. I, что задача n тѣлъ представила неопреодолимыя затрудненія уже для случая трехъ тѣлъ. Для двухъ тѣлъ задача сводится къ разобранной уже нами въ § 21 планетной задачѣ и, слѣдовательно, рѣшается вполнѣ.

Здѣсь мы докажемъ только для самаго общаго случая n точекъ справедливость теоремы о прямолинейномъ и равномѣрномъ движеніи центра инерціи (тяжести).

Просуммируя по значку i три уравненія (1), получимъ

$$\sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_i \mu \sum_k \frac{m_k m_i}{r_{ik}^3} (x_k - x_i) \tag{2}$$

и два подобныхъ уравненія для y_i и z_i.

Правая часть уравненія (2) тождественно равна нулю, такъ какъ каждому члену съ разностью $x_k - x_i$ будетъ соотвѣтствовать другой съ обратной разностью $x_i - x_k$.

Итакъ мы получаемъ

$$\sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = 0, \sum_i m_i \frac{d^2 y_i}{d t} = 0, \sum_i m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2} = 0. \tag{3}$$

Разсмотримъ точку N, имѣющую координаты

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i},$$

$$\eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \quad . \quad + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \quad . \quad + m_n} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i},$$

$$\zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + . \quad . \quad . + m_n z_n}{m_1 + m_2 + . \quad . \quad . + m_n} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i};$$

эта точка называется *центромъ инерціи* заданной системы точекъ $M_1, M_2, \ldots M_n$.

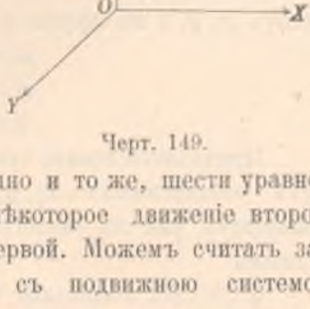
Очевидно, изъ уравненій (3) мы получимъ

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = 0, \frac{d^2 \eta}{d t^2} = 0, \frac{d^2 \zeta}{d t^2} = 0,$$

т. е., дѣйствительно, центръ инерціи движется равномѣрно по прямой.

§ 23. Одна изъ самыхъ важныхъ задачъ механики есть задача о движеніи твердаго тѣла. Подъ твердымъ тѣломъ разумѣется совокупность безчисленнаго множества точекъ, заполняющихъ непрерывно нѣкоторый объемъ и связанныхъ такъ другъ съ другомъ, что во все время движенія разстоянія между этими точками остаются неизмѣнными.

Самымъ естественнымъ образомъ мы приходимъ къ мысли примѣнить къ разсмотрѣнію движенія твердаго тѣла (черт. 149) формулы общаго преобразованія прямоугольныхъ координатъ трехмѣрнаго пространства, приведенныхъ въ § 70 гл. II.



Черт. 149.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы будемъ считать въ формулахъ

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a + x_1 a_1 + y_1 a_2 + z_1 a_3, \\ y &= b + x_1 b_1 + y_1 b_2 + z_1 b_3, \\ z &= c + x_1 c_1 + y_1 c_2 + z_1 c_3 \end{aligned}$$

всѣ 12 коэффиціентовъ $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots$ такими функціями отъ времени t, которыя удовлетворяютъ шести уравненіямъ (2) § 69 гл. II или, что одно и то же, шести уравненіямъ (3) § 69 гл. II, то получимъ нѣкоторое движеніе второй координатной системы относительно первой. Можемъ считать заданное тѣло неизмѣнно связаннымъ съ подвижною системой координатъ.

Зависимости (2) § 69 гл. II даютъ возможность выразить шесть изъ коэффиціентовъ черезъ остальныя шесть. Итакъ, подлежатъ опредѣленію только слѣдующихъ шесть функцій: координаты a, b, c новаго начала и три изъ числа девяти косинусовъ a_i, b_i, c_i.

Когда всѣ коэффиціенты найдены, какъ функціи отъ времени, то функціи a, b, c даютъ законъ такъ называемаго *поступательнаго* движенія тѣла, даютъ траекторію, по которой двигается въ пространствѣ опредѣленная точка O_1 тѣла. Косинусы a_i, b_i, c_i опредѣляютъ *вращеніе* тѣла около этой точки O_1. Отъ совмѣщенія этихъ двухъ движеній получается окончательное движеніе тѣла, подлежащее нахожденію.

Euler показалъ, какъ пишутся дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла подъ вліяніемъ заданныхъ силъ, приложенныхъ къ его точкамъ.

Уравненія Euler'а представляютъ изъ себя систему шести обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ шестью неизвѣстными функціями, черезъ которыя можно опредѣлить всѣ искомые коэффиціенты преобразованія координатъ (1).

Интегрированіе уравненій Euler'а представляетъ задачу, превосходящую до сихъ поръ силы анализа. Найденъ однако цѣлый рядъ случаевъ, когда интегрированіе уравненій Euler'а можетъ быть выполнено. Къ нахожденію такихъ частныхъ случаевъ относятся замѣчательныя изслѣдованія Lagrange'а, Poinsot, Софіи Ковалевской и другихъ.

§ 24. Въ теоріи упругости и гидродинамикѣ разсматривается движеніе такихъ тѣлъ, внутренняя структура которыхъ мѣняется при движеніи, т. е. мѣняются разстоянія между точками этихъ тѣлъ при движеніи.

Задача приводится къ разсмотрѣнію преобразованія координатъ x, y, z въ другія x_1, y_1, z_1, опредѣляемыя формулами

$$x = f_1(x_1, y_1, z_1, t),$$
$$y = f_2(x_1, y_1, z_1, t),$$
$$z = f_3(x_1, y_1, z_1, t).$$

Приходится искать три функціи f_1, f_2, f_3 отъ четырехъ перемѣнныхъ независимыхъ x_1, y_1, z_1, t, т. е. гидродинамическія задачи приводятся уже къ интегрированію уравненій съ частными производными.

§ 25. Въ послѣднее время въ физикѣ поднятъ очень важный вопросъ, подвергающій критикѣ всѣ наши экспериментальныя методы.

Основаніемъ для измѣненія нашихъ взглядовъ на характеръ заключеній, которыя должны быть выведены изъ опытовъ, является зависимость установленія понятія о времени (звѣздныя сутки) отъ зрительныхъ впечатлѣній, которыя, въ свою очередь, находятся въ зависимости отъ скорости свѣта и движенія въ пространствѣ самого наблюдателя.

Эта новая критика приводитъ къ нѣкоторому видоизмѣненію всѣхъ основныхъ положеній механики Newton'a, а потому является серьезной научной реформой. Основную мысль ея называютъ *принципомъ относительности*.

Повидимому, принципъ относительности въ его математической формулировкѣ сводится на разсмотрѣніе четырехмѣрнаго пространства, четвертой координатой котораго является время.

ГЛАВА XIII.

Математическая физика.

§ 1. Въ наиболѣе важныхъ задачахъ математической физики дѣло идетъ обыкновенно объ интегрированіи уравненій съ частными производными сравнительно простого вида.

Такъ напримѣръ, въ задачѣ *движенія теплоты* въ тѣлѣ приходится разсматривать уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

гдѣ u, будучи функціей отъ четырехъ перемѣнныхъ x, y, z, t представляетъ температуру той точки тѣла, которая опредѣляется координатами x, y, z, а t есть время.

Если температура не зависитъ отъ времени, то мы получаемъ задачу *стаціонарнаго* распредѣленія теплоты въ тѣлѣ. Эта задача сводится къ уравненію Laplace'а

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{2}$$

Это уравненіе имѣетъ также большее значеніе въ механикѣ, гдѣ оно играетъ основную роль въ теоріи *потенціала*.

Если мы имѣемъ дѣло съ распространеніемъ теплоты въ прутѣ одного измѣренія, то приходится считать температуру u функціей отъ одной координаты x и времени, и мы получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3}$$

Это уравненіе играетъ роль въ вопросахъ объ охлажденіи земной коры.

Въ акустикѣ играетъ важную роль уравненіе

$$(4) \qquad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

которое даетъ вибраціи натянутой упругой струны; уравненіе

$$(5) \qquad a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

даетъ колебанія упругой мембраны.

§ 2. Разсмотримъ уравненіе потенціала въ n—мѣрномъ пространствѣ, т. е. уравненіе

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Разсмотримъ частное рѣшеніе этого уравненія такого вида, когда функція u будетъ функціей отъ одного аргумента

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

т. е.

$$(2) \qquad u = f(r);$$

тогда, дифференцируя уравненіе (2) по x_i, получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r};$$

дифференцируя еще разъ, имѣемъ

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{f'(r)}{r} + \left[\frac{f'(r)}{r} \right]' \frac{x_i^2}{r};$$

подставивъ полученныя выраженія въ уравненіе (1), получимъ

$$n \frac{f'(r)}{r} + \left[\frac{f'(r)}{r} \right]' \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{r} = 0,$$

или, полагая $\frac{f'(r)}{r} = \varphi(r)$, получимъ

$$n \varphi(r) + \varphi'(r) . r = 0.$$

Это уравненіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{n}{r};$$

Интегрируя, получимъ

$$lg\,\varphi(r) = lg\,\frac{1}{r^n} + lg\,C,$$

гдѣ C постоянная произвольная величина.

Отсюда получаемъ

$$\frac{f'(r)}{r} = \varphi(r) = \frac{C}{r^n},$$

а слѣдовательно

$$f'(r) = \frac{C}{r^{n-1}}.$$

Интегрируя, получаемъ при $n > 2$

$$f(r) = -\frac{C}{(n-2)\,r^{n-2}} + C_1,$$

а при $n = 2$

$$f(r) = C\,lg\,r + C_1.$$

Отсюда происходитъ названіе *уравненія логариѳмическаго потенціала* для уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

соотвѣтствующаго случаю $n = 2$.

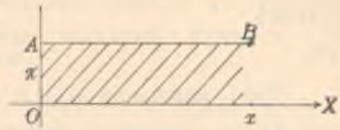
Это уравненіе, какъ мы видѣли, играетъ большую роль въ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго. Оно имѣетъ большія приложенія въ теоріи электричества и въ гидродинамикѣ.

При $n = 3$ мы получаемъ

$$f'(r) = \frac{c}{r^2}$$

и, значитъ, производная отъ функціи $f(r)$ выражаетъ Newton'овскій законъ всемірнаго тяготѣнія и имѣетъ обратную пропорціанальность квадрату разстоянія r. Поэтому при $n = 3$ уравненіе (2) § 1 называется *уравненіемъ Newton'ова потенціала*.

§ 3. Для иллюстраціи методъ, употребляемыхъ въ математической физикѣ, разсмотримъ задачу Fourier о стаціонарномъ распредѣленіи температуры въ безконечной длины прямоугольной пластинкѣ, имѣющей ширину π (черт. 150). Пусть температура постоянна и равна нулю вдоль по длиннымъ краямъ Ox, AB пластинки, а для всѣхъ точекъ короткой стороны OA она равна единицѣ.



Черт. 150.

Возьмемъ за ось x-овъ одну изъ длинныхъ сторонъ OX. Ось y-овъ пустимъ по короткой сторонѣ OA, тогда задача рѣшается уравненіемъ

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

съ такими добавочными условіями

$$(2) \qquad u = 0, \text{ если } y = 0;$$

$$(3) \qquad u = 0, \quad „ \quad y = \pi;$$

$$(4) \qquad u = 0, \quad „ \quad x = \infty;$$

$$(5) \qquad u = 1, \quad „ \quad x = 0.$$

Такъ какъ наше уравненіе (1) *линейное*, то рѣшеніе его выразится суммой

$$(6) \qquad u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + \ldots,$$

гдѣ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ суть постоянныя произвольныя величины, а $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *частныя рѣшенія* уравненія (1).

Для полученія частныхъ рѣшеній уравненія (1) положимъ

$$(7) \qquad u = e^{\alpha x + \beta y},$$

гдѣ α и β числа постоянныя. Подставляя выраженіе (7) въ уравненіе (1) и сокращая на $e^{\alpha x + \beta y}$, получимъ

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

откуда

$$\beta = \pm \alpha i, \text{ гдѣ } i = \sqrt{-1}.$$

Мы получаемъ два рѣшенія

$$(8) \qquad u = e^{\alpha x}. - e^{\alpha i y}, \; u = e^{\alpha x} e^{\alpha i y};$$

складывая эти рѣшенія и дѣля на 2, получаемъ такое новое рѣшеніе

(9) $$u = e^{\alpha x} \cos \alpha y;$$

вычитая же другъ изъ друга рѣшенія (8) и дѣля на $2i$, получаемъ

(10) $$u = e^{\alpha x} \sin \alpha y.$$

Такъ какъ при $y = 0$ функція $u = 0$, то, естественно, является мысль составить искомую фунцію изъ рѣшеній (10), т. е.

(11) $$u = A_1 e^{\alpha_1 x} \sin \alpha_1 y + A_2 e^{\alpha_2 x} \sin \alpha_2 y + A_3 e^{\alpha_3 x} \sin \alpha_3 y + \ldots$$

Такъ какъ должно быть $u = 0$ при $y = \pi$, то достаточно взять числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

числами цѣлыми. Мы возьмемъ эти числа отрицательными, чтобы удовлетворялось требованіе (4); итакъ, мы приходимъ къ ряду

(12) $$u = A_1 e^{-x} \sin y + A_2 e^{-2x} \sin 2y + A_3 e^{-3x} \sin 3y + \ldots$$

При $x = 0$, мы имѣемъ

(13) $$u = A_1 \sin y + A_2 \sin 2y + A_3 \sin 3y + \ldots$$

Наша задача будетъ рѣшена окончательно, если только можно будетъ единицу представить въ видѣ ряда (13). Оказывается справедливой формула

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin y + \frac{1}{3} \sin 3y + \frac{1}{5} \sin 5y + \ldots\right).$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$A_1 = \frac{4}{\pi}, A_2 = 0, A_3 = \frac{4}{\pi}\frac{1}{3}, A_4 = 0, A_5 = \frac{4}{\pi}\frac{1}{5}, \ldots$$

такъ что получаемъ окончательное рѣшеніе задачи въ такомъ видѣ

$$u = \frac{4}{\pi}\left\{ e^{-x} \sin y + \frac{1}{3} e^{-3x} \sin 3y + \frac{1}{5} e^{-5x} \sin 5y + \ldots \right\}.$$

Тригонометрическіе ряды.

§ 4. Мы могли бы задачу предыдущаго §-а видоизмѣнить тѣмъ, что потребовать другой законъ распредѣленія температуры на короткомъ краѣ OA пластинки; мы могли бы потребовать, чтобы эта температура указывалась нѣкоторой функціею отъ y

$$f(y),$$

причемъ задача свелась бы къ выраженію функціи $f(y)$ тригонометрическимъ рядомъ (13) § 3.

Итакъ, задачи математической физики привели къ важному вопросу о представленіи произвольно заданной функціи $f(x)$ рядомъ

(1) $$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + A_\kappa \cos \kappa x + B_\kappa \sin \kappa x + \ldots$$

Конечно, заданная функціи $f(x)$ должна быть періодической съ періодомъ 2π, т. е. должно быть

$$f(x + 2\pi) = f(x),$$

такъ какъ всѣ члены ряда не мѣняются при измѣненіи x на $x + 2\pi$.

Мы можемъ считать функцію $f(x)$ заданною въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$, такъ какъ, очевидно, можно разсматривать всякій промежутокъ $(a, a + 2\pi)$.

§ 5. Euler показалъ очень простой способъ опредѣленія коэффиціентовъ ряда (1) § 4. Въ самомъ дѣлѣ, интегрируя въ предѣлахъ $-\pi$ и $+\pi$ равенство (1), получимъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = A_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi A_0,$$

такъ какъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx\, dx = 0$$

при всякомъ цѣломъ k, слѣдовательно

(1) $$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx.$$

Для полученія коэффиціента A_κ достаточно умножить обѣ части уравненія (1) § 4 на $\cos kx$ и потомъ интегрировать въ границахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$.

Въ самомъ дѣлѣ, мы будемъ имѣть

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0,$$

такъ какъ

$$2 \cos kx \sin lx = \sin (l + k) x + \sin (l - k) x.$$

Что касается интеграла

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx \, dx,$$

то этотъ интегралъ равенъ нулю, если l не $= k$, такъ какъ

$$2 \cos kx \cos lx = \cos (k + l) x + \cos (k - l) x.$$

Если же $l = k$, то имѣемъ

$$\cos^2 kx = \frac{\cos 2 kx + 1}{2},$$

и мы получаемъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2 kx \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dx = \pi.$$

Итакъ, интегрируя равенство (1) § 4 послѣ умноженія его на $\cos kx$, получаемъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx = \pi A_k,$$

откуда

(2) $$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ мы найдемъ черезъ умноженіе уравненія (1) § 4 на $\sin kx$ и интегрированіе

(3) $$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

§ 6. Приведенное разсужденіе Euler'a нельзя считать вполнѣ убѣдительнымъ, такъ какъ въ немъ неявно заключается заранѣе предположенная возможность разложенія функціи (x) въ тригонометрическій рядъ, а далѣе предполагается возможнымъ интегрировать почленно этотъ рядъ. Для того чтобы сдѣлать разсужденія строгими, Dilichlet поставилъ задачу такъ: предполагая, что коэффиціенты ряда выражены по формуламъ

$$(1)\qquad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha,\; A_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha,$$

$$B_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha,$$

мы составляемъ сумму

$$S_m = A_0 + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=m}(A_\kappa \cos kx + B_\kappa \sin kx),$$

разсматриваемъ предѣлъ S_m при возрастаніи m до ∞ и испытываемъ, будетъ ли этотъ предѣлъ равенъ данной функціи $f(x)$. Dirichlet нашелъ, что можно утверждать, что формула

$$\lim_{m=\infty} S_m = f(x)$$

справедлива при такихъ условіяхъ:

1) всѣ значенія $f(x)$ въ данномъ промежуткѣ конечны,

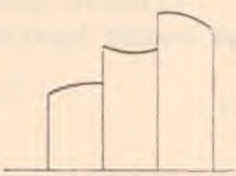
2) въ промежуткѣ существуетъ конечное число maxima и minima функціи $f(x)$,

3) функція $f(x)$ вообще непрерывна въ данномъ промежуткѣ, но можетъ (черт. 151) претерпѣвать для отдѣльныхъ значеній разрывы слѣдующаго рода: предѣлъ, къ которому стремится

$$f(x+h)$$

при уменьшеніи до нуля положительныхъ чиселъ h, можетъ не равняться предѣлу

$$f(x-h).$$



Черт. 151.

§ 7. Если функція не удовлетворяетъ условіямъ Dirichlet, то возможны самые разнообразные исключительные случаи, разборъ которыхъ составляетъ одну изъ тончайшихъ теорій современной математики, въ которой произведены заслуживающія вниманія изслѣдованія профессоромъ Harnak'омъ.

Оказывается, что если сумма S_m не имѣетъ предѣломъ функціи $f(x)$, то было бы поспѣшно заключить, что функція $f(x)$ не раскладывается въ тригонометрическій рядъ

(1) $A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \cos 2x + \ldots$

Можетъ вмѣть мѣсто только одно изъ двухъ заключеній: или функція дѣйствительно не раскладывается въ рядъ (1), или же, если она раскладывается, то коэффиціенты этого ряда не получаются по формуламъ (1) § 6.

Отсюда явилась необходимость различать два понятія: 1) *тригонометрическій рядъ*, 2) *рядъ Fourier*, въ которомъ коэффиціенты выражаются по формулѣ (1) § 6.

Интегралъ Fourier.

§ 8. Разложеніе функціи $f(x)$ въ рядъ Fourier можетъ быть переписано такъ

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,[\cos kx \cos k\alpha +\right.$$

$$\left. + \sin kx \sin k\alpha]\,d\alpha\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha - x)\,d\alpha\right\}.$$

Сдѣлаемъ преобразованіе перемѣнныхъ α и x въ другія, λ и ξ, при помощи формулъ

(1) $$x = \frac{\pi\xi}{l},\ \alpha = \frac{\pi\lambda}{l},$$

гдѣ l нѣкоторое, пока произвольно выбранное число, которое мы будемъ далѣе увеличивать до безконечности; обозначимъ

$$f\left(\frac{\pi\xi}{l}\right) = \varphi(\xi),$$

получимъ

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{l}\left\{\frac{1}{2}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\,d\lambda+\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\frac{k\pi}{l}(\lambda-\xi)\,d\lambda\right\}$$

или иначе

$$(2)\qquad \varphi(\xi)=\frac{1}{l}\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\frac{k\pi}{l}(\lambda-\xi)\,d\lambda-\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Предположимъ, что интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

имѣетъ конечное значеніе, тогда въ формулѣ (2) пропадаетъ при $l=\infty$ второй интегралъ, и мы получаемъ

$$\varphi(\xi)=\lim_{l=\infty}\left\{\frac{1}{l}\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\frac{k\pi}{l}(\lambda-\xi)\,d\lambda\right\};$$

очевидно, что неравенства

$$-\pi<x<+\pi$$

даютъ на основаніи (1)

$$-l<\xi<+l.$$

Положимъ теперь

$$\frac{k\pi}{l}=\alpha,\ \frac{\pi}{l}=\Delta\alpha$$

и

$$\Omega(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\lambda)\cos\alpha(\lambda-\xi)\,d\lambda;$$

мы получаемъ

$$\varphi(\xi)=\lim_{\Delta\alpha=0}\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\Omega(\alpha)\,\Delta\alpha=\int_0^\infty\lim\Omega(\alpha)\,d\alpha$$

или окончательно

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\cos\alpha(\lambda-\xi)\,d\lambda, \tag{3}$$

причемъ, очевидно, имѣемъ $-\infty<\xi<+\infty$.

Подставляя въ формулу (3) вмѣсто α величину $-\alpha$ получимъ

$$\varphi(\xi)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\cos\alpha(\lambda-\xi)\,d\lambda= \tag{4}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\cos\alpha(\lambda-\xi)\,d\lambda;$$

складывая формулы (3) и (4) и дѣля на 2 получимъ

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\cos\alpha(\lambda-\xi)\,d\alpha\,d\lambda. \tag{5}$$

Такъ какъ функція $\sin\alpha(\lambda-\xi)$ нечетная относительно α, то имѣемъ

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\sin\alpha(\lambda-\xi)\,d\alpha\,d\lambda; \tag{6}$$

умножая формулу (6) на $\sqrt{-1}$ и складывая съ формулой (5) получимъ

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)\,e^{i\alpha(\lambda-\xi)}\,d\alpha\,d\lambda. \tag{7}$$

Это и есть знаменитая формула Fourier, имѣющая большія приложенія.

§ 9. Формула (7) § 8 очень просто обобщается на случай большаго числа перемѣнныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцію $f(x,y)$ отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ. Считая y величиною постоянной, можемъ примѣнить формулу Fourier:

$$(1)\qquad f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,y)\,e^{i\alpha(\lambda-x)}\,d\alpha\,d\lambda.$$

Но къ функціи $f(\lambda, y)$ можно примѣнить ту же формулу, а именно

$$(2)\qquad f(\lambda,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,\mu)\,e^{i\beta(\mu-y)}\,d\beta\,d\mu;$$

подставляя (2) въ формулу (1) получимъ

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,\mu)\,e^{i\,[\alpha(\lambda-x)+\beta(\mu-y)]}\,d\alpha\,d\lambda\,d\beta\,d\mu.$$

Очевидно, что получается формула для любого числа n перемѣнныхъ $x, y, \ldots z$:

$$(3)\qquad f(x,y,\ldots z)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{\infty}^{+\infty}f(\lambda,\mu,\ldots\nu)\,e^{i\,[\alpha(\lambda-x)+\beta(\mu-y)\ldots+\gamma(\nu-z)]}$$

$$d\alpha\,d\beta\ldots d\gamma\,d\lambda\,d\mu\ldots d\nu.$$

Интегрированіе линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ съ постоянными коэффиціентами.

§ 10. Cauchy показалъ, что формула Fourier (3) § 9 даетъ возможность интегрировать линейныя уравненія въ частныхъ производныхъ съ постоянными коэффиціентами.

Разсмотримъ сначала уравненія безъ послѣдняго члена, т. е. уравненія вида

$$(1)\qquad \sum \mathfrak{A}\frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha\partial y^\mu\partial z^\nu\ldots\partial t^m}=0,$$

гдѣ сумма распространяется на конечное число членовъ, изъ которыхъ каждый заключаетъ нѣкоторую частную производную, умноженную на заданный постоянный коэффиціентъ $\mathfrak{A}$.

Отдѣлимъ одну изъ перемѣнныхъ, напримѣръ t, отъ остальныхъ n перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ Въ математической физикѣ такимъ особеннымъ перемѣннымъ t является обыкновенно время.

Наше уравненіе (1) можетъ быть переписано въ видѣ

$$\frac{\partial^m \Omega}{\partial t^m}+\frac{\partial^{m-1}\Omega_1}{\partial t^{m-1}}+\ .\ .\ .+\frac{\partial\,\Omega_{m-1}}{\partial t}+\Omega_m=0, \tag{2}$$

гдѣ всѣ величины Ω_j суть линейныя функціи съ постоянными коэффиціентами отъ частныхъ производныхъ, взятыхъ по всѣмъ другимъ перемѣннымъ, т. е.

$$\Omega_j=a\frac{\partial^{\kappa} u}{\partial x^g\,\partial y^h\,\partial z^l\ .\ .\ .}+b\frac{\partial^{\kappa'} u}{\partial x^{g'}\,\partial y^{h'}\,\partial z^{l'}\ .\ .\ .}+\ .\ .\ . \tag{3}$$

Cauchy показываетъ, что можно рѣшить при помощи интеграла Fourier задачу интегрированія уравненія (2) такимъ образомъ, чтобы при $t=0$ обращались искомая функція u и ея частныя производныя $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ .\ .\ .\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}$ въ заданныя функціи $f_0(x,y,z,\ .\ .\ .\ .)$, $f_1(x,y,z\ldots)$, . . . $f_{m-1}(x,y,z,\ .\ .\ .\ .)$ отъ остальныхъ перемѣнныхъ.

Cauchy представляетъ интегралъ уравненія (2) въ видѣ

$$u=\frac{1}{(2\pi)^n}\Bigg[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{T}\,f(x',y',z',\ .\ .\ .\ .)\,\omega+ \tag{4}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{T}_1 f_1(x',y',z',\ldots)\,\omega+\ldots+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{T}_{m-1}f_{m-1}(x',y',z',\ .\ .\ .)\,\omega\Bigg].$$

Здѣсь для краткости обозначено

$$\omega=e^{i\,[\alpha(x'-x)+\beta(y'-y)+\gamma(z'-z)+\ldots]}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\ldots dx'\,dy'\,dz'\ldots,$$

а одиночный интегралъ написанъ вмѣсто $2n$-кратнаго; предположимъ множители

$$\mathrm{T},\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2\ .\ .\ .\ \mathrm{T}_{m-1}$$

фунціями отъ t, въ которыя, какъ мы предполагаемъ, могутъ входить, какъ параметры, величины $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$, но величины $x',y',z',\ldots$ не входятъ.

Подставивъ интегралъ (3) въ уравненіе (2) получимъ

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m \mathrm{T}}{dt^m}+A_1\frac{d^{m-1}\mathrm{T}}{dt^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{d\mathrm{T}}{dt}+A_m\mathrm{T}\right]f\omega+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m \mathrm{T}_1}{dt^m}+A_1\frac{d^{m-1}\mathrm{T}_1}{dt^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{d\mathrm{T}_1}{dt}+A_m\mathrm{T}_1\right]f_1\omega+$$

. . . .

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A\frac{d^m \mathrm{T}_{m-1}}{dt^m}+A_1\frac{d^{m-1}\mathrm{T}_{m-1}}{dt^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{d\mathrm{T}_{m-1}}{dt}+\right.$$

$$(5)\qquad \left.+A_m\mathrm{T}_{m-1}\right]f_{m-1}\omega,$$

гдѣ коэффиціенты $A, A_1, \ldots A_m$ будутъ заключать только перемѣнныя $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, которыя можно считать постоянными при дифференцированіи по t.

На основаніи (3) получимъ

$$A_j=i^\kappa a\alpha^g\beta^h\gamma^l\ldots+i^{\kappa'}b\alpha^{g'}\beta^{h'}\gamma^{l'}\ldots+\ldots$$

Для удовлетворенія уравненію (5) достаточно взять за T_j какое нибудь рѣшеніе такого обыкновеннаго линейнаго дифференціальнаго уравненія:

$$(6)\qquad A\frac{d^m V}{dt^m}+A_1\frac{d^m V}{dt^m}+\ldots+A_{m-1}\frac{dV}{dt}+A_m V=0.$$

Общій интегралъ уравненія (6) на основаніи сказаннаго въ § 14 гл. X будетъ:

$$(7)\qquad V=C_1e^{\rho_1 t}+C_2e^{\rho_2 t}+\ldots+C_me^{\rho_m t},$$

гдѣ $\rho_1\rho_2\ldots\rho_m$ суть корни алгебраическаго уравненія

$$A\rho^m+A_1\rho^{m-1}+\ldots+A_{m-1}\rho+A_m=0.$$

Постоянныя произвольныя $C_1, C_2, \ldots C_m$ выберемъ такъ, чтобы при $t=0$ было

$$V=0,\frac{dV}{dt}=0,\frac{d^2V}{dt^2}=0,\ldots\frac{\partial t^{j-1}V}{dt^{j-1}}=0,\frac{d^jV}{dt^j}=1,$$

$$\frac{d^{j+1}V}{dt^{j+1}}=0,\ldots\frac{d^{m-1}V}{dt^{m-1}}=0,$$

или иначе надо для нахожденія $C_1, C_2, \ldots C_m$ рѣшить систему уравненій:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + \ldots + C_m = 0,\\
&C_1\rho_1 + C_2\rho_2 + \ldots + C_m\rho_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1\rho_1^{j-1} + C_2\rho_2^{j-1} + \ldots + C_m\rho_m^{j-1} = 0,\\
&C_1\rho_1^{j} + C_2\rho_2^{j} + \ldots + C_m\rho_m^{j} = 1,\\
&C_1\rho_1^{j+1} + C_2\rho_2^{j+1} + \ldots + C_m\rho_m^{j+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1\rho_1^{m-1} + C_2\rho_2^{m-1} + \ldots + C_m\rho_m^{m-1} = 0.
\end{aligned}
$$

Значенія $C_1, C_2, \ldots C_m$, взятыя изъ послѣдней системы (8), подставляемъ въ выраженіе (7); полученное такимъ образомъ выраженіе можемъ принять за T_j, и задача рѣшена.

§ 11. Остается сказать два слова о томъ случаѣ, когда дифференціальное уравненіе задано съ послѣднимъ членамъ, т. е.

$$
(1)\qquad \frac{\partial^m \Omega}{\partial t^m} + \frac{\partial^{m-1}\Omega_1}{\partial t^{m-1}} + \ldots + \frac{\partial \Omega_{m-1}}{\partial t} + \Omega_m = \varphi(t, x, y, \ldots).
$$

На основаніи тѣхъ же соображеній, которыя приведены въ § 15 гл. X для обыкновенныхъ уравненій, мы замѣчаемъ, что общій интегралъ уравненія (1) сводится къ общему интегралу уравненія

$$
(2)\qquad \frac{\partial^m \Omega}{\partial t^m} + \ldots + \frac{\partial \Omega_{m-1}}{\partial t} + \Omega_m = 0
$$

безъ послѣдняго члена, если извѣстно одно частное рѣшеніе V уравненія (1), такъ какъ, если мы получаемъ

$$u = V + u',$$

и если u и V будутъ рѣшеніями уравненія (1), то u' будетъ рѣшеніемъ уравненія (2).

Та же самая метода Cauchy даетъ возможность найти частное рѣшеніе V.

Разсматриваемъ формулу

$$
(3)\qquad V = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} N e^{\,i[\alpha(x'-x) + \beta(y'-y) + \ldots + \tau(t-t')]} \,.
$$

$$. \varphi(t', x', y', \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\tau\, dx'\, dy' \ldots dt';$$

здѣсь интегралъ, очевидно, $(2n+2)$ — кратный.

Подставляя этотъ интегралъ въ уравненіе (1) получимъ

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} N.\mathfrak{N}\, e^{i\,[\alpha(x-x')+\,\ldots\,+\,\tau(t-t')]}\,\varphi(t',x',y',\,\ldots\,)\,d\alpha\,\ldots$$

$$\ldots\, d\tau\, dx'\,\ldots\, dt' = \varphi(t,x,y,\,\ldots\,);$$

достаточно, очевидно, положить

$$N\mathfrak{N} = 1.$$

Итакъ, подстановка въ формулѣ (3) вмѣсто N величины $\frac{1}{\mathfrak{N}}$ даетъ искомое частное рѣшеніе.

Фундаментальныя функціи.

§ 12. Если мы хотимъ въ немногихъ словахъ резюмировать общій характеръ задачъ математической физики, то придется обратить вниманіе на то обстоятельство, что дѣло идетъ объ интегрированіи нѣкотораго линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ, причемъ искомая функція должна удовлетворять еще нѣкоторымъ добавочно поставленнымъ условіямъ. Эти условія называются *начальными*, если искомая функція, будучи функціей отъ времени t, должна въ извѣстный моментъ времени, напримѣръ при $t=0$, обладать предписанными свойствами. Условія называются *граничными*, если функція извѣстнымъ образомъ задается на границѣ разсматриваемой области: напримѣръ на поверхности, ограничивающей заданный объемъ, на контурѣ, ограничивающемъ данную площадь и тому подобное.

Обыкновенно представляетъ главную трудность задачи удовлетворить именно этимъ начальнымъ и граничнымъ условіямъ.

Главнѣйшіе намъ извѣстные пріемы рѣшенія задачъ математической физики состоятъ въ обобщеніи пріемовъ Fourier, показанныхъ нами въ § 4. Чтобы яснѣе представить общую идею такихъ обобщеній, разсмотримъ еще одну задачу. Требуется найти стаціонарное распредѣленіе температуры внутри твердаго шара радіуса 1, поверхность одного полушарія котораго поддерживается въ постоянной температурѣ 0, а другого полушарія въ температурѣ 1.

Мы должны будемъ взять уравненіе Laplace'а (2) §1. Удобно ввести въ разсмотрѣніе полярныя координаты, опредѣленныя уравненіями (1) § 65 гл. II.

Итакъ, приходится преобразовать выраженіе

$$S=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

къ новымъ перемѣннымъ независимымъ ρ, u, v, связаннымъ съ прежними формулами

$$x=\rho \sin u \cos v, y=\rho \sin u \sin v, z=\rho \cos u.$$

Продѣлаемъ эту выкладку преобразованія перемѣнныхъ независимыхъ, такъ какъ она представляетъ сама по себѣ интересную задачу.

Для упрощенія выкладокъ примѣнимъ нѣкоторый искусственный пріемъ.

Обозначимъ для сокращенія $\rho \sin u=r$ и, оставляя z безъ перемѣны, замѣнимъ x, y на новыя перемѣнныя r и v при помощи равенствъ

$$x=r\cos v, y=r\sin v; \tag{1}$$

отсюда

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, tg\, v=\frac{y}{x};$$

дифференцируя эти формулы, получимъ

$$\begin{aligned} dr&=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos v\, dx+\sin v\, dy, \\ dv&=\frac{(xdy-ydx)\cos^2 v}{x^2}=-\frac{\sin v}{r}dx+\frac{\cos v}{r}dy. \end{aligned} \tag{2}$$

На основаніи равенствъ (2) полный дифференціалъ отъ V напишется такъ

$$dV=\frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial v}dv=\frac{\partial V}{\partial r}(\cos v\, dx+\sin v\, dy)+$$
$$+\frac{\partial V}{\partial v}\left(-\frac{\sin v}{r}dx+\frac{\cos v}{r}dy\right);$$

очевидно, что коэффиціентами при dx и dy будутъ частныя производныя по x и y; мы получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}&=\frac{\partial V}{\partial r}\cos v-\frac{\sin v}{r}\frac{\partial V}{\partial v}, \\ \frac{\partial V}{\partial y}&=\frac{\partial V}{\partial r}\sin v+\frac{\cos v}{r}\frac{\partial V}{\partial v}; \end{aligned} \tag{3}$$

умножая второе уравненіе на $i = \sqrt{-1}$ и складывая съ первымъ, получимъ

$$\frac{\partial V}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial y} = e^{iv}\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial V}{\partial v}\right). \tag{4}$$

Обозначимъ черезъ ω значеніе первой части формулы (4), слѣдовательно

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{5}$$

Формула (4) годится, какъ тождественная, для всякой функціи V и для всякаго знака при $i = \sqrt{-1}$, значитъ, примѣняя ее для случая $V = \omega$ и для $-i$, мы получимъ

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} - i\frac{\partial \omega}{\partial y} = e^{-iv}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right);$$

подставляя въ лѣвую часть этого уравненія вмѣсто ω величину (5), а въ правую часть величину

$$\omega = e^{iv}\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial V}{\partial v}\right), \tag{6}$$

получимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}; \tag{7}$$

значитъ

$$S = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}; \tag{8}$$

замѣнимъ теперь перемѣнныя z, r новыми ρ и u, тогда получимъ окончательное преобразованіе, которое требуется выполнить.

Такъ какъ формулы послѣдняго преобразованія суть

$$z = \rho \cos u,\ r = \rho \sin u, \tag{9}$$

то мы видимъ, что это преобразованіе подобно ранѣе выполненному (1) съ тою лишь разницей, что буквы x, y, r, v надо замѣнить буквами z, r, ρ, u. Формула (7) перепишется такъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}; \tag{10}$$

кромѣ того, вторая формула (3) послѣ замѣны на новыя буквы даетъ

$$(11)\qquad \frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\sin u+\frac{\cos u}{\rho}\frac{\partial V}{\partial u};$$

принимая во вниманіе формулы (10) и (11) легко получимъ изъ формулы (3)

$$S=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2 \sin^2 u}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\cos u}{\rho^2 \sin u}\frac{\partial V}{\partial u}.$$

Эту формулу можно написать короче

$$(12)\qquad \rho^2 S=\rho\frac{\partial^2(\rho V)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\frac{1}{\sin u}\frac{\partial\left(\sin u\frac{\partial V}{\partial u}\right)}{\partial u}.$$

Итакъ, придется разсматривать дифференціальное уравненіе

$$S=0.$$

Мы имѣемъ право предположить граничныя условія такимъ образомъ, что

$$(13)\qquad \begin{aligned} &V=1,\ \text{когда}\ \rho=1,\quad 0<u<\frac{\pi}{2},\\ &V=0,\ \text{когда}\ \rho=1,\quad \frac{\pi}{2}<u<\pi. \end{aligned}$$

Очевидно, что вслѣдствіе симметричнаго распредѣленія граничныхъ температуръ относительно полярной оси, мы можемъ предполагать и общее распредѣленіе температуры внутри шара независящимъ отъ угла v, тогда мы имѣемъ право разсматривать болѣе простое уравненіе

$$(14)\qquad \rho\frac{\partial^2(\rho V)}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\sin u}\frac{\partial\left(\sin u\frac{\partial V}{\partial u}\right)}{\partial u}=0;$$

будемъ искать частныя его рѣшенія вида

$$(15)\qquad V=\rho^m U,$$

гдѣ m цѣлое число, а U функція отъ одного u; подставляя выраженіе (15) въ уравненіе (14), получимъ

$$\rho^m m(m+1)U+\frac{\rho^m}{\sin u}\frac{d\left(\sin u\frac{dU}{du}\right)}{du}=0.$$

Сокращая это уравненіе на ρ^m, мы можемъ для упрощенія ввести новую перемѣнную

$$x = \cos u;$$

такъ какъ U есть функція отъ одного u, то она обратится въ нѣкоторую функцію X отъ одного x, и мы получимъ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right] + m(m+1)X = 0.$$

Получаемъ для опредѣленія функцій X обыкновенное дифференціальное уравненіе второго порядка

$$(15) \qquad (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2} - 2x\frac{dX}{dx} + m(m+1)X = 0.$$

Это есть то извѣстное уравненіе, которому, какъ показалъ Legendre, удовлетворяетъ нѣкоторая цѣлая функція степени m, носящая названіе *полинома Legendre'а*.

Обозначая функцію Legendre'а черезъ X_m получаемъ

$$X_m = C\left[x^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)}x^{m-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4.(2m-1)(2m-3)}x^{m-4} + \ldots\right].$$

Обыкновенно постоянное произвольное принимаемъ равнымъ

$$C = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1}{m!},$$

такъ что

$$X_0(x) = 1, X_1(x) = x, X_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \ldots$$

Итакъ, искомое рѣшеніе задачи можно представить въ видѣ ряда

$$V = A_0 X_0(\cos\vartheta) + A_1 \rho X_1(\cos\vartheta) + A_2 \rho^2 X_2(\cos\vartheta) + \ldots,$$

при $\rho = 1$ получаемъ

$$V = A_0 X_0(\cos\vartheta) + A_1 X_1(\cos\vartheta) + A_2 X_2(\cos\vartheta) + \ldots$$

Итакъ, мы имѣемъ рядъ, расположенный по функціямъ Legendre'а, и задача сводится къ опредѣленію коэффиціентовъ ряда такимъ образомъ, чтобы получалась заданная условіями (13) функція.

Мы приходимъ къ задачѣ представленія произвольно заданной функціи рядомъ, расположеннымъ по функціямъ Legendre'a.

§ 13. Тригонометрическія функціи и функціи Legendre'a суть простые случаи такъ называемыхъ *фундаментальныхъ функцій*, обширная теорія которыхъ даетъ въ настоящее время прекрасныя приложенія въ математической физикѣ.

Въ этой теоріи получили извѣстность въ послѣднее время Poincaré, Ляпуновъ, Стекловъ, Zaremba, Korn.

Интегральныя уравненія.

§ 14. Вопросы математической физики привели въ послѣднее время къ открытію, имѣющему общематематическое значеніе. Это открытіе принадлежитъ шведскому математику Fredholm'у и носитъ названіе теоріи *интегральныхъ уравненій*. Первыя работы Fredholm'a по интегральнымъ уравненіямъ появилась въ 1900 году.

Fredholm ставитъ двѣ слѣдующія задачи.

1. Дано уравненіе

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

гдѣ $f(s)$ и $K(s, t)$ заданныя въ промежуткѣ (a, b) функціи. Ищется функція $\varphi(t)$. Уравненіе (1) носитъ названіе *интегральнаго уравненія перваго рода.*

2. Дано уравненіе

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt \tag{2}$$

съ заданными функціями $f(s)$ и $K(s, t)$ и искомой функціей $\varphi(t)$. Уравненіе (2) носитъ названіе *интегральнаго уравненія второго рода.*

§ 15. Мы не будемъ обсуждать вопроса о роли интегральныхъ уравненій въ математической физикѣ. На этотъ счетъ мнѣнія математиковъ еще не установились.

Я скажу только два слова о важномъ принципіальномъ значеніи интегральныхъ уравненій. Разсмотримъ систему линейныхъ уравненій

$$f_s = \sum_{t=1}^{t=h} k_{st}\varphi_t \quad (s = 1, 2, \ \ldots n) \tag{1}$$

съ заданными числами f_s и k_{st} и неизвѣстными

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n.$$

Обобщеніе системы (1) на случай безконечнаго числа неизвѣстныхъ можетъ быть проведено двояко, такъ какъ конечная сумма

$$\sum_{t=1}^{t=h} k_{st}\varphi_t$$

можетъ быть двояко обобщена на случай безконечнаго числа членовъ. Первое обобщеніе состоитъ въ разсмотрѣніи безконечнаго ряда

$$f_s = \sum_{t=1}^{t=\infty} k_{st}\varphi_t, \tag{2}$$

причемъ число уравненій (1) можно предполагать безконечно большимъ числомъ $s = 1, 2, \ldots \infty$.

При этомъ обобщеніи мы получаемъ теорію *безконечныхъ* опредѣлителей. Приходится разсматривать опредѣлитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k_{11}, k_{12}, \ldots k_{1n} \\ k_{21}, k_{22}, \ldots k_{2n} \\ \ldots\ldots \\ k_{n1}, k_{n2}, \ldots k_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если Δ_n при безпредѣльномъ возрастаніи значка n стремится къ опредѣленному, отличному отъ нуля предѣлу

$$\Delta,$$

то система (2) безконечнаго числа уравненій можетъ допускать рѣшеніе относительно перемѣнной φ_i, причемъ

$$\varphi_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{K}_{in} f_n,$$

гдѣ числа $\mathfrak{K}_{in}$ имѣютъ полную анологію съ минорами опредѣлителя Δ.

Второе обобщеніе состоитъ въ томъ, что конечная сумма

$$\sum k_{st}\varphi_t$$

замѣняется опредѣленнымъ интеграломъ и мы приходимъ къ понятію объ интегралѣ уравненія перваго рода

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Замѣчательно, что Hilbert'у и его ученикамъ удалось обобщить на интегральныя уравненія цѣлый рядъ алгебраическихъ теорій. Поэтому, какъ бы ни относиться къ прикладному значенію интегральныхъ уравненій, нельзя не придавать имъ большого теоретическаго значенія. На этихъ уравненіяхъ мы углубляемся еще разъ въ тайны связи и взаимнаго соотношенія алгебраическаго и трансцендентнаго анализовъ.

§ 16. Серьезныя основанія заставляютъ предполагать о существованіи рѣшеній уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

періодическихъ по параллелепипедамъ въ трехмѣрномъ пространствѣ. Эти рѣшенія являются пространственнымъ аналогомъ эллиптическихъ функцій не по одной только періодичности, но также и по приложеніямъ въ теоріи чиселъ; они осуществляютъ для кубическихъ областей обобщеніе комплекснаго умноженія квадратичной области. Аналогичное обстоятельство имѣетъ мѣсто и при бóльшемъ числѣ измѣреній.

ГЛАВА XIV.

Теорія вѣроятностей.

§ 1. Теорія вѣроятностей есть наука, изучающая законы случая. Какъ парадоксально должна звучать для начинающаго эта фраза! Не является ли понятіе о случайности понятіемъ, противоположнымъ понятію о законности? Тѣмъ не менѣе опытъ житейскій приводитъ къ убѣжденію въ существованіи какихъ то законовъ, регулирующихъ случайныя явленія.

§ 2. Собственно говоря, ничего совершенно случайнаго въ природѣ нѣтъ. Всякое явленіе, какъ бы неожиданнымъ ни казалось его появленіе для наблюдателя, имѣло свои основанія и причины для появленія. Часто причинъ появленія событія бываетъ такъ много, и всѣ эти причины такъ ничтожны каждая въ отдѣльности по своему вліянію на характеръ событія, что нѣтъ никакой возможности которой-нибудь изъ этихъ причинъ придать предоминирующую роль при появленіи событія. Въ такихъ случаяхъ называютъ появленіе событія *случайнымъ*.

Пояснимъ сказанное на примѣрѣ. Положимъ, что изъ перетасованной колоды вынимается на удачу нѣкоторая карта. Эта карта оказалась семеркой пикъ. Спрашивается, въ чемъ состояли причины появленія какъ разъ этой карты, семерки пикъ. Можно указать слѣдующія причины. Во первыхъ, первоначальное положеніе семерки пикъ въ колодѣ, во вторыхъ, совокупность обстоятельствъ движенія рукъ и картъ при тасовкѣ, наконецъ, детали движенія пальцевъ руки, вынувшей изъ колоды семерку пикъ. Детали этихъ движеній совершенно не поддаются учету въ томъ смыслѣ, что достаточно самаго ничтожнаго отклоненія руки и была бы вынута другая карта. Поэтому мы говоримъ, что появленіе семерки пикъ было совершенно случайнымъ, и что можно было съ такою же вѣроятностью ожидать появленія всякой другой карты.

§ 3. Обдумывая внимательно сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, мы приходимъ къ убѣжденію, что понятіе о случайномъ событіи есть нѣкоторое фиктивное понятіе, неосуществимое въ своемъ чистомъ видѣ на практикѣ благодаря существованію разныхъ, хотя и мелкихъ, привходящихъ причинъ. На практикѣ приходится принимать рядъ мѣръ для приданія ожидаемому событію возможно бóльшаго характера случайности. Такъ, напримѣръ, при игрѣ въ карты существуетъ правило обязательнаго тасованія картъ, подобнымъ же образомъ при розыгрышѣ лотерей вращаютъ урну, заключающую свернутые билеты, для того, чтобы перемѣшать эти билеты.

§ 4. Совокупность обстоятельствъ, при которыхъ мы наблюдаемъ появленіе случайнаго событія, мы будемъ называть *испытаніемъ*. Это испытаніе можетъ носить характеръ эксперимента, если мы участвуемъ при помощи нѣкоторыхъ дѣйствій, зависящихъ отъ нашей воли, въ организаціи обстоятельствъ, при которыхъ появляется это событіе. Испытаніе обращается въ простое наблюденіе, если мы являемся посторонними наблюдателями появленія событія, не принимая активнаго участія въ сопровождающей появленіе событія обстановкѣ.

§ 5. Чтобы убѣдиться въ существованіи нѣкоторыхъ законовъ, руководящихъ случайными событіями, обратимся къ разсмотрѣнію примѣровъ. Положимъ, что нѣкоторое лицо производитъ передъ нами такія испытанія: оно вынимаетъ изъ предварительно стасованной колоды карту, показываетъ ее намъ и кладетъ обратно. Положимъ, что десять разъ подъ рядъ выходитъ семерка пикъ. Хотя нѣтъ ничего абсолютно невозможнаго въ такомъ десятикратномъ появленіи карты, тѣмъ не менѣе это кажется намъ совершенно невѣроятнымъ, и мы получаемъ полное убѣжденіе въ томъ, что мы имѣемъ дѣло съ фокусникомъ, показывающимъ передъ нами свое искусство, если только послѣ провѣрки колоды картъ эта колода оказывается не состоящей исключительно изъ семерокъ пикъ.

Предположимъ далѣе, что мы стоимъ на площади нѣкотораго города при началѣ дождя. Каждая капля, падая на землю, описываетъ во время своего движенія нѣкоторую линію, которая будетъ, вообще говоря, кривою подъ вліяніемъ теченій воздуха, отклоняющихъ падающую каплю отъ прямолинейнаго движенія. Паденіе капли на ту или другую плиту мостовой есть дѣло случая, между тѣмъ мы совершенно убѣждены, что въ большой массѣ эти капли начнутъ смачивать всю площадь равномѣрно. Это убѣжденіе настолько велико, что если мы замѣчаемъ на площади сухое пятно, то невольно поднимаемъ голову, чтобы найти ту крышу, которая была причиной этого сухого мѣста.

§ 6. Если при данномъ испытаніи можно ожидать появленія одного изъ двухъ или нѣсколькихъ событій, причемъ нѣтъ никакого основанія предполагать, что одно изъ этихъ событій появится предпочтительно передъ другими, то такія событія называются *равновозможными*. Такъ напримѣръ, появленіе каждой изъ 52-хъ картъ колоды при выниманіи даетъ примѣръ 52-хъ равновозможныхъ событій. Подобнымъ образомъ появленіе нумеровъ 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросаніи кубической кости представляетъ 6 равновозможныхъ событій.

Если въ урнѣ находятся 5 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ, то появленіе бѣлаго или чернаго шара суть событія равновозможныя. Если въ урнѣ будетъ бѣлыхъ шаровъ больше, чѣмъ черныхъ, то эти два событія: появленіе бѣлаго шара и появленіе чернаго шара перестаютъ быть событіями равновозможными; мы имѣемъ всѣ основанія ожидать скорѣе появленія бѣлаго шара.

Въ приложеніяхъ теоріи вѣроятности часто приходится считать за равновозможныя событія такія, равновозможность которыхъ до нѣкоторой степени сомнительна.

§ 7. Если всѣ обстоятельства, сопровождающія испытаніе, намъ настолько хорошо извѣстны, что мы можемъ перечислить всѣ различныя между собой событія, могущія появиться при испытаніи, то эти перечисленныя нами событія носятъ названіе событій *исчерпывающихъ* испытаніе. Напримѣръ, для владѣльца одного билета выигрышнаго займа тиражъ представляется испытаніемъ, которое исчерпывается слѣдующими тремя событіями: 1) выигрышъ, 2) невыигрышъ, 3) выходъ билета въ тиражъ.

§ 8. Событія раздѣляются на *совмѣстимыя* и *несовмѣстимыя*. Несовмѣстимыми называются событія такого характера, что при наступленіи одного изъ нихъ другія уже не могутъ имѣть мѣста.

Понятіе о математической вѣроятности.

§ 9. Если появленіе нѣкотораго событія A при испытаніи *не достовѣрно*, другими словами, если намъ извѣстно, что событіе можетъ или появиться, или не появиться, то мѣру нашего ожиданія этого событія, его такъ называемую *вѣроятность*, мы сравниваемъ съ вѣроятностью появленія бѣлаго шара изъ урны, заключающей a бѣлыхъ шаровъ и b черныхъ, причемъ за мѣру вѣроятности появленія бѣлаго шара беремъ дробь

$$\frac{a}{a+b},$$

въ которой числитель a представляетъ число бѣлыхъ шаровъ, а знаменатель $a+b$ число всѣхъ шаровъ.

§ 10. Предположимъ, что при нѣкоторомъ испытаніи могутъ появится n событій несовмѣстимыхъ, равновозможныхъ и исчерпывающихъ это испытаніе. Эти событія мы назовемъ для сокращенія рѣчи *случаями*, исчерпывающими испытаніе.

Пусть нѣкоторое событіе A появляется при нѣкоторыхъ изъ этихъ случаевъ, а при другихъ случаяхъ событіе A не появляется: назовемъ тѣ случаи, при которыхъ событіе A появляется, случаями *благопріятствующими* появленію событія. Если черезъ m обозначено число случаевъ, *благопріятствующихъ* событію A, то мы устанавливаемъ такое опредѣленіе.

Опредѣленіе. *Математической вѣроятностью наступленія событія A называется дробь.*

$$\frac{m}{n},$$

числитель которой равенъ числу m случаевъ, благопріятствующихъ событію A, а знаменатель n равенъ числу всѣхъ независимыхъ, равновозможныхъ случаевъ, исчерпывающихъ испытаніе.

§ 11. Изъ даннаго опредѣленія вытекаетъ, что вѣроятность есть раціональная дробь. Эта дробь всегда правильная, ибо $m \leq n$.

Если всѣ случаи, исчерпывающіе испытаніе, благопріятствуютъ появленію событія A, то $m = n$ и вѣроятность равна 1.

Если вѣроятность событія A равна единицѣ, то мы имѣемъ дѣло съ *достовѣрностью* появленія событія A, т. е. событіе A непремѣнно появится. Обратно, если ни при одномъ изъ случаевъ, исчерпывающихъ испытаніе, событіе A не можетъ появиться, то можно считать $m = 0$, такъ что вѣроятность событія A будетъ равна нулю. Событіе A *невозможно*.

На практикѣ имѣютъ значеніе тѣ случаи, когда по выводамъ теоріи вѣроятность событія будетъ близка къ 1 или къ 0; въ первомъ случаѣ можно разсчитывать на появленіе событія, во второмъ событіе надо считать почти невозможнымъ.

§ 12. Напримѣръ, вычислимъ вѣроятность вынуть изъ колоды картъ фигуру. Такъ какъ въ 52 картахъ находится 12 фигуръ, то вѣроятностью вынутія фигуры будетъ дробь

$$\frac{12}{52}=\frac{3}{13}.$$

Вѣроятностью вынутія простой карты будетъ

$$\frac{52-12}{52}=\frac{10}{13}.$$

Теорема сложенія вѣроятностей.

§ 13. Теорема. *Вѣроятность случиться одному изъ несовмѣстимыхъ событій безъ указаній, какому именно, равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій.*

Пусть изъ n равновозможныхъ случаевъ, исчерпывающихъ испытаніе, m_1 случаевъ благопріятствуютъ событію A_1, остальные же не благопріятствуютъ ему; m_2 случаевъ благопріятствуютъ событію A_2 и т. д.; наконецъ, $m_к$ случаевъ благопріятствуютъ событію $A_к$. Очевидно, что вѣроятности событій

(1) $$A_1, A_2, \ldots A_k$$

будутъ

(2) $$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots \frac{m_к}{n}.$$

Въ виду несовмѣстимости событій $A_1, A_2 \ldots A_к$ всѣ случаи, благопріятные для одного изъ нихъ, не благопріятствуютъ остальнымъ; поэтому, если мы къ m_1 случаямъ, благопріятнымъ для A_1, присоединимъ m_2 случаевъ, благопріятныхъ для A_2, и т. д., то получимъ

$$m_1+m_2+\ldots+m_к$$

различныхъ между собой случаевъ, благопріятствующихъ появленію одного изъ событій (1), не указывая, котораго именно. Отсюда вѣроятность появиться которому нибудь изъ событій (1) будетъ

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_к}{n}.$$

Но эта вѣроятность есть сумма вѣроятностей (2) и теорема доказана.

§ 14. Пусть вѣроятность появленія нѣкотораго событія A будетъ p. Вычислимъ вѣроятность q его *непоявленія*. Появленіе событія A и его непоявленіе принадлежатъ къ событіямъ *противоположнымъ*, т. е. такимъ двумъ событіямъ, которыя исчерпываютъ испытаніе и несовмѣстимы между собой.

По теоремѣ сложенія вѣроятностей сумма

$$p+q$$

должна представлять вѣроятность появленія одного изъ противоположныхъ событій, но такъ какъ одно изъ противоположныхъ событій должно появиться непремѣнно, то мы получаемъ

$$p+q=1,$$

такъ что искомая вѣроятность

$$q=1-p.$$

Подобнымъ образомъ мы замѣчаемъ, что въ примѣрѣ § 12 вынутіе фигуры и простой карты суть событія противоположныя, что провѣряется непосредственно, ибо $\frac{3}{13}+\frac{10}{13}=1$.

Теорема умноженія вѣроятностей.

§ 15. Теорема. *Вѣроятность случиться двумъ событіямъ вмѣстѣ равна произведенію вѣроятности одного изъ нихъ на вѣроятность другого, вычисленную въ предположеніи, что первое событіе уже имѣетъ мѣсто.*

Пусть изъ n равновозможныхъ случаевъ

(1) $$C_1, C_2, \ldots C_m, C_{m+1} \ldots C_{m_1}, C_{m_1+1} \ldots C_n,$$

исчерпывающихъ испытаніе, благопріятствуютъ нѣкоторому событію A первые m_1 случаевъ

(2) $$C_1, C_2, \ldots C_m, C_{m+1}, \ldots C_{m_1},$$

остальные же ему не благопріятствуютъ.

Пусть далѣе изъ случаевъ (2) первые m случаевъ

(3) $$C_1, C_2, \ldots C_m$$

благопріятствуютъ другому событію B, остальные же ему не благопріятствуютъ.

Вѣроятность событія A будетъ, очевидно, $\frac{m_1}{n}$.

Вѣроятность событія B въ предположеніи, что событіе A уже существуетъ, будетъ $\frac{m}{m_1}$.

Наконецъ, вѣроятность совмѣстнаго существованія двухъ событій A и B будетъ $\frac{m}{n}$, ибо одновременному существованію событій A и B благопріятствуютъ очевидно только случаи (3).

Тождество

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{m}{m_1}$$

заставляетъ признать высказанную теорему доказанной.

§ 16. Примѣнимъ теорему умноженія вѣроятностей къ такой задачѣ.

Изъ колоды вынимаются одна за другой двѣ карты и выкладываются на столъ, найти вѣроятность того, что обѣ вынутыя карты окажутся фигурами.

Вѣроятность вынутія первой фигуры мы вычислили уже въ § 12, она равна $\frac{3}{13}$. Такъ какъ при вынутіи второй карты первая карта оставлена на столѣ и не возвращена въ колоду, то въ колодѣ остается только 11 фигуръ при 51 картѣ, значитъ вѣроятность, что вторая вынутая карта будетъ фигурой, будетъ $\frac{11}{51}$.

Итакъ, вѣроятность вынутія двухъ фигуръ по теоремѣ умноженія вычислится такъ

$$\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{51}=\frac{11}{13.17}=\frac{11}{221}.$$

Этотъ результатъ мы могли бы найти, не прибѣгая къ теоремѣ умноженія вѣроятностей.

Въ самомъ дѣлѣ, всѣхъ равновозможныхъ случаевъ въ нашей задачѣ столько, сколько существуетъ сочетаній изъ 52 картъ по 2, т. е. $\frac{52.51}{1.2}$. Благопріятствуютъ появленію двухъ фигуръ столько случаевъ, сколько существуетъ сочетаній изъ 12 фигуръ по 2, т. е. $\frac{12.11}{1.2}$. Раздѣляя одно число на другое, получимъ искомую вѣроятность

$$\frac{12.11}{1.2}:\frac{52.51}{1.2}=\frac{12.11}{52.51}=\frac{11}{221}.$$

§ 17. Будемъ называть событія

(1) $$A, B, C, \ldots .$$

независимыми между собой, если вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ того, случились ли другія событія или нѣтъ.

Теорема объ умноженіи вѣроятностей принимаетъ особенно простой видъ для событій независимыхъ между собой, а именно: *вѣроятность совмѣстнаго существованія двухъ или нѣсколькихъ независимыхъ событій равна произведенію вѣроятностей этихъ событій.*

Такъ напримѣръ, въ случаѣ вынутія двухъ картъ изъ колоды, вѣроятность появленія двухъ фигуръ должна быть вычислена иначе, если послѣ вынутія первой карты эта карта кладется назадъ въ колоду и колода перетасовывается. Въ такомъ случаѣ вынутіе второй карты совершается при обстоятельствахъ, независящихъ совершенно отъ того, что произошло при вынутіи первой карты. Вѣроятности вынутія фигуры на первой картѣ и на второй одинаковы и равны $\frac{3}{13}$. Значитъ, вѣроятность вынутія двухъ фигуръ будетъ

$$\frac{3}{13}\cdot\frac{3}{13}=\left(\frac{3}{13}\right)^2=\frac{9}{169}.$$

Какъ второй примѣръ, разсмотримъ игру, называемую *орлянкой*. Ищется вѣроятность вскрытія орла при двухкратномъ бросаніи монеты.

Можетъ произойти одно изъ двухъ: орелъ появится при первомъ бросаніи, или же онъ появится при второмъ бросаніи.

Такъ какъ при каждомъ бросаніи монеты существуютъ два событія, исчерпывающихъ испытаніе, а именно, появленіе *орла* или появленіе *рѣшетки*, то вѣроятность появленія орла при каждомъ бросаніи равна $\frac{1}{2}$.

Итакъ вѣроятность появленія орла при первомъ бросаніи будетъ $\frac{1}{2}$. Появленіе орла при второмъ бросаніи есть событіе сложное, состоящее изъ совмѣстнаго существованія двухъ событій: появленія рѣшетки при первомъ бросаніи и появленія орла при второмъ. Такъ какъ вѣроятность обоихъ событій есть $\frac{1}{2}$, то вѣроятность появленія орла при второмъ бросаніи есть

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Значитъ, вѣроятность появленія орла при одномъ изъ двухъ бросаній будетъ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Эту задачу можно рѣшить иначе. Въ самомъ дѣлѣ, при двухъ бросаніяхъ имѣются четыре равновозможныхъ событія:

орелъ	орелъ
рѣшетка	орелъ
орелъ	рѣшетка
рѣшетка	рѣшетка.

Изъ этихъ четырехъ событій три благопріятствуютъ появленію орла, слѣдовательно, мы имѣемъ вѣроятность $\frac{3}{4}$.

Повтореніе испытаній.

§ 18. Нѣкоторое испытаніе, при которомъ ожидается появленіе событія A, повторяется нѣкоторое число n разъ. Предположимъ, что вѣроятность событія A одинакова при всѣхъ испытаніяхъ и равна числу p, вѣроятность же непоявленія событія будетъ q, причемъ $p+q=1$.

Составимъ выраженіе для вѣроятности повторенія при n испытаніяхъ m разъ событія A.

Вѣроятность повторенія событія A при всѣхъ испытаніяхъ будетъ по теоремѣ умноженія вѣроятностей равна

$$p^n.$$

Повтореніе $(n-1)$ разъ событія A приводитъ къ слѣдующимъ n возможностямъ:

1) событіе не появится при первомъ испытаніи,

2) событіе не появится при второмъ испытаніи,

(1) . . . .

n) событіе не появится при n-омъ испытаніи.

Вѣроятность каждой изъ этихъ возможностей въ отдѣльности равна по теоремѣ умноженія

$$p^{n-1}q.$$

Вѣроятность же повторенія событія $n-1$ разъ, т. е. вѣроятность одной изъ возможностей (1), будетъ по теоремѣ сложенія вѣроятностей равна

$$n\,p^{n-1}\,q = C_n^1\,p^{n-1}\,q.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ мы докажемъ общую формулу, что вѣроятность событію A появиться m разъ въ n испытаніяхъ равна

(2) $$C_n^{n-m}\,p^m\,q^{n-m};$$

эта вѣроятность представляетъ одинъ изъ членовъ разложенія

$$(p+q)^n.$$

Математическое ожиданіе.

§ 19. Пусть

(1) $$A_1\,A_2, \ldots A_n$$

суть событія, исчерпывающія испытаніе, и ихъ вѣроятности

(2) $$p_1, p_2, \ldots p_n.$$

Такъ какъ одно изъ событій (1) должно непремѣнно случиться, то должно быть

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пусть нѣкоторая величина x получаетъ различныя значенія въ зависимости отъ того, которое изъ событій (1) имѣетъ мѣсто; пусть эти значенія будутъ

$$x_1, x_2 \ldots x_n;$$

сумма

(3) $$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n,$$

называется *математическимъ ожиданіемъ* величины x, а дроби $p_1, p_2, \ldots p_n$ называются вѣроятностями соотвѣтственныхъ значеній $x_1, x_2, \ldots x_n$.

§ 20. Нѣсколько величинъ

$$x, y, z, \ldots$$

мы будемъ называть *независимыми* между собой, если для каждой изъ нихъ вѣроятность имѣть каждое опредѣленное значеніе не зависитъ отъ значенія прочихъ величинъ.

§ 21. Теорема. *Математическое ожиданіе суммы равно суммѣ математическихъ ожиданій слагаемыхъ.*

Эта теорема относится какъ къ независимымъ, такъ и къ зависимымъ величинамъ.

Для доказательства теоремы разсмотримъ величины

$$x, y, z, \ldots,$$

которыя при событіяхъ

$$A_1, A_2, \ldots A_n,$$

имѣющихъ вѣроятности

$$p_1, p_2, \ldots p_n,$$

принимаютъ ряды значеній

$$\begin{matrix} x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, \\ y_1, y_2, \ldots y_n, \\ z_1, z_2, \ldots z_n; \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

Справедливость теоремы вытекаетъ изъ тождества

$$[x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n] + [y_1 p_1 + \ldots + y_n p_n] + \\ + [z_1 p_1 + \ldots + z_n p_n] + \ldots = (x_1 + y_1 + z_1 + \ldots) p_1 + \\ + (x_2 + y_2 + z_2 + \ldots) p_2 + \ldots + (x_n + y_n + z_n + \ldots) p_n.$$

Употребляя для обозначенія математическаго ожиданія буквы м. о., получимъ

$$м.\ о.\ (x + y + z + \ldots) = м.\ о.\ (x) + м.\ о.\ (y) + м.\ о.\ (z) + \ldots$$

§ 22. Теорема. *Математическое ожиданіе произведенія независимыхъ величинъ равно произведенію ихъ математическихъ ожиданій.*

Эта теорема относится къ произведенію любого числа множителей.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ двухъ множителей, такъ какъ отъ случая двухъ множителей можно перейти къ общему случаю путемъ послѣдовательнаго прибавленія одного множителя за другимъ.

Разсмотримъ математическія ожиданія двухъ величинъ x и y; эти ожиданія будутъ

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_m p_m,$$
$$y_1 q_1 + y_2 q_2 + \ldots + y_n q_n.$$

По предположенію величины x и y независимы, и поэтому всякая вѣроятность p_i величины x_i не мѣняется отъ выбора частныхъ значеній y_i и обратно, всякая вѣроятность q_i не зависитъ отъ значеній величины x_i;.

Очевидно, что вѣроятность произведенія

$$x_\lambda y_\mu$$

бтдетъ равна

$$p_\lambda q_\mu.$$

Значитъ, математическое ожиданіе произведенія выражается по формулѣ

$$м.\,о.\,(xy) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} x_\lambda y_\mu p_\lambda q_\mu =$$

$$= \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} x_\lambda p_\lambda\right)\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n} y_\mu q_\mu\right) = м.\,о.\,(x) \times м.\,о.\,(y),$$

что и требовалось доказать.

Теорема Bernoulli.

§ 23. Основаніемъ для всѣхъ практическихъ приложеній теоріи вѣроятностей является весьма важная теорема Jacob'a Bernoulli, доказанная въ первый разъ въ его сочиненіи „Ars conjectandi", 1713.

Смыслъ этой теоремы состоитъ вотъ въ чемъ. Возьмемъ опять примѣръ, трактованный нами въ § 17; происходитъ повтореніе испытанія, состоящаго въ вынутіи карты изъ полной колоды. Мы видѣли уже, что вѣроятность появленія фигуры при каждомъ отдѣльномъ вынутіи равняется $\frac{3}{13}$. Опытъ показываетъ, что при большомъ числѣ n испытаній, число m появленій фигуры таково, что дробь $\frac{m}{n}$ мало отличается отъ вѣроятности $\frac{3}{13}$.

Теорема Бернулли. Съ вѣроятностью, сколь угодно близкой къ единицѣ, можно утверждать, что дробь

$$\frac{m}{n},$$

гдѣ n число испытаній, а m число повтореній событія A при *этихъ испытаніяхъ, отличается сколь угодно мало отъ вѣроятности p событія A при безпредѣльномъ увеличеніи n.*

Изслѣдованія Чебышева сдѣлали возможнымъ въ высшей степени элементарное доказательство теоремы Bernoulli. Это доказательство мы и приведемъ.

§ 24. Лемма. *Если $\mathfrak{A}$ обозначаетъ математическое ожиданіе величины u, всѣ значенія которой положительны, а t произвольное число, то вѣроятность неравенства*

(1) $$u \leq \mathfrak{A}\, t^2$$

больше, чѣмъ дробь

(2) $$1 - \frac{1}{t^2}.$$

Пусть всѣ значенія величины u будутъ

$$u_1, u_2, \ldots u_i, u_{i+1} \ldots u_n,$$

и пусть неравенству (1) удовлетворяютъ первыя i значеній $u_1, u_2, \ldots u_i$, тогда для остальныхъ имѣемъ неравенства

(3) $$u_{i+1} > \mathfrak{A}\, t^2, u_{i+2} > \mathfrak{A}\, t^2, \ldots u_n > \mathfrak{A}\, t^2;$$

по опредѣленію математическаго ожиданія имѣемъ

$$\mathfrak{A} = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \ldots + u_n p_n,$$

отсюда на основаніи положительности значеній u_i имѣемъ

(4) $$\mathfrak{A} > u_{i+1} p_{i+1} + \ldots + u_n p_n;$$

на основаніи неравенствъ (3) изъ неравенства (4) получаемъ слѣдующее

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{A}\, t^2 (p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots + p_n),$$

или окончательно

$$p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots + p_n < \frac{1}{t^2},$$

т. е. мы получаемъ, что вѣроятность одного изъ неравенствъ (3) меньше $\frac{1}{t^2}$, значитъ, вѣроятность обратнаго неравенства (1) будетъ больше дроби (2), что и требовалось показать.

Неравенства Чебышева.

§ 25. Пусть имѣются независимыя величины

(1) $$x, y, z, \ldots w,$$

математическія ожиданія которыхъ пусть будутъ

(2) $$a, b, c, \ldots l.$$

Примѣнимъ лемму предыдущаго параграфа къ величинѣ

$$u = (x + y + z + \ldots + w - a - b - c - \ldots - l)^2,$$

обозначая черезъ $\mathfrak{A}$ математическое ожиданіе величины u. Получаемъ теорему.

Теорема. *Съ вѣроятностью, большею числа*

$$1 - \frac{1}{t^2}$$

можно утверждать, что сумма

$$x + y + z + \ldots + w$$

заключается между двумя предѣлами:

$$a + b + c + \ldots + l + t\sqrt{\mathfrak{A}},$$
$$a + b + c + \ldots + l - t\sqrt{\mathfrak{A}}.$$

§ 26. При этомъ легко показать, что

(1) $$\mathfrak{A} = a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots + l_1 - l^2,$$

гдѣ

$$a_1, b_1, c_1, \ldots l_1$$

суть математическія ожиданія квадратовъ *)

$$x^2, y^2, z^2, \ldots w^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$м.\,о\,(x - a)^2 = м.\,о.\,(x^2) - 2\,м.\,о.\,(a\,x) + м.\,о.\,(a^2) =$$
$$= a_1 - 2a^2 + a^2 = a_1 - a^2,$$
$$м.\,о.\,(y - b)^2 = b_1 - b^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$м.\,о.\,(w - l)^2 = l_1 - l^2;$$
$$м.\,о.\,(x - a)\,(y - b) = м.\,о.\,(x - a)\,м.\,о.\,(y - b) =$$
$$= (a - a)\,(b - b) = 0,$$
$$м.\,о.\,(x - a)\,(z - c) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда слѣдуетъ справедливость формулы (1).

---

*) Было бы ошибочно сказать что $м.\,о.\,(x^2) = [м.\,о.\,(x)]^2$, такъ какъ теорема о произведеніи математическихъ ожиданій прилагается только въ случаѣ независимыхъ множителей.

Законъ большихъ чиселъ.

§ 27. Пусть вѣроятность появленія событія A при первомъ испытаніи будетъ p_1, при второмъ p_2, при третьемъ p_3 и т. д.

Пусть величина x принимаетъ значеніе, равное единицѣ, при появленіи событія A на первомъ испытаніи, вѣроятность чего есть p_1; пусть x принимаетъ значеніе равное нулю, если событіе A не появляется при первомъ испытаніи, вѣроятность чего есть $1-p_1$. Пусть величина y обозначаетъ тоже самое для второго испытанія, что x для перваго, величина z для третьяго и т. д.; наконецъ, величина w для послѣдняго n—аго испытанія.

Если мы обозначимъ черезъ m число появленій событія A въ n испытаніяхъ, то мы имѣемъ

$$x+y+z+\ldots+w=m;$$

математическія ожиданія величинъ $x, y, \ldots$ опредѣляются такъ:

$$\begin{aligned} &\textit{м. о.}\,(x)=1.p_1+0\,(1-p_1)=p_1,\\ &\textit{м. о.}\,(y)=1.p_2+0\,(1-p_2)=p_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\textit{м. о.}\,(w)=1.p_n+0\,(1-p_n)=p_n; \end{aligned}$$

математическое ожиданіе квадратовъ тѣхъ же величинъ будетъ

$$\begin{aligned} &\textit{м. о.}\,(x^2)=1^2p_1+0^2\,(1-p_1)=p_1,\\ &\textit{м. о.}\,(y^2)=1^2p_2+0^2\,(1-p_2)=p_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\textit{м. о.}\,(w^2)=1^2p_n+0^2\,(1-p_n)=p_n. \end{aligned}$$

На основаніи теоремы § 25 можно съ вѣроятностью, большей, чѣмъ $1-\frac{1}{t^2}$, утверждать, что сумма

$$x+y+z+\ldots+w=m$$

заключается въ предѣлахъ

$$\begin{aligned} &p_1+p_2+\ldots+p_n+t\sqrt{\mathfrak{A}},\\ &p_1+p_2+\ldots+p_n-t\sqrt{\mathfrak{A}}, \end{aligned}$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}=p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+\ldots+p_n-p_n^2;$$

отсюда получаемъ такое неравенство:

$$\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}-\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}<\frac{m}{n}<\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}+$$
$$+\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}};$$

покажемъ, что при данномъ t и безконечно большомъ n величина $\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}$ будетъ безконечно малая.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}=\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)+\ldots+p_n(1-p_n)}{n}};$$

но

$$p_1(1-p_1)<1, p_2(1-p_2)<1, \ldots p_n(1-p_n)<1;$$

складывая эти неравенства, получимъ

$$\mathfrak{A}<n,$$

откуда

$$\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}<\frac{t}{\sqrt{n}},$$

что и требовалось доказать.

Возьмемъ теперь значеніе t столь большимъ, чтобы величина $\frac{1}{t^2}$ была столь мала, сколь намъ угодно, и чтобы, слѣдовательно, $1-\frac{1}{t^2}$ была столь близко къ единицѣ, сколь намъ угодно. Выбравъ t можемъ затѣмъ число n испытаній взять настолько большимъ, чтобы $\frac{t}{\sqrt{n}}$, а слѣдовательно и $\frac{t}{n}\sqrt{\mathfrak{A}}$ было сколь угодно малымъ. Получаемъ теорему Poisson'а, выражающую такъ называемый законъ большихъ чиселъ.

Теорема. *Съ вѣроятностью, сколь угодно близкой къ единицѣ, можно утверждать, что разность между*

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}.$$

при достаточно большомъ числѣ n испытаній будетъ сколь угодно мала.

§ 28. Остается сказать лишь два слова для полученія изъ теоремы Poisson'a теоремы Bernoulli. Въ самомъ дѣлѣ, если вѣроятности событія A одинаковы при всѣхъ испытаніяхъ, то

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p,$$

гдѣ черезъ p обозначена ихъ общая величина; но тогда

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} = p,$$

и мы приходимъ къ теоремѣ, формулированной въ § 23.

Математическая безобидность игръ.

§ 29. Однимъ изъ важнѣйшихъ приложеній послѣднихъ теоремъ является выводъ *условій безобидности игръ.*

Разсмотримъ какую-нибудь игру, состоящую изъ ряда партій, изъ которыхъ каждая оканчивается выигрышемъ или проигрышемъ одного изъ игроковъ.

Мы докажемъ слѣдующее весьма важное положеніе.

Теорема. *Если игра организована такимъ образомъ, что математическое ожиданіе выигрыша одного изъ игроковъ положительное, то съ вѣроятностью, сколь угодно близкой къ достовѣрности, можно утверждать, что этотъ игрокъ выиграетъ сколь угодно много при достаточно большомъ числѣ партій.*

При доказательствѣ этой теоремы сдѣлаемъ два допущенія.

1) Математическое ожиданіе выигрыша не можетъ быть безконечно малымъ.

2) Математическое ожиданіе квадрата выигрыша не можетъ быть безконечно большимъ.

Эти два допущенія соотвѣтствуютъ всѣмъ практическимъ приложеніямъ теоріи вѣроятностей.

Пусть числа

$$x, y, \ldots w$$

суть выигрыши игрока при первой, второй, . . . n-ой партіяхъ.

По доказанной теоремѣ

$$x + y + \ldots + w > a + b + \ldots$$
$$\ldots + l - t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \ldots + l_1 - l^2};$$

по допущенію (1) можно подобрать такое опредѣленное положительное число α, что будетъ

$$a > \alpha, b > \alpha, c > \alpha, \ldots l > \alpha;$$

съ другой стороны, по допущенію (2) можно указать такое положительное число β, что будетъ

$$a_1 < \beta, b_1 < \beta, \ldots l_1 < \beta;$$

значитъ

$$x+y+\ldots+w > n\alpha - t\sqrt{n}\beta,$$

$$> n\left(\alpha - \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\beta}\right);$$

при возрастаніи n оба множителя

$$n, \alpha - \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\beta}$$

возрастаютъ; слѣдовательно, величина

$$x+y+\ldots+w$$

безконечно возрастаетъ.

Совершенно аналогично можно показать, что, если математическое ожиданіе выигрыша игрока число *отрицательное*, то при достаточно долгомъ продолженіи игры игрокъ *разорится*.

Отсюда является доказаннымъ, что для безобидности игры необходимо, чтобы *математическое ожиданіе всѣхъ игроковъ равнялось нулю*.

§ 30. Въ математической теоріи вѣроятностей устанавливается слѣдующее самое общее понятіе объ игрѣ: подъ *игрой* мы разумѣемъ совокупность обстоятельствъ, при которыхъ нѣкоторыя суммы денегъ переходятъ отъ однихъ участниковъ игры къ другимъ, причемъ этотъ переходъ совершается при появленіи нѣкоторыхъ случайныхъ (не достовѣрныхъ) событій.

Нравственное ожиданіе.

§ 31. Buffon, авторъ извѣстнаго сочиненія „Essai d'Arithmétique morale", а также Daniel Bernoulli находили правило математической безобидности игръ несправедливымъ съ общежитейской точки зрѣнія и предполагали давать нѣкоторыя преимущества болѣе бѣднымъ игрокамъ. При этомъ вмѣсто математическаго ожиданія выгоды они предлагали ввести такъ называемое *нравственное ожиданіе* этой выгоды, при опредѣленіи котораго входило бы въ разсчетъ имущество, которымъ обладаетъ игрокъ, а также могли играть роль и другіе факторы взаимныхъ отношеній между игроками.

При помощи введенія въ разсмотрѣніе нравственнаго ожиданія была установлена невыгодность съ точки зрѣнія этого нравственнаго ожиданія всякихъ игръ и лотерей, и наоборотъ, была установлена выгодность страховыхъ операцій.

Однако соображенія, связанныя съ разсмотрѣніемъ нравственнаго ожиданія, не пользуются въ настоящее время сочувствіемъ, такъ какъ, очевидно, приходится считать несправедливымъ всякое отступленіе отъ принципа математической безобидности.

Рулетка въ Monte Carlo.

§ 32. Хорошій примѣръ, поясняющій изложенныя нами теоретическія соображенія о математической безобидности игръ, даетъ анализъ азартной игры, называемой *рулеткой*.

Запрещенная для производства въ общественныхъ мѣстахъ почти во всѣхъ государствахъ, эта азартная игра пріютилась въ маленькомъ государствѣ, княжествѣ Monaco, расположенномъ въ красивой мѣстности на югѣ Франціи, на берегу Средиземнаго моря.

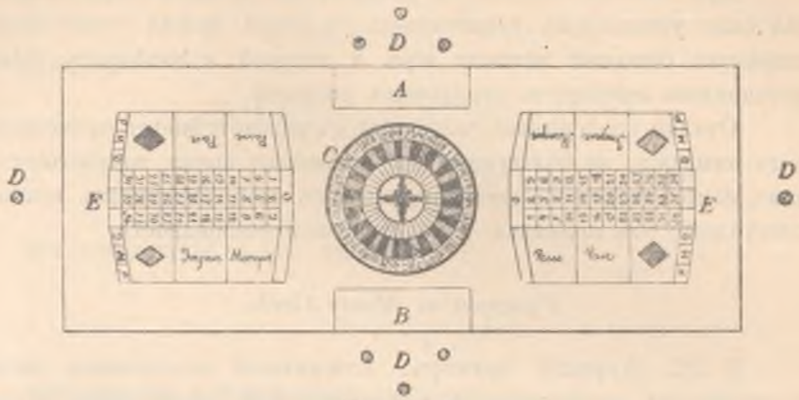
На высокой горѣ Monte Carlo, спускающейся обрывомъ къ морю, среди садовъ субтропической растительности находится дворецъ, такъ называемое casino, въ которомъ происходитъ азартная игра.

Этотъ роскошный игорный притонъ принадлежитъ акціонерной компаніи, платящей громадную милліонную аренду князю Monaco.

Въ громадныхъ, богатоукрашенныхъ залахъ casino на большихъ столахъ, расположенныхъ на значительномъ разстояніи другъ отъ друга, производятся съ утра до ночи, цѣлый годъ безъ перерыва, двѣ азартныя игры: *рулетка* и *trente et quarante* (тридцать и сорокъ). Болѣе 20 столовъ предназначено для рулетки и столько же для trente et quarante.

Около каждаго стола толпится большое число играющихъ. Рулетка игра болѣе дешевая, такъ какъ наименьшую ставку составляетъ большая серебренная пятифранковая монета. Позволяется ставить только суммы, кратныя пяти франкамъ. Наименьшей ставкой игры trente et quarante является уже золотая монета въ 20 франковъ.

§ 33. Мы ограничимся лишь анализомъ игры рулетки. На срединѣ стола (черт. 152) находится такъ называемая рулетка



Черт. 152.

(*C*). Эта рулетка представляетъ изъ себя большую круглую неглубокую деревянную чашку, на днѣ которой вращается горизонтальный кругъ С, раздѣленный радіусами на 37 секторовъ; секторы окрашены попеременно въ черный и красный (на нашемъ чертежѣ заштриховано) цвѣтъ. По краямъ круга размѣщены въ нѣкоторомъ, весьма тонко обдуманномъ безпорядкѣ, всѣ числа отъ 0 до 36, такъ что каждому сектору соотвѣтствуетъ одно число.

Около каждаго стола находится восемь служащихъ при рулеткѣ, такъ называемыхъ *croupier*; мѣста, которыя они занимаютъ около стола, обозначены буквой *D* на чертежѣ.

По обѣимъ сторонамъ стола открываются ящики *A* и *B*, представляющіе кассу банка. Каждый день утромъ въ каждый столъ вкладывается 200000 франковъ.

Для ставокъ играющихъ на зеленомъ сукнѣ, покрывающемъ столъ, нарисованы желтой краской фигуры Е вида, указаннаго на чертежѣ.

Въ началѣ каждой игры одинъ изъ croupier выкрикнувъ: „Messieurs, faites vos jeux“ (господа, дѣлайте ваши ставки), приводитъ горизонтальный кругъ съ секторами во вращеніе и въ тотъ же моментъ въ противоположномъ направленіи бросаетъ въ чашку маленькій шарикъ слоновой кости. Скоро кругъ и шарикъ останавливаются въ своемъ движеніи, причемъ шарикъ оказывается попавшимъ на одно изъ чиселъ, расположенныхъ по краю круга. Это число считается выигравшимъ, т. е. тотъ, кто поставилъ свою монету на это число, выигрываетъ. Ставки, поставленныя на остальныя числа, банкъ беретъ себѣ, какъ проигранныя.

§ 34. Если не считать нуля (zero), то половина всѣхъ 36 нумеровъ соотвѣтствуетъ „*чернымъ*" (noir) секторамъ, половина же „*краснымъ*" (rouge); половина нумеровъ состоитъ изъ „*четныхъ*" (pair) чиселъ, половина изъ „*нечетныхъ*" (impair); половина изъ „*нижнихъ*" (manque) нумеровъ, т. е. отъ 1 до 18, половина изъ „*верхнихъ*" (passe), т. е. отъ 19 до 36.

Поэтому, если выигрываетъ, напримѣръ, нумеръ 34, то croupier выкрикиваетъ такъ: „34, rouge, paire et passe".

Можно ставить монету на одинъ только нумеръ; можно ставить на нѣсколько сосѣднихъ нумеровъ: на два, три, четыре и шесть.

Ставка на группу нумеровъ обозначаетъ, что ставящій получаетъ выигрышъ при паденіи шарика на *одно* изъ чиселъ этой группы.

Очевидно, что, чѣмъ на большее число нумеровъ монета поставлена, тѣмъ вѣроятность выигрыша больше.

Такъ напримѣръ, на краю фигуры существуютъ клѣтки, обозначенныя

$$P_{12}, M_{12}, D_{12};$$

P_{12} обозначаетъ „*première douzaine*" (первая дюжина), т. е. числа отъ 1 до 12; M_{12} обозначаетъ „*douze milieu*" (средняя дюжина), отъ 13 до 24; D_{12} обозначаетъ „*dernière douzaine*" (послѣдняя дюжина), отъ 25 до 36.

Подъ каждой изъ вертикальныхъ колоннъ нумеровъ находятся пустыя клѣтки, соотвѣтствующія числамъ этой колонны.

Самая большая вѣроятность выигрыша соотвѣтствуетъ такъ называемымъ „*chances simples*" (простымъ шансамъ), когда монета ставится на 18 нумеровъ. Тутъ возможны шесть комбинацій: 1) черный, 2) красный, 3) четъ, 4) нечетъ, 5) passe, 6) manque.

Для этихъ комбинацій имѣются по бокамъ большія клѣтки, ибо публика болѣе охотно ставитъ на эти комбинаціи вслѣдствіе наибольшей вѣроятности выигрыша.

Правила игры таковы, что въ случаѣ выигрыша кромѣ ставки, поставленной игрокомъ на извѣстную комбинацію, банкъ приплачиваетъ этому игроку отъ себя, какъ выигрышъ, нѣкоторую кратность ставки по слѣдующей таблицѣ.

Число нумеровъ, на которые поставлена ставка a:	Выигрышъ:
1	$35\,a$
2	$17\,a$
3	$11\,a$
4	$8\,a$
6	$5\,a$
12	$2\,a$
18	a

Легко убѣдиться, что такой разсчетъ выигрышей дѣлаетъ рулетку игрой *обидной въ пользу банка и противъ всѣхъ остальныхъ игроковъ.*

Если бы не было нумера *„нуль“*, то игра при выше приведенномъ разсчетѣ выигрышей была бы безобидна.

Примемъ ставку за единицу и вычислимъ математическое ожиданіе выгоды банка на каждой ставкѣ игрока. Пусть ставка поставлена на одинъ нумеръ, напримѣръ 31; очевидно, что банкъ выигрываетъ 1, когда выходитъ одинъ изъ 36 нумеровъ, 0, 1, 2, ... 30, 32, ... 36, вѣроятность чего будетъ $\frac{36}{37}$. Значитъ, математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $1 . \frac{36}{37} = \frac{36}{37}$. Банкъ проигрываетъ 35 при выходѣ нумера 31, вѣроятность чего есть $\frac{1}{37}$; значитъ математическое ожиданіе проигрыша будетъ $\frac{35}{37}$. Получится въ общемъ $\frac{36}{37} - \frac{35}{37} = \frac{1}{37}$, т. е. *положительное* математическое ожиданіе.

Ясно, что математическое ожиданіе игрока, поставившаго на одинъ нумеръ, будетъ *отрицательнымъ* числомъ $-\frac{1}{37}$, такъ какъ выигрышъ банка есть проигрышъ игрока и обратно.

При ставкѣ на два нумера математическое ожиданіе выигрыша банка будетъ $\frac{35}{37}$, а проигрыша $17 . \frac{2}{37}$, и математическое ожиданіе банка опять выразится тѣмъ же числомъ $\frac{35}{37} - 17.\frac{2}{37} = \frac{1}{37}$.

Вообще, получается математическое ожиданіе $\frac{1}{37}$ при всѣхъ комбинаціяхъ за исключеніемъ простыхъ шансовъ, такъ какъ при простыхъ шансахъ существуетъ одно добавочное правило игры, уменьшающее на половину математическое ожиданіе банка.

Указанное добавочное правило состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть ставка a поставлена на красный цвѣтъ. Если выходитъ „*нуль*", то ставка остается подъ арестомъ (en prison) до слѣдующаго удара, причемъ при выходѣ краснаго цвѣта ставка возвращается игроку и забирается банкомъ при выходѣ чернаго цвѣта. При вторичномъ выходѣ *нуля* ставка остается подъ арестомъ до слѣдующаго удара и т. д.

Итакъ, пусть ставка 1 поставлена на красный цвѣтъ, тогда банкъ проигрываетъ 1 при выходѣ краснаго цвѣта, что даетъ математическое ожиданіе $-\frac{18}{37}$.

Банкъ выигриваетъ или на первомъ ударѣ, если выйдетъ черный цвѣтъ, вѣроятность чего равна $\frac{18}{37}$, или на второмъ ударѣ, вѣроятность чего $\left(\frac{1}{37}\,\frac{18}{37}\right)$ равна произведенію вѣроятности $\frac{1}{37}$ выхода нуля на первомъ ударѣ на вѣроятность $\frac{18}{37}$ выхода чернаго цвѣта на второмъ ударѣ.

Если банкъ выигриваетъ на третьемъ ударѣ послѣ двукратнаго появленія нуля, то вѣроятность этого выигрыша будетъ $\frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{18}{37}$.

Вообще говоря, вѣроятность банку выиграть ставку на нѣкоторомъ ударѣ выразится рядомъ

$$\frac{18}{37} + \frac{18}{37^2} + \frac{18}{37^3} + \frac{18}{37^4} + \ldots = \frac{18}{37}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{37}} = \frac{1}{2}.$$

Итакъ, общее математическое ожиданіе выгоды банка на простомъ шансѣ будетъ

$$\frac{1}{2} - \frac{18}{37} = \frac{1}{2.37}.$$

На этомъ обстоятельствѣ основано новое правило игры, позволяющее игроку, поставившему на простой шансъ, взять при выходѣ *нуля* назадъ половину ставки, не дожидаясь слѣдующаго удара.

§ 35. Существуетъ еще одно весьма важное правило игры, состоящее въ установленіи предѣла для ставокъ (mise maximum). Это правило характеризуется тѣмъ, что банкъ не выдаетъ болѣе 6000 франковъ отдѣльному игроку на его ставку. Отюда вытекаетъ, что нельзя ставить болѣе 6000 на простой шансъ, нельзя ставить болѣе $3000 = \frac{6000}{2}$ на дюжину, болѣе $1200 = \frac{6000}{5}$ на шесть нумеровъ и т. д.

Этимъ правиломъ банкъ обезпечиваетъ себя отъ такъ называемой *системной* игры.

Представимъ себѣ очень богатаго человѣка, который будетъ играть такъ: поставитъ монету 5 франковъ на простой шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *удвоенную* ставку 10 фр. на этотъ же шансъ, если проиграетъ, то поставитъ *учетверенную* ставку 20 фр. на тотъ же шансъ и далѣе будетъ удваивать ставку на тотъ же шансъ; тогда, какъ легко замѣтить, при первомъ выигрышѣ онъ возвращаетъ назадъ всѣ раньше проигранныя ставки и кромѣ того остается въ *выигрышѣ одной монеты 5 фр.* Откладываетъ выигранную монету въ карманъ, и начинаетъ снова игру съ удвоеніемъ ставокъ. Такъ какъ очевидно, что простой шансъ, напримѣръ красный цвѣтъ, долженъ когда нибудь появиться, то такимъ образомъ получается какъ бы вѣрный способъ остаться въ выигрышѣ.

Существованіе предѣла для ставокъ дѣлаетъ такую системную игру очень рискованной.

Въ самомъ дѣлѣ, игрокъ не можетъ поставить за разъ болѣе 1200 монетъ, слѣдовательно, если онъ начинаетъ удваивать ставки, то его ставки будутъ

(1) $1_м, 2_м, 4_м, 8_м, 16_м, 32_м, 64_м, 128_м, 256_м, 512_м, 1024_м,$

и больше удваивать онъ не имѣетъ права, такъ что если всѣ 11 его ставокъ биты, то въ погонѣ за выигрышемъ *одной* монеты онъ проигрываетъ 2047 монетъ (сумма чиселъ (1)).

Наблюденіе показываетъ (ведутся подробные журналы выходящихъ нумеровъ, охотно покупаемые игроками), что очень часто случается, что какой нибудь простой шансъ не выходитъ подъ рядъ

15—20 разъ, а потому вѣроятность неудачи системной игры значительна.

Несмотря на рискъ подобной системной игры, часто отдѣльные игроки съ успѣхомъ её примѣняютъ. По словамъ одного изъ croupier, пришлось бы закрыть рулетку, если бы вся публика играла по указанной системѣ.

Указанная нами игра съ удвоеніемъ ставокъ на одинъ и тотъ же шансъ носитъ названіе *poursuivre la chance* (преслѣдованіе шанса).

Подъ названіемъ *porsuivre le gagnant* (преслѣдованіе выигравшаго шанса) разумѣется та же игра съ удвоеніемъ ставокъ, когда игрокъ ставитъ на цвѣтъ, только что передъ тѣмъ выигравшій. Тутъ игрокъ ожидаетъ повторенія одного цвѣта два раза подъ рядъ.

§ 36. Весь вышеприведенный анализъ показываетъ, что рулетка есть игра обидная въ пользу банка. Милліоны, выручаемые рулеткой, являются фактическимъ подтвержденіемъ нашей теоріи, что игрокъ съ положительнымъ математическимъ ожиданіемъ можетъ выиграть при большомъ числѣ игръ сколь угодно много.

Итакъ, колосальные доходы отъ рулетки основны на математической организаціи самой игры. Во всемъ остальномъ дѣло поставлено вполнѣ корректно, и всѣ служащіе рулетки проявляютъ полную предупредительность къ публикѣ.

При организаціи игры, очевидно, участвовали серьезные математики, которые обезпечели банку всѣ выгоды и въ полной мѣрѣ обезопасили его отъ риска, а потому представляются возмутительнымъ шарлатанствомъ всѣ совѣты относительно способовъ вѣрнаго выигрыша.

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ совѣтъ каждому отдѣльному лицу *не играть въ рулетку*.

Если человѣкъ желаетъ всетаки играть, то *не слѣдуетъ играть долго*, такъ какъ, чѣмъ дольше человѣкъ играетъ, тѣмъ больше проявляется выгода банка.

§ 37. Безнравственная сторона дѣла состоитъ во вліяніи рулетки на неуравновѣшенную психическую сторону игрока.

Груды золота и блестящая обстановка, въ которой совершается игра, пробуждаютъ корыстолюбіе, и очень часто люди, желая выиграть очень много, не могутъ во время остановиться и проигрываютъ послѣднія деньги.

§ 38. Въ заключеніе замѣтимъ, что журналы, печатающіе выходящіе въ рулеткѣ на разныхъ столахъ нумера, конечно, не приносятъ никакой пользы охотно изучающимъ ихъ игрокамъ, но для лица, знакомаго съ теоріей вѣроятностей, эти журналы интересны съ чисто теоретической стороны. Такъ напримѣръ, подтверждается законъ большихъ чиселъ. Красный и черный цвѣта появляются при большомъ числѣ наблюденій приблизительно въ одинаковомъ количествѣ. Но за все время существованія рулетки былъ одинъ случай, когда на одномъ столѣ впродолженіи двухъ мѣсяцевъ одинъ цвѣтъ выходилъ въ количествѣ вдвое большемъ, чѣмъ другой. Такое явленіе ничего невозможнаго не представляетъ. Его малая вѣроятность имѣла слѣдствіемъ то, что оно случилось только одинъ разъ за всю практику рулетки. Было бы ошибочнымъ думать, что дальнѣйшее продолженіе игры должно сопровождаться компенсирующимъ болѣе частымъ появленіемъ другого цвѣта. Такое предположеніе противорѣчило бы случайности и независимости выхода того или другого нумера.

Страховая математика.

§ 39. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію одного изъ благодѣтельнѣйшихъ приложеній теоріи вѣроятности, а именно приложенія къ страховымъ учрежденіямъ.

Ограничиваясь разсмотрѣніемъ страхованія жизни, сообщимъ вкратцѣ основныя положенія относящихся сюда соображеній теоріи вѣроятности.

Начнемъ съ конкретнаго примѣра. Пусть нѣкоторое лицо A въ возрастѣ m лѣтъ обращается въ страховое общество B, причемъ страхуетъ въ этомъ обществѣ свою жизнь. Другими словами, оно заключаетъ съ обществомъ такую сдѣлку: общество B обязано въ случаѣ смерти A уплатить немедленно нѣкоторый капиталъ a наслѣдникамъ умершаго, съ другой стороны лицо A обязывается вносить пожизненно въ общество нѣкоторую ежегодную уплату α.

Лицо A, страхующее жизнь, мы будемъ называть *страхователемъ*, общество B—*страховщикомъ*. Ежегодная уплата α страхователя страховщику носитъ названіе *страховой преміи*. Въ удостовѣреніе заключеннаго договора страхователь получаетъ отъ страховщика бумагу, называемую *страховымъ полисомъ*. По предъявленіи этого полиса наслѣдники получаютъ застрахованный капиталъ a.

Указанный нами договоръ называется страхованіемъ *на случай смерти*. Другая форма страхованія, носящая названіе *страхованія на дожитіе*, состоитъ въ томъ, что въ случаѣ достиженія страхователемъ нѣкотораго опредѣленнаго возраста n лѣтъ страхователь получаетъ самъ застрахованный имъ капиталъ.

Кромѣ этихъ двухъ главныхъ формъ страхованія потребности жизни выработали цѣлый рядъ комбинацій, связанныхъ съ различными возможными обстоятельствами жизни. Сюда относятся самыя разнообразныя пенсіонныя кассы для вдовъ и сиротъ, а также на случай старости и утраты трудоспособности.

§ 40. Разсматривая приведенную въ предыдущемъ параграфѣ сдѣлку страхователя A со страховщикомъ B мы прежде всего замѣчаемъ, что эта сдѣлка подходитъ вполнѣ подъ опредѣленіе понятія объ *игрѣ*, данное нами въ § 30.

Въ самомъ дѣлѣ, уплата каждой преміи α является событіемъ недостовѣрнымъ, такъ какъ эта уплата происходитъ только въ томъ случаѣ, если страхователь въ моментъ уплаты живъ. Чѣмъ страхователь старше, тѣмъ вѣроятность уплаты преміи дѣлается меньше. Съ другой стороны, уплата обществомъ застрахованнаго капитала a совершается послѣ смерти страхователя; точный моментъ смерти неизвѣстенъ ни страхователю, ни страховщику. Итакъ, переходъ денежныхъ суммъ отъ страхователя къ страховщику и обратно совершается при обстоятельствахъ недостовѣрныхъ, а слѣдовательно у насъ имѣется наличность нѣкоторой игры.

Отсюда очевидно, что при установленіи математическихъ принциповъ страховыхъ операцій необходимо придерживаться правила математической безобидности. Въ самомъ дѣлѣ, если мы допустимъ отрицательное математическое ожиданіе для страхового общества, то при достаточно большомъ числѣ операцій такое общество придетъ къ банкротству. Если, съ другой стороны, допустить положительное математическое ожиданіе для общества, то это равносильно допущенію обогащенія этого общества въ ущербъ интересамъ остального населенія.

§ 41. Для того, чтобы установить размѣры преміи α, уплачиваемой страхователемъ по правилу математической безобидности игры, необходимо знать вѣроятность страхователю дожить до уплаты какой либо изъ этихъ премій. Такъ напримѣръ, если страхователь застраховалъ свою жизнь въ возрастѣ 36 лѣтъ, то необходимо знать вѣроятности дожить этому страхователю до 37, 38, 39, . . . лѣтъ. Такія вѣроятности вычисляются при помощи спеціально для этой цѣли составленныхъ таблицъ, называемыхъ *таблицами смертности*.

По таблицамъ смертности вычисляется вѣроятность человѣку возраста m лѣтъ *дожить* до возраста $m+n$ лѣтъ. Въ страховой математикѣ принято такую вѣроятность обозначать знакомъ

$$ {}_np_m , $$

причемъ, однако, вмѣсто ${}_1p_m$ пишется просто p_m.

Подобнымъ образомъ по таблицамъ смертности вычисляется вѣроятность человѣку возраста m лѣтъ *умереть* въ возрастѣ отъ $m+n$ до $m+n+1$ лѣтъ. Эта вѣроятность обозначается знакомъ

$$ {}_{n|}q_m . $$

Таблицы смертности составляются путемъ статистическихъ наблюденій.

§ 42. Итакъ, первый основной принципъ страховой математики состоитъ въ признаніи возможности составленія таблицъ смертности, дающихъ вѣроятности ${}_np_m$, ${}_{n|}q_m$.

Второй основной принципъ страховой математики состоитъ въ примѣненіи правила дисконта или учета по сложнымъ процентамъ всѣхъ суммъ денегъ къ одному и тому же времени.

Такъ напримѣръ, считая j годовыхъ процентовъ, мы замѣчаемъ, что каждая единица капитала обращается черезъ годъ въ

$$ 1+i , $$

гдѣ $i=\frac{j}{100}$, а черезъ n лѣтъ капиталъ A обратится въ

$$ A(1+i)^n; \tag{1} $$

обратно, если капиталъ A будетъ полученъ черезъ n лѣтъ, то его дисконтированная стоимость въ настоящую минуту будетъ

$$ \frac{A}{(1+i)^n}. \tag{2} $$

Въ формулахъ (1) и (2) показатель n можно считать числомъ также дробнымъ, если принимать въ разсчетъ доли года, т. е. мѣсяцы и дни.

§ 43. Третій принципъ, примѣняемый въ страховой математикѣ состоитъ въ томъ, что дисконтъ къ опредѣленному времени суммъ, получаемыхъ въ разные сроки, примѣняется не только къ суммамъ, полученіе которыхъ достовѣрно, но и къ математическимъ ожиданіямъ суммъ недостовѣрныхъ.

Поэтому, если страховое общество разсчитываетъ получить нѣкоторый платежъ α отъ страхователя, застраховавшаго свою жизнь въ возрастѣ m лѣтъ, черезъ n лѣтъ, то оно должно разсматривать величину

$$\frac{\alpha}{(1+i)^n}\, {}_np_m;$$

это выраженіе, равное произведенію дисконтированнаго платежа $\frac{\alpha}{(1+i)^n}$ на вѣроятность ${}_np_m$, что страхователь доживетъ до этого платежа, носитъ названіе *современной стоимости платежа*.

Современная стоимость платежа есть, очевидно, не что иное, какъ *математическое ожиданіе* дисконтированной къ настоящему времени величины платежа

§ 44. Итакъ, если мы хотимъ достигнуть математической безобидности сдѣлки, то математическое ожиданіе выгоды страховщика должно равняться нулю, т. е. математическое ожиданіе его прибыли должно равняться математическому ожиданію его убытковъ.

Математическое ожиданіе прибыли страховщика, очевидно, равняется современной стоимости подлежащихъ полученію премій.

Это математическое ожиданіе можетъ быть точно указано, такъ какъ преміи уплачиваются въ началѣ каждаго года впередъ (praenumerando), и мы получаемъ на основаніи сказаннаго въ § 43

$$(1) \qquad \alpha + \frac{\alpha}{1+i}\, {}_1p_m + \frac{\alpha}{(1+i)^2}\, {}_2p_m + \ . \ . \ . = \alpha M,$$

гдѣ

$$M = 1 + \sum_1^{\kappa} \frac{{}_\kappa p_m}{(1+i)^\kappa},$$

а κ распространяется на значенія $1, 2, 3, \ldots$. Этотъ рядъ (1) оканчивается послѣ конечнаго числа членовъ, такъ какъ существуетъ *предѣльный возрастъ*, который не переживаютъ люди, значитъ ${}_np_m = 0$, если число $m+n$ превышаетъ предѣльный возрастъ.

Подсчетъ математическаго ожиданія убытковъ общества сопряженъ съ неустранимымъ затрудненіемъ, состоящимъ въ томъ, что неизвѣстно, въ какой моментъ происходитъ смерть страхователя, и, слѣдовательно, нельзя провести точнаго дисконта къ моменту заключенія сдѣлки уплачиваемаго наслѣдникамъ капитала a.

Мы можемъ сдѣлать задачу опредѣленною, если допустимъ, что страховщикъ обязанъ уплатить застрахованный капиталъ a лишь въ концѣ полнаго n-аго года отъ заключенія сдѣлки (postnumerando), если страхователь умеръ въ серединѣ этого n-аго года.

Будемъ тогда разсматривать пожизненное страхованіе, какъ совокупность годовыхъ страхованій:

на случай смерти въ возрастѣ отъ m до $m+1$ лѣтъ,

на случай смерти въ возрастѣ отъ $m+1$ до $m+2$ лѣтъ,

и т. д.

Стоимости этихъ годовыхъ страхованій въ суммѣ дадутъ

$$(2) \quad \frac{a}{1+i}\, q_m + \frac{a}{(1+i)^2}\, {}_1|q_m + \frac{a}{(1+i)^3}\, {}_2|q_m + \ldots = aN,$$

гдѣ

$$N = \frac{1}{1+i}\left\{ q_m + \sum_{1}^{\kappa} \frac{{}_\kappa|q_m}{(1+i)^\kappa} \right\};$$

здѣсь $q_m = {}_0|q_m$ и обозначаетъ вѣроятность страхователю умереть въ первый годъ послѣ заключенія страхованія. Сумма распространяется до предѣльнаго возраста. Требованіе математической безобидности даетъ уравненіе

$$\alpha M = a N,$$

опредѣляющее размѣръ страховой преміи

$$\alpha = a \frac{N}{M}.$$

Вычисленная такимъ образомъ премія носитъ названіе *netto — преміи*.

Предположеніе, что уплата наслѣдникамъ застрахованнаго капитала откладывается до конца года, уменьшаетъ, конечно, размѣръ преміи α. Болѣе пріемлемымъ на практикѣ предположеніемъ является считать, что смерть страхователя, а слѣдовательно и расплата съ наслѣдниками приходится точно въ серединѣ года, тогда надо ввести дисконтирующій множитель за половину года, т. е. $(1+i)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1+i}$, и мы получаемъ

$$\alpha = \sqrt{1 + i a \frac{N}{M}}.$$

Пріемлемость такого разсчета основана на томъ, что при большомъ числѣ страхователей случаи смерти, приходящіеся на первую половину года, комплексируются со случаями смерти, приходящимися на вторую половину.

§ 45. Страховое общество не можетъ, однако, удовольствоваться netto-преміями, такъ какъ оно несетъ расходы, связанные съ администраціей общества, расходы на жалованіе служащихъ, на наемъ помѣщеній и т. д. Поэтому къ вычисленной netto-преміи прибавляется нѣкоторая надбавка, дающая окончательную премію, которую и платитъ фактически страхователь. Эта премія носитъ названіе brutto-преміи.

§ 46. Размѣры brutto-премій, или, другими словами, дѣйствительные *тарифы* страхового учрежденія устанавливаются до извѣстной степени произвольно на основаніи общихъ законовъ конкуренціи и соотвѣтствія между спросомъ и предложеніемъ.

Если подъ вліяніемъ конкуренціи страховое общество желаетъ возможно болѣе понизить тарифы, то оно прежде всего должно знать точный размѣръ netto-премій, чтобы не назначить тарифы ниже этихъ netto-премій. Для этой цѣли необходимо имѣть возможно совершенныя таблицы смертности, чтобы вычисленныя по нимъ вѣроятности соотвѣтствовали обстоятельствамъ, имѣющимъ на самомъ дѣлѣ мѣсто въ средѣ кліентовъ общества.

У насъ въ Россіи вслѣдствіе отсутствія надежныхъ таблицъ смертности, когда приходится пользоваться нѣмецкими таблицами, вся дѣятельность страховыхъ обществъ происходитъ до нѣкоторой степени въ темную.

Заграницей, особенно въ Англіи, гдѣ существуетъ очень большое число страховыхъ обществъ, уже давно признано необходимымъ для каждаго общества вести статистику смертности среди его кліентовъ и такимъ образомъ, увеличивая число наблюденій, получать болѣе совершенныя таблицы смертности. Такимъ образомъ практическая дѣятельность вызвала къ жизни появленіе особеннаго класса людей, называемыхъ *актуаріями*, которые взяли себѣ спеціальностью изученіе страховой математики съ цѣлью приложенія своихъ знаній въ страховыхъ учрежденіяхъ.

§ 47. Необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что, если мы прослѣдимъ за исторіей выполненія одной сдѣлки страховщика съ какимъ нибудь страхователемъ, то съ теченіемъ времени всѣ шансы переходятъ на сторону страхователя, такъ какъ съ каждымъ годомъ вѣроятность уплаты преміи уменьшается, вѣроятность же смерти и, слѣдовательно, уплаты застрахованнаго капитала дѣлается больше.

Значитъ, установленная математическая безобидность при заключеніи сдѣлки нарушается съ теченіемъ времени въ пользу страхователя и противъ страховщика. Отсюда вытекаетъ необходимость для страховщика дѣлать сбереженія изъ первыхъ взносовъ преміи, другими словами, образовать запасный фондъ, такъ называемые *резервы*, чтобы изъ этого фонда покрывать свои убытки послѣдняго періода сдѣлки. Вычисленіе резервовъ представляетъ очень важную въ практическомъ отношеніи задачу страховой математики.

ГЛАВА XV.

Преподаваніе математики.

§ 1. Въ настоящее время, когда царящая техника стремится къ улучшенію внѣшняго комфорта жизни, духовные запросы жизни кажутся отходящими на второй планъ. Слѣдуя этому общему направленію, общественное мнѣніе, враждебно настроенное къ гуманитарной классической средней школѣ, рѣшительно высказывается въ пользу болѣе реальнаго средняго образованія. Въ всѣхъ странахъ поднимаются голоса выдающихся представителей науки и педагогіи, требующіе усиленія и улучшенія преподаванія математики въ средней школѣ. Во Франціи реформа преподаванія математики уже проведена въ жизнь. Въ Германіи руководитъ реформой школы талантливый и энергичный ученый профессоръ Klein, такъ что не подлежитъ никакому сомнѣнію, что реформа будетъ проведена въ близкомъ будущемъ. У насъ въ Россіи существуетъ сильное теченіе въ томъ же направленіи. Образовалась международная коммиссія, изучающая постановку преподаванія математики во всѣхъ странахъ.

§ 2. При прежней классической системѣ средняго образованія математика занимала въ средней школѣ вполнѣ опредѣленную роль, которую можно характеризовать такъ: школа давала рядъ навыковъ вычислительнаго характера, а также навыковъ геометрическаго пространственнаго мышленія, необходимыхъ въ жизни; съ другой стороны, она прибавляла къ общему логическому развитію элементъ математической логики.

Основная руководящая мысль реформаторовъ состоитъ во введеніи въ циклъ наукъ, преподаваемыхъ въ средней школѣ, началъ аналитической геометріи и анализа безконечно малыхъ. Реформаторы не ограничиваются введеніемъ высшей математики въ старшихъ классахъ гимназій, а желаютъ пропитать идеями функціональной зависимости преподаваніе элементарной алгебры уже въ среднихъ классахъ школы.

Характерные въ этомъ направленіи руководства по элементарной алгебрѣ написаны во Франціи профессоромъ Borel'емъ. На русскомъ языкѣ появился въ послѣднее время курсъ элементарной алгебры Лебединцева, написанный въ томъ же духѣ.

§ 3. Привѣтствуя, конечно, улучшеніе преподаванія математики, какъ всякій прогрессъ въ педагогическомъ дѣлѣ, необходимо, однако, высказать нѣкоторыя опасенія въ виду трудности подготовки въ Россіи достаточнаго числа хорошихъ преподавателей средней школы.

Дѣло въ томъ, что само университетское преподаваніе переживаетъ въ настоящее время переходный періодъ: прежніе пріемы изложенія кажутся новымъ авторамъ недостаточно строгими, и самый матеріалъ курсовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій подвергнутъ критической оцѣнкѣ, причемъ въ новомъ изложеніи откидываются, какъ устарѣвшія, цѣлыя главы старыхъ учебниковъ. Спрашивается, куда примкнутъ въ преподаваніи недостаточно подготовленные и мало опытные преподаватели средней школы: пойдутъ ли они по пути старыхъ пріемовъ изложенія, жертвуя строгостью и логикой для достиженія простоты формулировокъ и доказательствъ, или же начнутъ входить въ детали современнаго строгаго и тѣмъ самымъ болѣе длиннаго изложенія. При неумѣлости въ обоихъ случаяхъ можетъ получиться результатъ, не соотвѣтствующій задачамъ средней школы: при устарѣвшемъ изложеніи съ логическими дефектами математика можетъ обратиться въ такой предметъ, который подъ маской общепринятаго мнѣнія о точности его состоитъ изъ невѣрныхъ утвержденій, сопровождаемыхъ фальшивыми доказательствами; если же преподаватель бросится въ дебри мельчайшихъ подробностей строгаго изложенія, то, конечно, получится простая потеря времени, такъ какъ при сомнительной пользѣ для дѣла развитія логики изъ такого изложенія ускользнутъ сами тѣ основныя положенія, которыя составляютъ цѣль преподаванія.

§ 4. Въ виду сказаннаго является важнымъ остановиться нѣсколько подробнѣе на тѣхъ пунктахъ высшей математики, изложеніе которыхъ подверглось серьезнымъ измѣненіямъ. Я ограничусь лишь тремя пунктами: раскрытіемъ неопредѣленностей, разложеніемъ функцій въ ряды и вопросомъ о maxima и minima функцій съ нѣсколькими перемѣнными независимыми.

Раскрытіе неопредѣленностей.

§ 5. Подъ заглавіемъ „*раскрытіе неопредѣленностей*“ или „*нахожденіе истиннаго значенія выраженія неопредѣленнаго вида*“ въ старыхъ курсахъ излагается рядъ пріемовъ для рѣшенія изложеннаго далѣе вопроса.

Функція

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

принимаетъ неопредѣленный видъ при $x = a$, когда функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x = a$ или дѣлаются обѣ равными нулю, или обѣ обращаются въ безконечность. Въ старыхъ книгахъ говорилось о раскрытіи такихъ неопредѣленныхъ выраженій и о нахожденіи ихъ значеній, которыя назывались *истинными* значеніями этихъ неопредѣленныхъ выраженій. Напримѣръ, дробь

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x = a$. По сокращеніи же на $x - a$ дробь обращается въ $x + a$ и даетъ для $x = a$ число $a + a = 2a$, такъ что „истиннымъ“ значеніемъ выраженія вида $\frac{0}{0}$ оказывается $2a$.

Подобнымъ же образомъ дробь

$$\frac{tg\, x}{sec\, x}$$

при $x = \frac{\pi}{2}$ имѣетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$, но если мы эту дробь преобразуемъ, то получимъ $sin\, x$, и, значитъ, „истинное“ значеніе дроби будетъ $sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Все это мы сказали языкомъ старыхъ учебниковъ. Само названіе „истинное значеніе“ возвращаетъ насъ къ тому времени, когда предполагалось, что формула своимъ неопредѣленнымъ видомъ скрываетъ отъ насъ какое то „истинное" значеніе, которое необходимо раскрыть. Теперь же смотрятъ на дѣло проще и основательнѣе, а именно, считаютъ, что всякая формула имѣетъ лишь настолько смысла, насколько вложено въ нее лицомъ, написавшимъ формулу; поэтому требуется кромѣ заданія формулы точное разъясненіе значенія и смысла входящихъ въ эту формулу знаковъ.

Злоупотребленіе формулами, образованными изъ знаковъ, смыслъ которыхъ сомнителенъ, въ настоящее время порицается.

Вопросъ о раскрытіи неопредѣленностей нынче трактуется такъ. Положимъ, что авторъ математическаго сочиненія желаетъ разсматривать нѣкоторую функцію $F(x)$ и задаетъ ее формулой $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если эта формула принимаетъ одинъ изъ неопредѣленныхъ видовъ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ при $x=a$, то считается, что функція задана *неполнымъ* образомъ. Для полнаго заданія авторъ долженъ *обязательно* прибавить, какое значеніе онъ желаетъ придать функціи при $x=a$, т. е. долженъ сказать, что онъ желаетъ подразумѣвать подъ знакомъ $F(a)$, ибо неопредѣленный видъ формулы ставитъ читателя въ недоумѣніе, особенно, если читатель осторожный и не желаетъ своими догадками приписывать автору такія мысли, которыхъ тотъ быть можетъ вовсе не имѣлъ.

Никакого „истиннаго" значенія нѣтъ и быть не можетъ по той простой причинѣ, что ничто не можетъ *помѣшать* автору, если онъ того *пожелаетъ*, выбрать значеніе $F(a)$ совсѣмъ произвольно.

Совершенно другое дѣло, если авторъ пожелаетъ, чтобы функція $F(x)$ была *непрерывна* при $x=a$. Тогда, слѣдуя, тому, что сказано въ § 77 гл. III, придется разсмотрѣть *предѣльное значеніе* функціи $F(x)$ при приближеніи x къ a, т. е. предѣльное значеніе

$$\lim_{h=0} F(a+h).$$

Итакъ, *непрерывность* функціи даетъ равенство

$$F(a)=\lim_{h=0} F(a+h)=\lim_{h=0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}.$$

Итакъ, прежнее „истинное" значеніе обращается въ „предѣльное" значеніе функцій.

Конечно, ничего нельзя возразить противъ помѣщенія въ дифференціальномъ исчисленіи главы, трактующей о вычисленіи предѣльныхъ значеній функціи. Устарѣлой рутиной является лишь подведеніе всѣхъ такого рода вопросовъ подъ правило, данное въ XVIII столѣтіи математикомъ l'Hospital'емъ.

Въ новыхъ курсахъ дифференціальнаго исчисленія держатся того мнѣнія, что вычисленіе предѣльныхъ значеній функцій зависитъ всецѣло отъ характера заданной функціи, а потому безконечное разнообразіе пріемовъ, которые придется въ различныхъ случаяхъ примѣнять, не можетъ уложиться въ рамки одного общаго простого правила.

Правило l'Hospital'я раздѣляетъ общую участь всѣхъ панацей и является совершенно неудовлетворительнымъ въ большомъ числѣ случаевъ.

Въ недавно выпущенномъ въ русскомъ переводѣ курсѣ профессора Боннскаго университета G. Kowalewsky ни слова не упоминается о правилѣ l'Hospital'я.

Такой полный остракизмъ правила l'Hospital'я я считаю также утрировкой, а потому считаю необходимымъ сказать нѣсколько словъ о немъ, такъ какъ все же существуютъ случаи, гдѣ это правило полезно, не говоря уже о томъ, что правило l'Hospital'я въ высшей степени удобно для запоминанія и болѣе столѣтія помѣщалось въ руководствахъ.

§ 6. Прилагая формулу Taylor'а, мы получимъ

$$F(a+h)=\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots}{\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots},$$

но, если $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$, тогда

$$F(a+h)=\frac{f'(a)+\frac{h}{1.2}f''(a)+\ldots}{\varphi'(a)+\frac{h}{1.2}\varphi''(a)+\ldots}.$$

Если отношеніе $\dfrac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ представляетъ опредѣленную величину, то мы имѣемъ при $h=0$

$$F(a) = \frac{f'(a)}{\varphi'(x)};$$

отсюда мы получаемъ слѣдующее правило.

Правило l'Hospital'я: вмѣсто отношенія $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, имѣющаго неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$ при $x = a$, *берется отношеніе производныхъ* $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ и подставляется въ него $x = a$; если получается опредѣленное численное значеніе A, т. е.

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = A,$$

то A и будетъ искомымъ предѣльнымъ значеніемъ заданнаго отношенія $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Если отношеніе производныхъ при $x = a$ само имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$, то примѣняемъ правило еще разъ, т. е. *беремъ отношеніе вторыхъ производныхъ* $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и продолжаемъ такъ поступать до тѣхъ поръ, пока неопредѣленность не раскрывается.

Предѣльное значеніе A можетъ въ частныхъ случаяхъ равняться 0 или ∞.

§ 7. Напримѣръ, требуется найти предѣльное значеніе для выраженія

$$\frac{1 - \cos x}{x^2}$$

при $x = 0$.

Беремъ отношеніе производныхъ $\frac{\sin x}{2x}$. Это отношеніе имѣетъ опять видъ $\frac{0}{0}$. Примѣняемъ еще разъ правило и получаемъ $\frac{\cos x}{2}$, что даетъ при $x = 0$ искомое предѣльное значеніе $\frac{1}{2}$.

§ 8. Далѣе, въ старыхъ курсахъ правило l'Hospital'я распространялось на случай неопредѣленныхъ выраженій вида $\frac{\infty}{\infty}$, а также на случай $x=\infty$, причемъ доказывалось, что всегда имѣетъ мѣсто равенство

$$(1) \qquad lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=lim\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

т. е., что во всѣхъ случаяхъ остается тотъ же способъ изслѣдованія.

§ 9. Уже на простыхъ примѣрахъ замѣчалось однако, что съ правиломъ l'Hospital'я не всегда дѣло обстоитъ благополучно.

Какъ первый такой примѣръ возьмемъ выраженіе

$$(1) \qquad \frac{x-sin\,x}{x+sin\,x},$$

которое имѣетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$ при $x=\infty$.

Если мы возьмемъ отношеніе производныхъ

$$(2) \qquad \frac{1-cos\,x}{1+cos\,x},$$

то замѣтимъ, что при возрастаніи x до $+\infty$ это отношеніе не стремится *буквально* ни къ какому предѣлу, такъ какъ, какое бы большое число x_0 мы ни взяли, всегда дробь (2) будетъ для значеній λ большихъ этого x_0 принимать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Если бы мы заключили, что и отношеніе (1) не имѣетъ опредѣленнаго предѣльнаго значенія, то мы бы ошиблись, такъ какъ очевидно,

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{x-sin\,x}{x+sin\,x}\right\}=lim\left\{\frac{1-\frac{sin\,x}{x}}{1+\frac{sin\,x}{x}}\right\}=1.$$

Для второго примѣра возьмемъ выраженіе

$$(3) \qquad \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}},\ \alpha>0,\ \beta>0,$$

имѣющее видъ $\frac{\infty}{\infty}$ при приближеніи положительнаго числа x къ нулю.

Сколько бы разъ мы ни примѣняли правило l'Hospital'я

$$\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}}, \frac{\alpha}{\beta}\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}}, \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{e^{\frac{\alpha}{x}}}{e^{\frac{\beta}{x}}}, \ldots$$

неопредѣленность не раскрывается.

Между тѣмъ неопредѣленность сразу пропадаетъ, если мы представимъ выраженіе (3) въ видѣ

$$e^{\frac{\alpha-\beta}{x}};$$

тогда мы замѣчаемъ, что при $\alpha-\beta>0$ предѣльное значеніе равно $+\infty$, при $\alpha-\beta<0$ предѣльное значеніе есть 0 и при $\alpha-\beta=0$ оно равно 1.

§ 10. При разсмотрѣніи задачъ, которыя въ старыхъ курсахъ предлагались къ рѣшенію при помощи правила l'Hospital'я, мы встрѣчаемся съ большой долей наивности, съ какою то игрой въ формулы.

Предлагалось, напримѣръ, примѣнять правило l'Hospital'я къ задачѣ

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=\lim\frac{\cos x}{1}=1,$$

тогда какъ этотъ предѣлъ, какъ мы видѣли въ § 73 гл. III, получается изъ самыхъ элементарныхъ соображеній.

Еще болѣе наивную игру въ формулы представляетъ примѣръ:

$$\lim_{x=0}\frac{lg(1+x)}{x}=\lim\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1,$$

такъ какъ здѣсь предлагается дифференцировать функцію $lg(1+x)$, тогда какъ въ § 88 гл. III мы видѣли, что для вывода самого правила дифференцированія логариѳма необходимо знаніе предѣла выраженія

$$\frac{lg(1+x)}{x}=lg(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

которое теперь запоздалымъ образомъ предлагается въ видѣ задачи.

§ 11. Въ заключеніе разсмотримъ задачу, къ которой правило l'Hospital'я вполнѣ прилагается.

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли уже въ § 181 гл. III, что при $x=\infty$ показательная функція e^x возрастаетъ быстрѣе всякой степенной функціи x^n съ цѣлымъ показателемъ, т. е.

$$\lim_{x=\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty .$$

Прилагая n разъ правило l'Hospital'я, мы придемъ къ отношенію производныхъ порядка n, т. е.

$$\frac{e^x}{n.(n-1)\ldots 3.2.1.},$$

которое показываетъ, что получается ∞ при $x=\infty$.

Съ другой стороны, если мы разсмотримъ отношеніе

$$\frac{lgx}{x^\alpha},\text{ гдѣ } \alpha>0,$$

то какъ бы мало ни было положительное число α, мы будемъ имѣть

$$\lim_{x=\infty}\frac{lgx}{x^\alpha}=0,$$

такъ какъ, беря отношеніе производныхъ, мы получимъ

$$\frac{1}{x}:\alpha x^{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha x^\alpha};$$

эта же величина, очевидно, имѣетъ предѣломъ 0 при $x=\infty$, и мы приходимъ къ заключенію.

Логариѳмъ $lg\,x$ возрастаетъ при $x=+\infty$ медленнѣе, чѣмъ всякая степень x^α съ положительнымъ показателемъ α, какъ бы малъ ни былъ этотъ показатель.

О разложеніи функцій въ ряды по формулѣ Maclaurin'a.

§ 12. Относительно этого вопроса я ограничусь всего лишь нѣсколькими замѣчаніями.

Дѣло въ томъ, что, если мы раскладываемъ заданную функцію $f(x)$ въ рядъ по степенямъ x, примѣняя формулу Maclaurin'a

$$(1) \qquad f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots,$$

то является два кардинальныхъ вопроса: 1) на сколько рядъ (1) сходится и тѣмъ самымъ способенъ представлять какую бы то ни было функцію, 2) если этотъ рядъ (1) представляетъ функцію, то будетъ ли эта функція какъ разъ $f(x)$ или какая нибудь другая.

Что эти вопросы дѣйствительно подлежатъ отвѣту, слѣдуетъ изъ такого простого соображенія.

Возьмемъ двѣ функціи

$$f(x) \text{ и } \varphi(x)=f(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Обнаруживается слѣдующее оригинальное явленіе: обращаются въ нуль при $x=0$ какъ сама функція

$$e^{-\frac{1}{x^2}},$$

такъ и ея производныя какого угодно порядка; мы получаемъ при всякомъ n

$$f(0)=\varphi(0), \quad f^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(0).$$

Итакъ, строка Maclaurin'а дастъ одно и тоже разложеніе въ рядъ для обѣихъ функцій

$$f(x) \text{ и } \varphi(x).$$

Спрашивается, для какой же изъ этихъ функцій получилось разложеніе.

Вопросъ о разложеніи функцій по формулѣ Taylor'а приведенъ въ послѣднее время въ порядокъ изслѣдованіями мюнхенскаго профессора Pringsheim'а.

Наиболѣе исчерпывающее изложеніе требуетъ однако введенія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго.

Интересно знать, будутъ ли преподаватели средней школы вдаваться въ эти подробности, или же ограничатся сообщеніемъ, что строка Maclaurin'а даетъ разложеніе функцій въ ряды, такъ что ученикъ, довѣряющій авторитету учителя, начнетъ разлагать въ рядъ функцію $e^x+e^{-\frac{1}{x^2}}$, а въ результатѣ получитъ разложеженіе для e^x.

Maxima и minima функцій многихъ перемѣнныхъ.

§ 13. Теперь мы перейдемъ къ тому замѣчательному въ исторіи математики факту, о которомъ было упомянуто въ § 1 гл. I, а именно, мы скажемъ о томъ, какъ оказалось *невѣрнымъ* разсужденіе, излагавшееся въ качествѣ *очевиднаго* на лекціяхъ выдающихся профессоровъ.

Мы возьмемъ въ переводѣ отрывокъ изъ курса дифференціальнаго исчисленія извѣстнаго французскаго академика и профессора Bertrand'a, опубликованнаго въ 1864 году.

„480. Пусть будетъ $\varphi(x, y)$ функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y; значенія maxima и minima таковы, что разность

$$\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)$$

сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были положительныя или отрицательныя очень малыя значенія h и k. Теорема Taylor'a даетъ

$$\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)=h\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R, \tag{1}$$

и для безконечно малыхъ значеній h и k можно преберечь величиною R по сравненію съ первыми двумя членами всякій разъ, когда эти послѣдніе отличны отъ нуля.

Но эти члены, которые опредѣляютъ знакъ второй части, мѣняютъ знакъ безъ измѣненія абсолютной величины при замѣнѣ h на $-h$ и k на $-k$; приращеніе функціи можетъ имѣть неизмѣнный знакъ только въ томъ случаѣ, когда сразу

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0; \tag{2}$$

Эти условія общія для maximum'a и для minimum'a; . . .

. . . .

. . . Но эти два уравненія недостаточны; предполагая, что они удовлетворены, получаемъ по теоремѣ Taylor'a

$$\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)=\frac{h^2}{1.2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+ \tag{3}$$

$$+\frac{k^2}{1.2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+R,$$

гдѣ величиной R можно пренебречь при малыхъ значеніяхъ h и k по сравненію съ тремя первыми членами второй части уравненія. Если всѣ три производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ не равны всѣ сразу нулю, то знакъ второй части при безконечно малыхъ значеніяхъ h и k будетъ совпадать со знакомъ трехчлена

$$\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+hk\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \tag{4}$$

будетъ существовать maximum или minimum, если сумма (4) остается всегда отрицательной или положительной для всѣхъ очень малыхъ значеній h и k; но, если мы напишемъ выраженіе (4) такъ

$$\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{k}{h}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{k}{h}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right],$$

мы видимъ, что его знакъ зависитъ только отъ второго множителя, который есть функція отъ $\frac{k}{h}$ и можетъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для того чтобы трехчленъ сохранялъ всегда тотъ же знакъ, должно быть

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)<0; \tag{5}$$

это условіе требуетъ, чтобы $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ имѣли одинъ знакъ; если онѣ отрицательныя, то трехчленъ (4) отрицателенъ и получается maximum; будетъ minimum въ обратномъ случаѣ, когда при существованіи неравенства (5) производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ положительныя.

Если значенія x и y, которыя обращаютъ въ нуль $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, даютъ

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0,$$

трехчленъ (4) не будетъ мѣнять знака, но онъ можетъ сдѣлаться равнымъ нулю, такъ что при соотвѣтственно подобранномъ значеніи отношенія $\frac{k}{h}$ пропадаютъ члены второго порядка во второй части уравненія (3), такимъ образомъ сумма членовъ третьяго порядка даетъ знакъ всему разложенію: эти же члены мѣняютъ знакъ безъ измѣненія численной величины, когда, оставляя $\frac{k}{h}$ неизмѣннымъ, мы мѣняемъ h на $-h$ и k на $-k$; слѣдовательно, нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а, если для разсматриваемаго значенія отношенія $\frac{k}{h}$ сумма этихъ членовъ отлична отъ нуля; если сумма членовъ третьяго порядка равна нулю въ то время, какъ и сумма членовъ второго порядка, то члены четвертаго порядка для этого значенія отношенія $\frac{k}{h}$ даютъ свой знакъ всему разложенію; такъ какъ они не мѣняютъ знака при замѣнѣ h на $-h$ и k на $-k$, то достаточно, чтобы былъ maximum или minimum, чтобы этотъ знакъ совпадалъ со знакомъ, который сохраняютъ члены второго порядка для значеній $\frac{k}{h}$, не обращающихъ ихъ въ нуль".

Невѣрность приведенныхъ разсужденій Bertrand'а показалъ на очень простомъ примѣрѣ итальянскій профессоръ Peano.

Разсмотримъ этотъ примѣръ.

Дана функція

$$\varphi(x, y) = y^2 - (a+b)\,y\,x^2 + a\,b\,x^4,\ ab > 0; \tag{6}$$

такъ какъ ея обѣ частныя производныя

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2\,(a+b)\,y\,x + 4\,a\,b\,x^3,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\,y - (a+b)\,x^2$$

обращаются въ нуль при $x = 0$, $y = 0$, то спрашивается, будетъ ли значеніе $\varphi(0, 0)$ maximum или minimum, или же не будетъ ни того, ни другого.

Выписываемъ для данной функціи равенство (3)

$$\varphi(0+h, 0+k) - \varphi(0, 0) = k^2 - (a+b)\,k\,h^2 + a\,b\,h^4;$$

здѣсь второй дифференціалъ есть k^2, третій $-(a+b)\,k\,h^2$, четвертый $a\,b\,h^4$; остальные дифференціалы тождественно равны нулю.

Слѣдуя Bertrand'у мы должны разсуждать такъ.

Второй дифференціалъ имѣетъ знакъ $+$, но онъ обращается въ нуль, когда отношеніе

$$\frac{k}{h}$$

равно нулю, при этомъ третій дифференціалъ также обращается въ нуль, но четвертый дифференціалъ

$$a\,b\,h^4,$$

не обращаясь *) въ нуль, сохраняетъ знакъ $+$, слѣдовательно, на основаніи разсужденій Bertrand'а получается minimum, такъ какъ около $x=0$, $y=0$, повидимому, не существуетъ значеній, дающихъ функціи $\varphi(h,k)$ знакъ —.

Легко однако обнаружить существованіе отрицательныхъ значеній, если положить

$$k=\alpha h^2;$$

тогда получаемъ

$$\varphi(h,k)=(\alpha-a)(\alpha-b)\,h^4,$$

и будетъ $\varphi(h,k)<0$, если число α выбрать между числами a и b, такъ какъ тогда

$$(\alpha-a)(\alpha-b)<0.$$

Итакъ, примѣръ Peano показываетъ, что теорія maxima и minima функцій многихъ перемѣнныхъ независимыхъ сложнѣе на самомъ дѣлѣ, чѣмъ она казалась прежнимъ авторамъ.

Преподаваніе элементарной математики.

§ 14. Элементарная математика, составляющая въ настоящее время предметъ преподаванія въ средней школѣ, раздѣляется на слѣдующихъ четыре отдѣла: 1) *ариѳметика*, 2) *алгебра*, 3) *геометрія*, 4) *тригонометрія*.

§ 15. Характернымъ явленіемъ педагогической литературы по элементарной математикѣ является появленіе особаго отдѣла, носящаго названіе *методики математики*.

Эта методика, главнымъ образомъ, имѣетъ въ виду преподаваніе элементарной математики. Тутъ дѣло идетъ не о методахъ изслѣдованія, а о методахъ болѣе успѣшнаго преподаванія.

---

*) Для обращенія въ нуль отношенія $\frac{k}{h}$ достаточно $k=0$, число же h можетъ остаться отличнымъ отъ нуля.

Методы изслѣдованія составляютъ, конечно, предметъ самой математики, какъ науки, и было бы страннымъ ставить параллельно съ математикой какой то новый предметъ подъ названіемъ методики.

Методика же преподаванія элементарной математики имѣетъ большое практическое значеніе.

Изъ педагогическаго опыта выясняется, что одного знанія своего предмета учителемъ не всегда бываетъ достаточно, и что громадное значеніе имѣетъ также тотъ способъ преподаванія, который выбранъ учителемъ.

Выборъ способа преподаванія зависитъ, конечно, отъ возраста учениковъ, отъ ихъ степени математическаго развитія и ихъ способностей.

Чѣмъ меньше возрастъ учащихся, тѣмъ важнѣе бываетъ развить у знающаго свой предметъ учителя искусство хорошаго преподаванія. Особенно важнымъ является это требованіе при преподаваніи ариѳметики вслѣдствіе юнаго возраста учащихся.

Методика ариѳметики особенно разработана въ Россіи. Эта методика идетъ очень далеко въ своихъ совѣтахъ, она даетъ подробныя указанія, какъ при различныхъ обстоятельствахъ вести дѣло преподаванія.

§ 16. Нѣсколько иначе обстоитъ дѣло съ элементарной алгеброй. Общепедагогическіе и дидактическіе совѣты методики ариѳметики остаются конечно въ силѣ и для преподаванія алгебры, но тутъ встаетъ новая сторона дѣла, которую невозможно игнорировать. Является необходимость методики элементарной алгебры съ точки зрѣнія строго логическаго изложенія этого предмета, такъ какъ алгебра, будучи предметомъ старшихъ классовъ гимназіи, заслуживаетъ уже болѣе или менѣе систематическаго изложенія. Строгость изложенія, конечно, не должна нарушать элементарности его и доступности ученикамъ.

Эта сторона методики алгебры поставлена до сихъ поръ въ высшей степени слабо.

Если мы обратимся къ разсмотрѣнію современныхъ курсовъ элементарной алгебры, то мы замѣчаемъ въ нихъ одну общую черту, а именно, логическая сторона дѣла становится тѣмъ лучше, чѣмъ ближе къ концу курса.

Да простятъ мнѣ авторы курсовъ элементарной алгебры быть можетъ нѣсколько сильное выраженіе, если я скажу, что начало алгебры, гдѣ вводятся въ разсмотрѣніе числа отрицательныя и начинаются дѣйствія съ многочленами, излагаются неудовлетворительно съ логической точки зрѣнія даже въ лучшихъ курсахъ, получившихъ большое распространеніе.

Указанныя мною недостатки изложенія находятъ свое оправданіе въ томъ, что эволюція перехода преподаванія отъ старыхъ схоластическихъ пріемовъ изложенія къ новымъ, болѣе строгимъ, не закончилась еще даже въ преподаваніи высшей математики.

Стоитъ припомнить, что лишь сравнительно недавно получило болѣе или менѣе законченный видъ изложеніе теоріи ирраціональныхъ чиселъ, благодаря изслѣдованіямъ Weierstrass'а, Cantor'а и Dedekind'а.

§ 17. Что касается преподаванія геометріи, то здѣсь является важнымъ развить у учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній навыки яснаго пространственнаго мышленія, и было бы едва ли цѣлесообразнымъ увлекаться особенною строгостью и систематичностью изложенія.

Такъ какъ въ основѣ изложенія геометріи мы принуждены ставить рядъ аксіомъ, изъ которыхъ должно вытекать все остальное, то дѣло строгаго изложенія геометріи сводится къ тому, чтобы установить циклъ этихъ аксіомъ, удовлетворяющій слѣдующимъ двумъ требованіямъ: 1) не должно быть лишнихъ аксіомъ, т. е. такихъ, которыя вытекаютъ изъ предыдущихъ, 2) не должно быть пропуска аксіомъ.

Въ этомъ направленіи произведены выдающіяся изслѣдованія професоромъ Hilbert'омъ, съ которыми необходимо познакомиться всякому преподавателю математики.

Наиболѣе строгимъ способомъ изложенія геометріи былъ бы аналитическій способъ, указанный въ § 85 гл. II.

Здѣсь мы не нуждались бы ни въ какихъ аксіомахъ. Все дѣло сводилось бы къ опредѣленіямъ и теоремамъ.

Очевидно, что такой способъ не пригоденъ для средней школы.

Заключеніе.

Итакъ, мы закончили нашъ обзоръ различныхъ частей математики. Если читатель задумается надъ вопросомъ, какое прикладное значеніе имѣютъ всѣ эти разобранныя нами теоріи, то ему придется поставить себѣ самый общій вопросъ о томъ, въ чемъ состоитъ сущность прикладного знанія.

Единственнымъ звеномъ, связывающимъ нашъ внутренній міръ съ внѣшней природой, являются наши чувства. Эти чувства суть посредники, при помощи которыхъ мы составляемъ себѣ наши представленія о внѣшнемъ мірѣ. Процессъ полученія показаній этихъ посредниковъ составляетъ то, что называется наблюденіемъ, опытомъ. Желаніе разобраться въ правдивости показаній чувствъ привело къ критическому отношенію къ опыту и наблюденію. Явилось убѣжденіе въ необходимости отдѣлить то, что въ показаніяхъ чувствъ можно считать за достовѣрное, отъ того, что представляетъ иллюзію, самообманъ. Явился научный опытъ и, какъ слѣдствіе его, теорія. Что такое есть всякая наша теорія, относящаяся къ внѣшнему міру? Такая теорія есть всегда до нѣкоторой степени произвольно выбранная логическая схема, въ рамки которой мы укладываемъ результаты опыта и наблюденія. Съ свойственнымъ человѣку самомнѣніемъ мы придаемъ часто предложеніямъ нашей теоріи громкое названіе законовъ природы и думаемъ, что явленія на самомъ дѣлѣ совершаются по тѣмъ правиламъ, которыя мы себѣ представляемъ въ нашей теоріи. Мы забываемъ, что находимся въ зависимости отъ нашихъ чувствъ. Мы не можемъ отрицать того, что могутъ существовать другія мыслящія существа, хотя-бы, напримѣръ, жители какой нибудь планеты, которые имѣютъ болѣе пяти чувствъ или эти чувства иного характера. Конечно, у такихъ существъ будетъ совершенно другая натуральная философія, будутъ другіе законы природы, вѣроятно, совершенно непонятные для насъ.

Итакъ, мы должны остаться въ рамкахъ нашего познанія, ограниченнаго показаніями нашихъ чувствъ. Въ этомъ отношеніи натуральный философъ похожъ на человѣка, введеннаго съ закрытыми глазами въ грандіозный храмъ. Онъ ходитъ по стѣнкамъ храма и ощупываетъ украшенія пьедесталовъ колоннъ и стѣнъ. Онъ стремится составить себѣ по этимъ малымъ даннымъ общее представленіе о храмѣ.

Какимъ же образомъ изъ того немногаго, что даютъ намъ чувства, создать грандіозную общую систему мірозданія. Для этой цѣли является на помощь догадка, гипотеза. Такая гипотеза, какъ бы она наивна ни была, остается въ видѣ теоріи до тѣхъ поръ, пока не обнаружится ея неудовлетворительность. Происходитъ обыкновенно одно изъ двухъ: или обнаруживаются новые факты, не укладывающіеся въ рамки гипотезы, или же путемъ планомѣрныхъ обсужденій и сравненія съ наблюденіями обнаруживается разногласіе. Гипотеза замѣняется новою, которая въ свою очередь можетъ уступить мѣсто болѣе совершенной. Возьмемъ, напримѣръ, астрономію. Какой длинный путь измѣненій міросозерцанія долженъ былъ быть пройденъ, чтобы отъ плоской земли съ хрустальнымъ колпакомъ неба перейти къ безконечному пространству, въ которомъ двигаются по законамъ механики милліарды міровъ, изъ которыхъ многіе, вѣроятно, обитаемы. Вполнѣ справедливо замѣчаніе одного астронома, что исторія астрономіи есть исторія постепенно устраненныхъ заблужденій человѣческаго ума. Подобнымъ же образомъ въ теоріи свѣта Newton'овская теорія истеченія замѣнена была теоріей колебаній эфира, которая въ свою очередь вылилась въ современную электромагнитную. Если мы желаемъ представить себѣ точнѣе образованіе теорій натуральной философіи, то мы должны сказать такъ. Натуръ-философъ строитъ собственный внутренній міръ идей и образовъ, причемъ старается достигнуть совершеннаго параллелизма съ внѣшнимъ міромъ. Что я понимаю подъ словомъ параллелизмъ? Я понимаю это такъ: каждому факту внѣшняго міра долженъ соотвѣтствовать фактъ нашего новаго внутренняго міра и обратно. Послѣдняя фраза нуждается въ болѣе точномъ толкованіи. Такъ какъ мы не можемъ мыслить внѣшнихъ предметовъ въ самихъ себѣ, а лишь по ихъ аналогамъ въ томъ самомъ внутреннемъ мірѣ, который мы желаемъ построить, то ясно, что установленіе параллелизма двухъ міровъ не можетъ основываться на какихъ либо апріорныхъ соображеніяхъ, но должно совершаться a posteriori, т. е. на основаніи опыта, на основаніи показаній нашихъ чувствъ. Можно такъ характеризовать требованіе параллелизма двухъ міровъ. Міръ идей долженъ быть таковъ, чтобы всѣ логическіе выводы его не противорѣчили показаніямъ чувствъ и обратно, чтобы всякое чувственное воспріятіе находило себѣ объясненіе въ мірѣ идей. Уже давно было обнаружено, что подлежащій построенію міръ идей долженъ быть характера математическаго, такъ какъ другого характера мышленіе не имѣетъ той точности и разнообразія, которыя могли бы претендовать на сравненіе съ безконечнымъ разнообразіемъ чувственныхъ воспріятій изъ внѣшняго міра. Одинъ изъ выдающихся математиковъ высказалъ мысль, что всякая наука имѣетъ своею цѣлью сдѣлаться математикой. Эту мысль мы выскажемъ иначе: для всякой изъ натуральныхъ наукъ необходимо построеніе математической схемы.

Итакъ, мы приходимъ къ заключенію, что тотъ внутренній міръ идей, который мы строимъ, долженъ быть ничѣмъ инымъ, какъ совокупностью математическихъ теорій всѣхъ явленій природы. Теперь мы становимся лицомъ къ лицу съ основнымъ вопросомъ, возможна ли задача математическаго объясненія явленій природы. Можетъ явиться сомнѣніе, что задача эта невозможна по существу; что законы нашего мышленія находятся въ коренномъ противорѣчіи съ внѣшнимъ міромъ; что, замѣняя несовершенныя теоріи новыми, мы получаемъ также несовершенныя теоріи, причемъ такія, которыя исправляютъ нѣкоторыя погрѣшности своихъ предшественницъ, но грѣшатъ еще болѣе въ другихъ своихъ выводахъ, такъ что, смѣняя теоріи, мы будемъ вращаться въ нѣкоторомъ circulus vitiosus. По моему мнѣнію такое сомнѣніе неустранимо, ибо провѣрка теорій возможна только изъ опыта, и ни за одну теорію нельзя поручиться, что она не будетъ замѣнена новою, болѣе совершенною. Къ счастью для науки этотъ скептицизмъ не былъ распространенъ. Большинство натуръ-философовъ вѣрило въ возможность рѣшенія міровой задачи или, по крайней мѣрѣ, въ возможность безконечнаго приближенія къ такому рѣшенію. Мы вѣримъ, что, постепенно исправляя наши теоріи и поправляя наши ошибки, мы строимъ зданіе внутренняго міра идей, все ближе и ближе приближающагося къ параллелизму съ внѣшнимъ міромъ.

Обратимся теперь къ исторіи науки и поставимъ себѣ вопросъ, чему эта исторія учитъ: склоняетъ ли она нашу мысль въ сторону скептицизма или въ сторону вѣры въ могущество математическаго міросозерцанія. Отвѣтъ получается утвердительный; дѣйствительно, эта исторія даетъ цѣлый рядъ поразительныхъ примѣровъ гармонической связи между математической теоріей и опытнымъ знаніемъ, связи, покоящейся несомнѣнно на какихъ-то внутреннихъ причинахъ. Исторія науки какъ бы учитъ, что дѣйствительно человѣкъ по разуму есть образъ и подобіе Божества, создавшаго міръ, и что ему дано проникновеніе въ тайны природы, построенной повидимому какъ разъ по тѣмъ же законамъ, по которымъ онъ ее мыслитъ. Въ самомъ дѣлѣ, чѣмъ иначе объяснить знаменательный фактъ возможности теоретическихъ предсказаній новыхъ явленій природы. Возможность такихъ предсказаній, число которыхъ растетъ съ каждымъ днемъ, должна укрѣплять у натуръ-философа вѣру въ силы его разума, вѣру въ то, что онъ идетъ по вѣрному пути проникновенія въ тайны природы.

Первая, самая близкая къ внутреннему міру человѣка схема есть, конечно, алгебра, или, вообще говоря, математическій анализъ. Эта схема есть самая отвлеченная, но зато самая близкая къ внутреннему міру человѣка, а потому, я сказалъ бы, самая реальная. Въ самомъ дѣлѣ, алгебраическіе символы, надъ которыми мы оперируемъ въ анализѣ, суть продуктъ нашей свободной воли. Я желаю разсматривать такіе-то символы, я надѣляю ихъ свойствами по моему произволу, я устанавливаю такія основныя дѣйствія надъ этими символами, которыя мнѣ нравятся. Остальное есть слѣдствіе умозаключеній, совершающихся по законамъ моего мышленія. Если васъ не интересуютъ мои символы, вы ихъ отбрасываете, если они васъ интересуютъ, то вы становитесь моими слушателями. Опытъ болѣе двухъ тысячъ лѣтъ исторіи математики показалъ, что законы мышленія одинаковы у всѣхъ людей, и оказалось, что всѣ выводы анализа, считающіеся правильными однимъ человѣкомъ, кажутся правильными всѣмъ другимъ. Вы мнѣ можете сказать, что при установленіи основъ анализа произволъ выбора символовъ и дѣйствій надъ ними былъ ограниченъ желаніемъ получить доктрину, прилагаемую въ жизни и естествознаніи. Все это правильно, но для насъ не такъ важно знать, что насъ заставило установить тѣ или другія основы алгебры, сколько констатировать фактъ, что мы могли бы создать новую алгебру съ совершенно другими основными законами, которая была бы вполнѣ логична во всѣхъ своихъ выводахъ, хотя быть можетъ и не могла бы заинтересовать такое большое число людей, какъ алгебра, приспособленная къ приложеніямъ.

Обращаемся теперь къ схемамъ, тѣсно связаннымъ съ наблюденіемъ внѣшняго міра. Самая отвлеченная изъ этихъ схемъ есть, конечно, геометрія. Геометрія изучаетъ свойства одного основнаго понятія, безъ котораго человѣкъ не представляетъ себѣ внѣшняго міра, а именно, понятія о пространствѣ. Существуетъ ли пространство на самомъ дѣлѣ - вопросъ вполнѣ праздный. Фактъ тотъ, что человѣкъ безъ этого понятія не представляетъ себѣ внѣшняго міра. Человѣкъ представляетъ себѣ пространство, какъ предметъ, въ различныхъ мѣстахъ котораго находятся предметы внѣшняго міра. Въ пространствѣ происходятъ всѣ движенія и совершается жизнь. Ясное дѣло, что геометрія является слѣдующей послѣ анализа схемой, зависящей уже отъ наблюденія и опыта.

Дальнейшей схемой является кинематика - наука о движеніи. Связанная тѣсно съ геометріей, кинематика вводитъ новое понятіе, а именно, понятіе о времени. Дальнѣйшее завершеніе схемъ естествознанія представляютъ понятія о силѣ и о матеріи.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію фактовъ изъ исторіи науки, укрѣпляющихъ вѣру въ могущество математическаго міросозерцанія. Прежде чѣмъ я перейду къ перечисленію ряда поразительныхъ предсказаній новыхъ явленій на основаніи теоретическихъ соображеній, я разсмотрю дѣятельность родоначальника небесной механики Kepler'а. Вся дѣятельность Kepler'а состояла въ поискахъ математическихъ законовъ природы, въ обязательное существованіе которыхъ онъ вѣрилъ. Полемъ его изысканій была астрономія. Мы видѣли уже, въ чемъ состоитъ великое открытіе Kepler'а. Изучая таблицы движенія планеты Марсъ, составленныя его предшественникомъ Tycho Brahe, онъ замѣтилъ, что планета двигается по эллипсу, въ фокусѣ котораго стоитъ солнце. Желая подвести цифры таблицы подъ простую зависимость, Kepler провѣрилъ рядъ гипотезъ; такъ напримѣръ, онъ пробовалъ предположить движеніе круговымъ, причемъ солнце не находится въ центрѣ. Если принять въ соображеніе, что Kepler не располагалъ современной тригонометріей и, что еще болѣе важно, долженъ былъ всѣ выкладки производить безъ логариѳмовъ, которыхъ тогда еще не было, то придется изумляться энергіи, съ которой онъ произвелъ массу громадныхъ и утомительныхъ вычисленій. Эту энергію можно объяснить лишь вѣрою въ существованіе математическихъ законовъ мірозданія.

Приступимъ теперь къ разсмотрѣнію ряда научныхъ предсказаній. Какъ первый примѣръ, возьмемъ электромагнитную теорію свѣта Maxwell'я. Изучая теорію электромагнитныхъ явленій, положивъ на математическій языкъ дифференціальныхъ уравненій основные принципы Faraday'я, Maxwell замѣтилъ аналогію между математической теоріей электричества и таковою же теоріей свѣта. Аналогія двухъ математическихъ схемъ дала ему вѣру въ необходимость существованія связи самихъ изучаемыхъ явленій природы. Онъ высказалъ теорему, что свѣтъ и электричество явленія одной и той же природы и отличаются другъ отъ друга лишь количественно, а не качественно. Это было высказано въ 1862 году, а въ 1888 году, т. е. черезъ двадцатьшесть лѣтъ, вѣра Maxwell'я блистательно подтвердилась опытами Hertz'a.

Какъ второй примѣръ, возьмемъ открытіе новой планеты Нептунъ путемъ выкладокъ небесной механики. Астрономъ Leverrier, изучая движеніе планеты Уранъ, замѣтилъ, что наблюдаемое движеніе планеты Уранъ отличается отъ того движенія этой планеты, которое получается изъ выкладокъ небесной механики, если принять въ разсчетъ дѣйствіе всѣхъ планетъ. Leverrier дѣлаетъ гипотезу о томъ, что несогласіе теоріи съ опытомъ происходитъ отъ дѣйствія на Уранъ еще одной большой неизвѣстной намъ планеты. Сдѣлавъ эту гипотезу, Leverrier пытался подобрать орбиту этой новой планеты такимъ образомъ, чтобы дѣйствіе ея на Уранъ давало какъ разъ тѣ уклоненія теоріи съ наблюденіями, которыя имѣли мѣсто. Эта гипотеза увѣнчалась блистательнымъ успѣхомъ: Leverrier указалъ мѣсто на небѣ новой планеты, и, дѣйствительно, на этомъ мѣстѣ была найдена планета Нептунъ.

Какъ третій примѣръ, возьмемъ нахожденіе конической рефракціи въ кристаллахъ. Англійскій математикъ Hamilton изобрѣлъ новую алгебру, относящуюся къ символамъ, названнымъ имъ кватерніонами (§ 26 гл. I). Изъ этой алгебры въ примѣненіи ея къ геометрической оптикѣ онъ пришелъ къ убѣжденію въ существованіи въ кристаллахъ нѣкотораго направленія, въ которомъ лучъ свѣта преломляется въ цѣлый коническій пучекъ лучей, такъ что, если смотрѣть черезъ кристаллъ въ указанномъ направленіи на свѣтящуюся точку, то эта точка расплывается въ круговое свѣтящееся кольцо, внутри котораго находится темный кружекъ. Наблюденіе подтвердило мысль Hamilton'а. Какъ четвертый примѣръ, укажемъ на открытіе новыхъ химическихъ элементовъ, предсказанныхъ періодической схемой Менделѣева. И, наконецъ, какъ пятый примѣръ, укажемъ на открытіе радія путемъ планомѣрныхъ, веденныхъ по указаніямъ теоріи, опытныхъ изслѣдованій.

Поставимъ себѣ вопросъ: чего именно требуетъ практика отъ математики? Какія математическія задачи, какіе методы имѣютъ болѣе значенія, какія менѣе? Исторія науки приводитъ насъ къ убѣжденію въ невозможности характеризовать въ немногихъ словахъ разнообразіе пріемовъ математическаго изслѣдованія при изученіи явленій природы. Въ самомъ дѣлѣ, сравнимъ примѣры Leverrier и Maxwell'я. Leverrier хорошій астрономъ математикъ, прекрасно знавшій вычисленія, рѣшающія задачи небесной механики; его открытіе требовало тонкихъ детальныхъ вычисленій. Не то мы видимъ на примѣрѣ Maxwell'я. Maxwell не былъ вовсе калькуляторомъ. Свое открытіе онъ сдѣлалъ, не рѣшая на самомъ дѣлѣ дифференціальныхъ уравненій, а лишь сравнивая внѣшній видъ формулъ электричества и свѣта. Если Leverrier производилъ точныя выкладки, то Maxwell обращалъ вниманіе на нѣчто совсѣмъ другое, а именно, на аналогію между математическими теоріями. Итакъ, нѣтъ возможности сказать напередъ, что именно изъ математическаго анализа потребуютъ для своихъ работъ будущіе натуръ-философы. Конечно, предоминирующее значеніе въ приложеніяхъ будетъ, вѣроятно, по прежнему имѣть аналитическая механика, основанная на дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіяхъ.

Обращаемся теперь къ вопросу обратному, что даетъ для чистой математики прикладная наука. Значеніе приложеній для прогресса чистой математики по моему мнѣнію настолько важно, что я не берусь отвѣчать на вопросъ, что имѣетъ болѣе важное значеніе: математика для приложеній, или приложенія для математики. Мы не погрѣшимъ, если скажемъ, что развитіе математики совершалось подъ постояннымъ вліяніемъ приложеній. Эти приложенія были какъ теоретическія, въ натуральной философіи, такъ и практическія, въ техникѣ и вообще въ обыденной жизни. Несомнѣнно, что если бы не было Kepler'а, то все, что сдѣлано Newton'омъ, могло бы явиться, быть можетъ, гораздо позднѣе, и, быть можетъ, мы до сихъ поръ не имѣли бы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Эти исчисленія могли бы явиться подъ вліяніемъ другихъ приложеній, и, вообще, исторія математики могла бы имѣть совершенно другое теченіе. Я приведу слова, которыя любилъ говорить въ частной бесѣдѣ нашъ знаменитый математикъ П. Л. Чебышевъ. Онъ говорилъ: „Въ старину задавали математическія задачи боги, какъ напримѣръ удвоеніе куба, по поводу измѣненія размѣровъ Дельфійскаго жертвенника. Далѣе наступилъ второй періодъ, когда задачи задавали полубоги: Newton, Euler, Lagrange. Теперь третій періодъ, когда задачи задаетъ практика". Я эти слова считаю вполнѣ справедливыми съ тою лишь разницей, что по моему мнѣнію существовалъ всегда только третій періодъ. Я бы позволилъ себѣ характеризовать значеніе приложеній для математики въ слѣдующихъ словахъ.

Умъ человѣческій склоненъ къ извѣстной рутинѣ. Привычка мыслить въ извѣстномъ направленіи часто бываетъ настолько велика, что громадныхъ трудовъ стоитъ вступить на новые пути изслѣдованія. Въ этомъ отношеніи окружающій міръ съ его безконечнымъ разнообразіемъ явленій оказываетъ неоцѣненныя услуги. Окружающая жизнь такъ разнообразна, такъ богата, что не можетъ быть уложена въ рамки какой нибудь рутинной теоріи. Эта жизнь не даетъ покоя уму. Она будитъ его и направляетъ его насильно въ новыя области, ставитъ новыя математическія задачи, и, что еще важнѣе, даетъ возможность находить новые методы изслѣдованія. Практика при постановкѣ новой математической задачи даетъ всегда данныя для догадокъ объ искомомъ ея рѣшеніи. Мы знаемъ, напримѣръ, какъ часто помогаютъ геометрическія соображенія при рѣшеніи алгебраическихъ задачъ. Еще болѣе разнобразна помощь, которую могутъ дать естественныя науки; по этому аналитикъ съ удовольствіемъ привѣтствуетъ всякое новое приложеніе математическаго анализа на практикѣ, ибо онъ ожидаетъ отъ такихъ новыхъ приложеній возможности новыхъ плодотворныхъ догадокъ относительно рѣшенія затрудняющихъ его задачъ. Профессоръ Klein въ одной изъ работъ, относящихся къ Riemann'овой теоріи алгебраическихъ функцій, примѣняетъ теорію электричества, черезъ что получаетъ большую наглядность въ этой отвлеченной теоріи. Эта статья Klein'a вызвала ироническія замѣчанія, что вѣкъ электричества наложилъ свой отпечатокъ и на математику: хотятъ прилагать электричество къ рѣшенію математическихъ задачъ.

Какъ бы то ни было, а фактъ тотъ, что цѣлый рядъ весьма важныхъ математическихъ теорій создался подъ вліяніемъ приложеній.

Итакъ, наша мысль резюмируется въ томъ что математикъ, натуралистъ и техникъ должны идти рука объ руку. Каждый изъ нихъ нуждается въ помощи другого. Только совмѣстная ихъ работа можетъ быть успѣшна и дать нужные плоды. Приступающій къ изученію натуральной философіи долженъ отбросить иллюзіи и помнить, что путь, который необходимо пройти, безконечно далекъ. Природа ревниво скрываетъ свои тайны и человѣку стоитъ громадныхъ усилій и потери времени каждый шагъ впередъ въ этой области. Несомнѣнно что этапы движенія впередъ натуральной философіи будутъ измѣряться столѣтіями, если не тысячелѣтіями.

Въ особенности изучающіе чистую математику не должны терять энергіи и вѣры въ высокое значеніе ихъ науки. Ихъ не должна оставлять вѣра въ существованіе заложенныхъ въ нѣдрахъ ихъ разума качествъ, дающихъ возможность возноситься духомъ все выше и выше въ Безконечность.

Не даромъ сказалъ поэтъ:
os homini sublime dedit coelumque tueri.

Указатель именъ.

(Цифры обозначаютъ страницы).

Указатель предметовъ.

(Цифры обозначаютъ страницы).

Отъ Кіевскаго Коммерческаго Института.

Кіевскій Коммерческій Институтъ объявляетъ конкурсъ на вакантную должность преподавателя спеціальныхъ отдѣловъ бухгалтеріи (сельско-хозяйственнаго, фабрично-заводского и банковаго) на слѣдующихъ условіяхъ: при 16—18 недѣльныхъ часахъ (теоретическихъ и практическихъ), при годовомъ вознагражденіи въ размѣрѣ около 2000 руб.

Въ конкурсѣ могутъ принять участіе лица съ высшимъ образованіемъ и—имѣющія свидѣтельство Министерства Торговли и Промышленности на право преподаванія бухгалтеріи въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ и, кромѣ того, заявившія себя практической дѣятельностью въ соотвѣтствующихъ учрежденіяхъ.

Примѣчаніе 1-е. Кандидатами допускаются и лица, не выдержавшія спеціальнаго испытанія при Министерствѣ, но обязующіяся выдержать таковое по назначеніи.

Примѣчаніе 2-е. Объявленіе настоящаго конкурса на одну должность не исключаетъ возможности раздѣленія преподаванія бухгалтеріи между двумя лицами:—теоретикомъ и практикомъ.

Для веденія практическихъ занятій допускаются лица и безъ высшаго образованія.

Заявленія о желаніи принять участіе въ конкурсѣ посылаются на имя Господина Директора Кіевскаго Коммерческаго Института. (Г. Кіевъ, Бибиковскій Бульваръ, д. № 24).

Къ заявленію прилагаются: а) краткое жизнеописаніе, б) научныя работы или, въ крайнемъ случаѣ, подробный и точный перечень ихъ.

Срокъ подачи заявленій до 1-го декабря 1911 года.

Директоръ Института
Профессоръ **М. В. Довнаръ-Запольскій.**

Деканъ коммерческаго отдѣленія
Профессоръ **П. Ѳ. Ерченко.**

Дополненіе къ Обозрѣнію преподаванія въ $19\frac{11}{12}$ г.

Группы Р. А. Берзина по нѣмецкому языку.

III а. (прошлогодняя V). Для поступленія въ эту группу нужно при помощи словаря оріентироваться въ любомъ, средней трудности текстѣ.

Прочесть предполагается въ первомъ полугодіи: „Изъ золотыхъ дней“ (Отрывки изъ автобіографіи Генриха Зейделя); во второмъ полугодіи: „Зависть“ (повѣсть Вильденбруха). Разговорная рѣчь на прочитанную тему.

III б. (прошлогодняя IV). Для поступленія въ эту группу нужно умѣть оріентироваться въ текстѣ повѣствовательнаго содержанія.

Читаться будетъ учебникъ Р. А. Берзина: Jugendgarten II томъ, содержащій этюды изъ географіи, жизни народа и исторіи нѣмецкой литературы. Разговорная рѣчь на эти темы.

IV а. (бывшая VII). Для поступленія въ эту группу нужно свободно читать и переводить всѣ 100 параграфовъ книги Р. А. Берзина: Jugendgarten I томъ.

Читаться будетъ II томъ того же учебника.

IV б. (бывшія VIII и IX группы). Для поступленія нужно знать этимологію въ объемѣ прохожденія на лекціяхъ въ упомянутыхъ группахъ, а читать и свободно переводить первые 40 параграфовъ книги: „Jugendgarten“ I томъ.

Читаться будетъ та же книга дальше.

V а. (для начинающихъ). Въ эту группу будутъ приниматься студенты, совсѣмъ не владѣющіе нѣмецкимъ языкомъ или знающіе его весьма слабо.

N. B. Письменныя работы будутъ состоять въ группахъ III á и III б въ переложеніи на лекціи статей или въ самостоятельномъ изложеніи какого-нибудь вопроса въ связи съ пройденнымъ на лекціи.

IV а и IV б переложеніе статей изъ учебника.

Р. А. Берзинъ.

Правила для записи, занятій и полученія зачетовъ у преподавателя А. А. Шовена.

1. У преподавателя А. А. Шовена организуется 4 группы:
   I. Старшая группа.
   II. А. (прошлогодняя 2-я).
   III. А. (прошлогодняя 5-я).
   IV. А. (прошлогодняя 8-я).
2. Максимумъ для каждой группы: — 80 человѣкъ.
3. Слушатели, не удовлетворившіе нижеуказанныя минимальныя требованія, къ зачету не допускаются.

I. Старшая группа.

При записи требуется владѣніе французскимъ языкомъ достаточное для 1) разговора
2) чтенія, перевода и письма безъ пособій
3) устнаго изложенія прочитаннаго.

Программа занятій.

1) Устные и письменные рефераты г.г. слушателей на темы, избранныя слушателями и одобренныя преподавателемъ.
2) Чтеніе газетъ и журналовъ.
3) Бесѣда преподавателя о развитіи культуры во Франціи.

Для полученія зачета требуется:

1) Одинъ письменный, другой устный рефератъ.

II. группа А.

При записи требуется знаніе языка въ полномъ объемѣ курса среднихъ учебныхъ заведеній.

1) Чтеніе и переводъ à livre ouvert статей изъ хрестоматіи: „La France" Lützelschwab
2) Этимологія и синтаксисъ (по любой грамматикѣ).

Программа занятій.

1) Чтеніе статей изъ „La France" (2 часа въ недѣлю) и устное переложеніе прочитаннаго.
2. Классныя письменныя переложенія статей (1 часъ въ недѣлю).

Необходимыя условія для допущенія къ зачету.

1) Сдача *половины* письменныхъ работъ.

2) Нѣсколько устныхъ отвѣтовъ въ теченіи семестра.

III группа А.

При записи требуется.

1) Чтеніе и переводъ легкихъ статей изъ Lützelschwab: „La France“.

2) Этимологія и элементарныя синтаксическія познанія.

Программа занятій.

1) Чтеніе и грамматическій разборъ статей изъ Lützelschwab: „La France“ (2 часа въ недѣлю).

2) Диктанты.

3) Классные устные и письменные отвѣты на вопросы

(2–3: 1 часъ въ недѣлю.)

Для допущенія къ зачету требуется сдача *половины* письменныхъ работъ.

IV. группа А.

Для записи требуется.

1) Чтеніе и переводъ „Morceaux de lecture“ (отъ I до X) изъ Русси I-я часть.

2) Элементарныя познанія по этимологіи (членъ, существительныя и прилагательныя, мѣстоименія: порядковыя и числительныя, être, avoir, правильныя спряженія: I и II temps simples).

Программа.

1) Чтеніе, переводъ и грамматическій разборъ статей изъ Неру и Делакуруа II-я часть (2 часа въ недѣлю).

2) Письменныя классныя работы (диктанты, отвѣты на вопросы, переложенія) – 1 часъ въ недѣлю.

3) Устныя упражненія (произношеніе, чтеніе, переложеніе).

Для допущенія къ зачету требуется сдача половины письменныхъ работъ и нѣсколько устныхъ отвѣтовъ.

А. А. Шовенъ.

Условія записи и программы группъ по нѣмецкому языку у преподавателя Э. А. Габермана.

I (старшая) группа.

Для записи нужно свободно владѣть нѣмецкимъ языкомъ, умѣть излагать прочитанное или услышанное письменно и устно, быть знакомымъ съ этимологіей и синтаксисомъ.

Число лекцій—3.

ПРОГРАММА. Двѣ лекціи—самостоятельные рефераты слушателей въ связи съ бесѣдами на нѣмецкомъ языкѣ на прочитанную тему. Бесѣды лектора со слушателями на тему. **„Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens im 19 Jahrhundert".**

Одна лекція—чтеніе газетъ, журналовъ или отдѣльныхъ статей.

Условія полученія зачета: 1) аккуратное посѣщеніе лекцій, особенно рефератовъ—и 2) представленіе въ теченіи семестра письменнаго реферата и чтеніе его во время лекціи на какую угодно тему; желательны темы изъ цикла экономическихъ, соціальныхъ или культурно-историческихъ наукъ.

II группа. А

Для записи требуется хорошее знаніе языка въ объемѣ гимназическаго курса и умѣнье бѣгло читать и самостоятельно разбираться въ текстѣ. Основы грамматики.

Число лекцій—3.

ПРОГРАММА: Двѣ лекціи—чтеніе, переводъ и объяснительный разборъ по вопросамъ отдѣльныхъ главъ книги: **„Deutsches Wirtschaftsleben" von Dr. Christian Gruber.**

Одна лекція—разговорная практика и письменныя упражненія.

Условія полученія зачета: 1) аккуратное посѣщеніе лекцій—и 2) сдача по крайней мѣрѣ 1/2 письменныхъ работъ.

I группа В.

Условія записи—какъ и въ группѣ А.

Число лекцій—3.

ПРОГРАММА. Двѣ лекціи—то же самое, что и въ группѣ А. Одна лекція—практическій курсъ нѣмецкой этимологіи съ упражненіями и примѣрами по учебнику: **„Deutsche Grammatik, I Teil: Etimologie" von N. Kuhlberg.**

группа С.

Условія записи какъ и въ группѣ А и В, но съ меньшими познаніями.

Число лекцій—3.

ПРОГРАММА. Двѣ лекціи—чтеніе, переводъ и объясненіе отдѣльныхъ статей изъ книги: **„Deutschland Ein deutsches Lesebuch von M. Blumenau. Ausgabe B".**

Одна лекція—практическій курсъ нѣмецкаго синтаксиса съ упражненіями и примѣрами по учебнику: **„Deutsche Grammatik, II Teil: Syntax" von N. Kuhlberg.**

Условія полученія зачета въ группахъ В и С тѣ же, что и въ группѣ А.

Желающіе изъ другихъ группъ могутъ прослушать практическій курсъ этимологіи (см. группу В), синтаксисъ (см. группу С) или могутъ принять участіе въ разговорномъ урокѣ (см. группу А.)

Лекторъ нѣмецкаго языка *Э. А. Габерманъ.*

ПРОГРАММЫ

для производства испытаній и для выдачи свидѣтельствъ на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности.

(Перепечатаны безъ измѣненія съ программъ, утвержденныхъ Господиномъ Министромъ Торговли и Промышленности 4 мая 1907 года и измѣненныхъ 26 мая 1909 г.)

ПРОГРАММА БУХГАЛТЕРІИ.

I. Общее счетоводство.

1) Предметъ счетоводства.

Необходимость учета цѣнностей и вытекающая отсюда необходимость записи хозяйственныхъ оборотовъ. Назначеніе книгъ. Отрасли счетоводства; опредѣленіе и классификація ихъ.

2) Общая теорія счета.

Основная форма хозяйственныхъ оборотовъ. Основные факторы хозяйственной дѣятельности. Капиталъ. Классификація цѣнностей. Трудъ. Вознагражденіе за чужой капиталъ и трудъ. Предпринимательская прибыль. Классификація хозяйственныхъ оборотовъ. Мѣна, какъ основная ихъ форма.

Согласованіе записи хозяйственныхъ оборотовъ съ присущимъ имъ признакомъ двойственности. Счета и ихъ подраздѣленіе. Общая схема счетовъ. Схемы вещественныхъ и личныхъ счетовъ. Названія лѣвыхъ и правыхъ страницъ. Основной законъ счетоводства. Сравненіе Дебета и Кредита.

Запись хозяйственныхъ оборотовъ. Натуральный обмѣнъ. Купля-продажа. Кредитныя сдѣлки. Депозитныя сдѣлки. Коммисіонныя сдѣлки. Перемѣщеніе цѣнностей. Видоизмѣненіе цѣнностей. Обороты по эксплоатаціи чужого труда, воплощающагося въ матеріальныхъ предметахъ. Обороты, приносящіе прибыль. Обороты, приносящіе убытокъ.

Вещественные счета. Количественный учетъ матеріальныхъ предметовъ. Необходимость переходныхъ (расцѣночныхъ) счетовъ. Классификація ихъ. Способы заготовокъ, сооруженія и производства. Запись ихъ въ счета.

Личные счета. Классификація личныхъ счетовъ. Счета хозяина. Измѣненіе предпринимательскаго капитала. Виды прибылей и убытковъ. Необходимость переходныхъ (результатныхъ) счетовъ. Валовая прибыль, чистая прибыль и дефицитъ. Счета постороннихъ хозяйствъ и ихъ классификація.

Заключеніе счетовъ. Оборотная вѣдомость, ея назначеніе и недостатки. Состояніе счетовъ, или балансъ. Спеціальныя статьи актива. Переходные счета въ балансахъ. Классификація счетовъ по отношенію къ балансу.

3) Общая теорія книгъ.

О книгахъ вообще. Опредѣленіе книгъ. Источники веденія ихъ. Классификація ихъ. Запись систематическая и хронологическая. Размѣщеніе различныхъ данныхъ по графамъ.

Основныя книги. Виды основныхъ книгъ. Ежедневный журналъ: журнальныя статьи и ихъ составныя части; переносы; отмѣтки на документахъ. Ежедневная главная книга; порядокъ веденія ея, отмѣтки о занесеніи статей въ главную книгу; переносы; Журналъ-Главная.

Вспомогательныя книги. Связь ихъ съ основными книгами. Необходимость ихъ. Классификація схемъ для вспомогательныхъ книгъ. Классификація вспомогательныхъ книгъ. Способы веденія вспомогательныхъ книгъ. Вліяніе вспомогательныхъ книгъ на веденіе основныхъ книгъ.

Заключеніе и открытіе книгъ. Два рода заключенія книгъ. Мѣсячное заключеніе книгъ; цѣль его; составныя его части, пріемы исканія ошибокъ; способы исправленія ошибокъ; отмѣтки о сдѣланныхъ исправленіяхъ; формальное заключеніе книгъ въ концѣ каждаго мѣсяца.

Годовое заключеніе книгъ; цѣль его; составныя его части; годовой отчетъ, цѣль и составныя его части, отчетные періоды; провѣрка документовъ и сдѣланныхъ на основаніи ихъ записей въ книгахъ. Общее, или генеральное заключеніе книгъ. Способы заключенія и открытія книгъ. Инвентарь.

Способы веденія книгъ. Понятіе о способахъ веденія книгъ. Классификація ихъ. Понятіе о такъ называемыхъ „системахъ счетоводства". Лука Пачіоло и его значеніе.

4) Формы хозяйствъ и ихъ вліяніе на счетоводство.

Значеніе формы хозяйства. Классификація хозяйствъ.

Предпріятія единоличныя. Значеніе счетоводства въ единоличныхъ предпріятіяхъ. Учетъ капитала. Учетъ торговыхъ и домашнихъ расходовъ. Учетъ прибылей и убытковъ и распредѣленіе ихъ по двумъ смежнымъ отчетнымъ періодамъ. Учетъ дефицита. Время составленія отчета. Послѣдовательный порядокъ закрытія счетовъ. Разборъ счетовъ и оборотовъ.

Товарищества полныя. Понятіе о нихъ. Способы внесенія капиталовъ и зависящіе отъ нихъ способы распредѣленія прибылей и убытковъ. Учетъ капитала. Учетъ торговыхъ и домашнихъ расходовъ. Учетъ прибылей и убытковъ и распредѣленіе ихъ по двумъ смежнымъ отчетнымъ періодамъ. Учетъ окончательнаго результата отъ дѣятельности предпріятія. Время составленія отчета. Послѣдовательный порядокъ закрытія счетовъ. Разборъ счетовъ и оборотовъ.

Товарищества на вѣрѣ. Понятіе о нихъ. Учетъ капиталовъ и вкладовъ.

Акціонерныя общества и товарищества на паяхъ. Понятіе о нихъ; учрежденіе, управленіе дѣлами, прекращеніе дѣйствій. Учетъ акціонернаго капитала. Превращеніе уже существующаго предпріятія въ акціонерное. Учетъ облигаціоннаго капитала. Учетъ процентовъ по облигаціямъ. Учетъ результата отъ дѣятельности акціонернаго общества. Учетъ гербоваго сбора по акціямъ, паямъ и облигаціямъ. Учетъ основного капитала въ предпріятіяхъ, безвозмездно переходящихъ по истеченіи опредѣленныхъ сроковъ къ государству или общественному управленію. Учетъ гарантіи или субсидіи, даруемыхъ давшими концессію учрежденіями. Распредѣленіе прибылей и убытковъ по двумъ смежнымъ періодамъ. Разборъ счетовъ и оборотовъ.

Кредитныя общества, основанныя на началахъ взаимности, или круговаго ручательства. Понятіе о нихъ.

Общества взаимнаго кредита. Понятіе о нихъ; учрежденіе, управленіе дѣлами, прекращеніе дѣйствій. Учетъ капитала, обезпеченія и оборотнаго капитала. Учетъ прибылей и убытковъ. Разборъ счетовъ и оборотовъ.

Земельные банки. Понятіе о земельныхъ банкахъ съ круговымъ ручательствомъ. Особенности уставовъ нѣкоторыхъ земельныхъ банковъ, принимаемыхъ за образецъ при учрежденіи новыхъ банковъ.

Городскія кредитныя общества. Понятіе о нихъ. Особенности ихъ уставовъ.

Артели. Понятіе о нихъ, управленіе дѣлами, прекращеніе дѣйствій. Учетъ вкупа. Учетъ капитала обезпеченія. Учетъ дувана. Учетъ вывода. Артельныя книги. Учетъ капиталовъ, прибылей и убытковъ по новѣйшимъ уставамъ. Разборъ счетовъ и оборотовъ.

Потребительныя хозяйства. Основное отличительное свойство ихъ. Смѣты и ихъ значеніе въ разныхъ хозяйствахъ. Отчеты по смѣтамъ. Классификація потребительныхъ хозяйствъ и ея значеніе по отношенію къ смѣтамъ. Учетъ капиталовъ. Учетъ доходовъ и расходовъ. Учетъ заимствованій изъ спеціальныхъ капиталовъ. Учетъ займовъ. Учетъ сооруженій, остающихся на балансѣ. Разборъ счетовъ и оборотовъ. Учрежденія, состоящія при потребительныхъ хозяйствахъ; ихъ счетоводство и отчетность.

II. Торговое счетоводство.

Понятіе о торговлѣ. Классификація торговли. Организація счетоводства: общій строй книгъ, порядокъ веденія ихъ, разработка и храненіе документовъ.

Кассовая книга; кассовые ордера; ревизія кассы.

Книга движимаго имущества; два способа погашенія стоимости движимаго имущества.

Товарная книга; товарныя цѣны и способы назначенія ихъ; заказъ товаровъ и исполненіе заказовъ; скидки, пожарные убытки; аваріи. Амбарныя книги.

Книги личныхъ счетовъ, разсчетовъ съ покупателями, продавцами, подрядчиками, поставщиками, служащими, подотчетными и другими лицами. Неблагонадежные должники.

Книга недвижимаго имущества; погашеніе стоимости недвижимаго имущества; эксплоатація недвижимаго имущества.

Книга прибылей и убытковъ; накладные расходы; расходы, подлежащіе возврату; проценты; комиссія; торговые расходы; прибыли и убытки будущаго года.

Торговля оптовая, розничная и мелочная; разные способы вывода результата.

Торговля мѣстная и иногородняя; провозъ товаровъ; путевые документы.

Торговля внутренняя и внѣшняя; разсчеты въ иностранной валютѣ; таможенная пошлина; экспедиторы; особыя преимущества при вывозѣ нѣкоторыхъ товаровъ за границу.

Торговля непосредственная и черезъ посредство третьихъ лицъ; главная контора и отдѣленія; способы врученія покупателю товара и связанные съ ними способы разсчета.

Торговля за собственный счетъ, комиссіонная и въ дѣлѣ съ другими лицами; способы разсчета; контокорренты.

Промысловый налогъ; вычисленіе его и запись по книгамъ.

III. Сношенія съ банками.

Вкладная операція; текущій счетъ; вклады срочные и безсрочные.

Векселя и ихъ подраздѣленіе; участники при составленіи простыхъ и переводныхъ векселей; акцептъ; передача векселей; мѣсто платежа; сроки платежа; векселя въ иностранной валютѣ; образцы переводныхъ векселей; покупательскіе и банкирскіе векселя; вексельный гербовый сборъ.

Вексельныя операціи: учетныя, комиссіонныя и депозитныя.

Переводы и аккредитивы; способы перевода денегъ.

Подраздѣленіе процентныхъ бумагъ; купля-продажа процентныхъ бумагъ; порученія на покупку и продажу процентныхъ бумагъ; перемѣщенія процентныхъ бумагъ; страхованіе билетовъ выигрышныхъ займовъ.

Ссуды подъ процентныя бумаги на опредѣленные сроки и до востребованія.

Порученія на покупку, продажу и пріемку товаровъ.

Ссуды подъ товары въ частныхъ складахъ, элеваторахъ, общественныхъ зернохранилищахъ и въ пути; завозные склады.

Вклады на храненіе.

Ссуды подъ недвижимости.

IV. Учетъ производства.

Главныя основанія учета матеріаловъ, инструментовъ, машинъ, рабочей силы и расходовъ общихъ и спеціальныхъ; опредѣленіе цѣнъ фабрикатовъ и полуфабрикатовъ.

Примѣчаніе. 1. По исторіи и литературѣ счетоводства отъ экзаменующагося требуется знакомство съ развитіемъ счетоводства по наиболѣе извѣстнымъ литературнымъ произведеніямъ, а также знакомство съ наиболѣе употребительными руководствами.

Примѣчаніе 2. Отъ экзаменующагося требуется разборъ балансовъ и отчетовъ, печатаемыхъ въ Вѣстникѣ Финансовъ, Промышленности и Торговли.

Руководства:

Е. Е. Сиверсъ. Общее счетоводство.

Его-же. Торговое счетоводство и сношенія съ банками.

Его-же. Организація банковаго счетоводства (литогр.).

А. В. Прокофьевъ. Курсъ двойной бухгалтеріи.

Ф. Скубицъ. Самоучитель двойной бухгалтеріи.

А. Гуляевъ. Курсъ фабрично-заводскаго счетоводства.

Пособія:

Журналъ „Счетоводство", подъ редакціей А. М. Вольфа.

Вальденбергъ. Лука Пачіоло. Трактатъ о счетахъ и записяхъ.

Л. А. Рафаловичъ. Акціонерные коммерческіе банки. Ихъ балансы и ихъ операціи.

Е. Е. Сиверсъ. Задачникъ къ общему счетоводству.

Его-же. Задачникъ къ торговому счетоводству и сношеніямъ съ банками.

ПРОГРАММА КОММЕРЧЕСКОЙ КОРРЕСПОНДЕНЦІИ.

Цѣль коммерческой корреспонденціи. Особенности ея. Стиль. Расположеніе коммерческаго письма. Его составныя части. Приложенія.

Храненіе писемъ. Копированіе писемъ въ книгахъ и на отдѣльныхъ листахъ.

Составленіе телеграммъ.

Входящій и исходящій журналы. Адресная книга. Разсыльная книга. Книга почтовыхъ и телеграфныхъ расходовъ.

Составленіе писемъ: циркулярныхъ, освѣдомительныхъ, рекомендательныхъ и препроводительныхъ.

Составленіе писемъ по товарнымъ операціямъ; предложеніе товаровъ, заказъ товаровъ, отсылка и полученіе товаровъ.

Составленіе писемъ съ увѣдомленіемъ о полученіи и отсылкѣ процентныхъ бумагъ и иныхъ цѣнностей.

Составленіе писемъ по комиссіоннымъ депозитнымъ и экспедиціоннымъ операціямъ.

Составленіе писемъ по вексельнымъ операціямъ и по конто-коррентнымъ сношеніямъ.

Руководство.

М. В. Кечеджи-Шаповаловъ. Руководство по коммерческой корреспонденціи.

ПРОГРАММА КОММЕРЧЕСКОЙ АРИѲМЕТИКИ *).

Сокращенныя и приближенныя вычисленія.

* Метрологія русская, метрическая и англійская. Способы перевода однѣхъ мѣръ въ другія при помощи цѣпного правила.

* Понятіе о процентѣ. Процентная такса. Нахожденіе даннаго числа процентовъ способомъ разложенія таксы на кратныя части. Нахожденіе интересовъ съ капиталовъ за данное число лѣтъ, мѣсяцевъ и дней. Процентное число, или номеръ. Постоянный дѣлитель данной таксы. Формула полученія интересовъ. Нахожденіе ихъ разложеніемъ числа дней и капитала.

* Опредѣленіе капитала, времени и процентной таксы.

* Проценты со ста, на сто и во сто.

* Пропорціональный раздѣлъ суммъ.

* Проба драгоцѣнныхъ металловъ. Различныя системы пробы: русская, метрическая и англійская. Повышеніе и пониженіе пробы.

* Понятіе о векселѣ. Векселя простые и переводные. Терминологія участниковъ и векселя во второмъ случаѣ. Нахожденіе срока векселя въ зависимости отъ условія заданія. Передача векселя. Протестъ векселя. Учетъ одного и нѣсколькихъ векселей.

Опредѣленіе среднихъ величинъ. Средній срокъ и средняя процентная такса.

* Процентныя бумаги: паи, акціи и облигаціи. Курсъ процентныхъ бумагъ. Номинальная и курсовая стоимость ихъ. Купонъ и дивидентъ. Вычисленіе стоимости процентныхъ бумагъ съ текущими купонами и безъ нихъ.

* Веденіе и заключеніе процентныхъ текущихъ счетовъ (контокорренты). Прогрессивный, регрессивный и гамбургскій. Случаи начисленія интересовъ по разнымъ таксамъ на сальдо дебета и кредита. Измѣненіе процентной таксы въ теченіе контокоррентнаго

---

*) Статьи, обозначенныя *, составляютъ программу коммерческой ариѳметики, какъ предмета вспомогательнаго, для экзаменующихся по бухгалтеріи и коммерческой корреспонденціи.

періода. Красные процентные номера. Комиссія, телеграфные, почтовые и мелкіе расходы.

* Вклады и ссуды. Текущіе счета: простой, условный и спеціальный (онкольный).

* Товарныя вычисленія. Опредѣленіе вѣса товара. Различные виды тары. Сдѣлки съ вѣса. Вычисленія стоимости товара. Скидки съ цѣны. Расходы при покупкѣ, продажѣ и перевозкѣ товара. Счетъ, фактура. Накладная и дубликатъ. Коносаментъ, чертепартій. Полисъ. Знакомство съ желѣзнодорожными тарифами.

* Калькуляціи: простая и сложная. Вычисленіе покупной, продажной и своей цѣны.

Монетныя вычисленія. Монетная стопа. Ремедіумъ въ пробѣ и вѣсѣ монеты. Вычисленіе монетныхъ паритетовъ. Понятіе о вычисленіи золотыхъ точекъ. Значеніе ихъ въ опредѣленіи границъ колебанія вексельнаго курса.

* Вексельный курсъ, биржевой бюллетень. Учетный процентъ. Перемѣна курсовъ долгосрочныхъ въ краткосрочные и обратно. Опредѣленіе стоимости девизы, когда срокъ ея совпадаетъ со срокомъ курса и когда отъ него отличается.

Способы обозначенія вексельныхъ курсовъ на главнѣйшихъ европейскихъ биржахъ. Знакомство съ общепринятыми способами разсчета при внѣшней торговлѣ.

Калькуляція на заграничные товары. Пошлина. Таможенный тарифъ.

Торговля драгоцѣнными металлами и иностранной монетой. Обозначеніе цѣнъ на то и другое у насъ и на главнѣйшихъ европейскихъ рынкахъ.

Торговля русскими процентными бумагами на иностранныхъ биржахъ. Способы установки курсовъ на нихъ. Постоянный денежный курсъ.

Нахожденіе перемѣнныхъ паритетовъ въ товарныхъ, вексельныхъ, курсовыхъ и фондовыхъ вычисленіяхъ.

Понятіе объ арбитражѣ. Рѣшеніе вопросовъ, относящихся къ товарному, вексельному и фондовому арбитражамъ.

Вычисленіе стоимости хлѣба въ зернѣ. Различные способы выраженія натуръ. Переходы отъ одной натуры къ другой. Постоянное число (ключъ). Фрахтъ на зерновые продукты. Вычисленіе фрахта.

Опредѣленіе предѣльнаго курса (лимита) при заказахъ и предложеніяхъ.

Аварія. Различные виды ея. Вычисленіе диспаши аваріи.

Сложные проценты. Рента: различные виды ея. Долгосрочные займы. Различные способы погашенія займовъ. Составленіе плана погашенія при прогрессивномъ способѣ.

Понятіе о страхованіи капитала и ренты. Страхованіе жизни. Вѣроятная и средняя жизнь. Различные виды страхованія жизни.

Руководства:

Н. Лунскій. Коммерческая ариѳметика для среднихъ коммерческихъ учебныхъ заведеній.

П. Гончаровъ. Коммерческая ариѳметика.

Теоринъ. Курсъ коммерческой ариѳметики.

Е. Сиверсъ. Корреспондентскіе счета.

Н. Лунскій. Политическая ариѳметика.

А. Н. Глаголевъ. Элементарная теорія долгосрочныхъ обязательствъ.

Пособія:

Беркевичъ. Коммерческая ариѳметика.

Прокофьевъ. Коммерческая ариѳметика.

Brasiler. Traité d'Arithmetique commerciale.

Савичъ. Элементарная теорія страхованія жизни и трудоспособности.

Cantor. Politische Arithmetik.

Holzinger. Lehrbuch zum politische Arithmetik.

Кауфманъ. Основанія разсчетовъ по публичнымъ займамъ, государственнымъ, городскимъ, желѣзнодорожнымъ, ипотечнымъ и т. п.

Временникъ Центр. Стат. Комит. М-ва Внутр. Дѣлъ за 1891 г. № 21.

Малешевскій. Теорія и практика пенсіонныхъ кассъ.

ПРОГРАММА ГЕОГРАФІИ.

Коммерческая географія *).

Введеніе.

Опредѣленіе и содержаніе коммерческой географіи. Источники для изученія хозяйственной статистики Россіи.

*) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія коммерческой географіи въ коммерческихъ училищахъ и торговыхъ школахъ.

А. I. Россійская Имперія.

Границы. Пространство. Административныя дѣленія Россіи. Основанія дѣленія Россіи на естественно-историческія и культурно-историческія области.

Климатъ и почва Россійской Имперіи; ихъ характеристика и значеніе для земледѣлія.

Населеніе. Прежніе способы регистраціи; количество населенія по переписи 1897 г., плотность; населеніе городское и сельское; распредѣленіе населенія по полу и по возрасту; естественное движеніе—рождаемость и смертность; естественный приростъ населенія. Переселенія; ихъ причина, размѣры и результаты.

Землевладѣніе. Характеристика главныхъ группъ землевладѣнія; земли казенныя, крестьянскія и частныя. Аренды и ихъ значеніе въ крестьянскомъ хозяйствѣ.

Распредѣленіе земель по угодьямъ—раіоны преобладанія того или другого вида угодій.

II. Добывающая промышленность.

Значеніе добывающей промышленности въ хозяйственной жизни Россіи.

Земледѣліе. Главнѣйшія системы русскаго земледѣлія и ихъ географическое распространеніе; современное положеніе русскаго земледѣлія въ отношеніи техники, урожайности, рода воздѣлываемыхъ растеній и общаго количества сбора; средній ежегодный сборъ; раіонъ распространенія и значеніе главныхъ хлѣбовъ въ русскомъ сельскомъ хозяйствѣ; отношеніе производства хлѣба къ потребленію.

Разведеніе льна и конопли, хлопководство, садоводство, плодоводство и огородничество. Виноградарство и винодѣліе. Разведеніе другихъ растеній (свекловицы, табаку и проч.). *Шелководство.*

Лѣсоводство.

Скотоводство; рогатый скотъ, коневодство, овцеводство и свиноводство.

Птицеводство. Пчеловодство. Рыболовство и звѣроловство.

Горнозаводская промышленность. Общая характеристика современнаго состоянія; мѣсторожденія; размѣры и условія добычи драгоцѣнныхъ металловъ, чугуна, желѣза и стали, каменнаго угля, нефти, соли и другихъ ископаемыхъ.

I. Обрабатывающая промышленность.

Обрабатывающая промышленность. Характеристика и размѣры ея нынѣшняго положенія и значеніе ея въ хозяйственной жизни Россіи; причины, послужившія основаніемъ ея развитія; распредѣленіе ея по раіонамъ и по роду обрабатываемыхъ продуктовъ.

Отдѣльные виды обрабатывающей промышленности; обработка волокнистыхъ веществъ, питательныхъ веществъ, металловъ, животныхъ продуктовъ и пр.

Кустарная промышленность — виды ея; раіоны распространенія; характеристика современнаго состоянія; мѣры къ поднятію кустарной промышленности.

Отхожіе промыслы — раіоны распространенія и характеристика современнаго положенія.

IV. Пути и средства сообщенія.

Значеніе путей сообщенія для торговли вообще. Природныя свойства и экономическое значеніе международныхъ водныхъ путей сообщенія—океановъ: Атлантическаго, Великаго, Индійскаго и Сѣвернаго Ледовитаго.

Суэцкій каналъ.

Русскія моря, ихъ природа и экономическое значеніе.

Средства сообщенія по внѣшнимъ водянымъ путямъ; характеристика нынѣшняго и прежняго состоянія; міровой флотъ, русскій морской торговый флотъ и каботажъ. Главнѣйшія пароходныя линіи по океанамъ и морямъ.

Русскія гавани — природныя свойства и экономическое ихъ значеніе.

Внутренніе водные пути сообщенія — ихъ экономическое значеніе: характеристика русскихъ рѣкъ, какъ путей сообщенія; главнѣйшіе каналы въ Россіи; русскій рѣчной флотъ.

Внутренніе сухопутные пути сообщенія: а) грунтовыя и шоссейныя дороги; б) желѣзныя дороги—значеніе желѣзныхъ дорогъ вообще; способы постройки и эксплоатаціи; міровая сѣть;

русская желѣзнодорожная сѣть (протяженіе и распредѣленіе, подвижной составъ, работа и основанія нынѣшней системы тарифовъ).

Почта и телеграфъ.

V. Торговля Россіи.

Внутренняя торговля Россіи—общая характеристика; виды и размѣры внутренней торговли. Ярмарочные раіоны и главныя въ нихъ ярмарки. Распредѣленіе торговыхъ предпріятій по видамъ и по раіонамъ. Отдѣльные виды постоянной внутренней торговли: торговля хлѣбомъ, торговля льномъ и пенькой; торговля мануфактурными товарами; торговля спиртными напитками и пр.; кредитныя и страховыя учрежденія.

Внѣшняя торговля Россіи—общая характеристика; таможенные тарифы; распредѣленіе русской внѣшней торговли по границамъ; предметы вывоза и привоза; государства, съ которыми торгуетъ Россія, и главные предметы обмѣна съ ними.

VI. Экономическій обзоръ Финляндіи, Кавказа, Туркестана и Сибири.

Главные виды и размѣры добывающей и обрабатывающей промышленности и торговли; главные торгово-промышленные центры.

Б. Экономическій обзоръ главнѣйшихъ гусударствъ Азіи, Америки, Африки и Австраліи.

Главные виды и размѣры добывающей и обрабатывающей промышленности и торговли: торгово-промышленные центры и порты. Современная колоніальная политика европейскихъ государствъ и значеніе внѣевропейскихъ странъ для всемірной торговли.

В. Экономическій обзоръ отдѣльныхъ государствъ Европы.

Главные виды и размѣры добывающей и обрабатывающей промышленности и торговли; торгово-промышленные центры и порты.

Примѣчаніе. При обозрѣніи отдѣльныхъ отраслей хозяйствъ Россіи должно указывать благопріятныя и неблагопріятныя стороны современнаго положенія и, сопоставляя съ прошлымъ, выяснять, какія отрасли падаютъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ требуется указывать мѣста наибольшаго развитія той или другой отрасли, давать статистическія данныя въ круглыхъ цифрахъ и дѣлать сравненіе съ главными государствами Европы и Соединенными Штатами.

Кромѣ того, требуется знакомство съ учебниками и пособіями, которые могутъ быть употребляемы при преподаваніи коммерческой географіи.

ОБЩАЯ ГЕОГРАФІЯ *).

I.

Положеніе земли въ мірозданіи. Солнечная система. Солнце, планеты и кометы. Движеніе земли. Фигура и величина земли. Географическія координаты. Главнѣйшія картографическія проекціи.

Распредѣленіе воды и суши на земной поверхности. Неизслѣдованныя области. Географическія гомологіи. Общее распредѣленіе горъ, плоскогорій и низменностей. Распредѣленіе глубинъ въ океанахъ.

Атмосфера. Составъ ея. Температура воздуха по мѣрѣ поднятія вверхъ. Суточное и годовое колебаніе температуры (въ зависимости отъ близости моря, временъ года, вѣтровъ, облачности и присутствія лѣса). Годовой ходъ температуры на сушѣ и на морѣ. Главнѣйшія годовыя, январскія и іюльскія изотермы.

Общія понятія о воздушномъ давленіи. Вѣтры. Происхожденіе ихъ, направленіе и сила. Пассаты и муссоны. Вихри и ураганы. Циклоны и антициклоны. Дѣйствіе вѣтра на поверхность суши: лессовыя области, песчаныя и каменистыя пустыни, барханы и дюны.

Влажность воздуха: абсолютная и относительная. Роса, иней, туманъ, облака, дождь, снѣгъ, градъ. Гроза. Распредѣленіе осадковъ на земной поверхности.

Ледники. Происхожденіе и формы ледниковъ. Движеніе ледниковъ, ихъ дѣятельность и географическое распространеніе.

---

*) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія коммерческой географіи въ коммерческихъ училищахъ.

Рѣки. Части рѣки. Бассейнъ и система рѣки. Водораздѣлы. Образованіе долинъ. Измѣненія русла. Образованіе дельтъ. Лиманы. Озера. Распространеніе озеръ, величина и высота ихъ. Содержаніе соли въ озерахъ. Происхожденіе и исчезновеніе озеръ.

Свойства воды въ океанахъ и моряхъ. Замерзаніе океановъ и морей. Происхожденіе плавучихъ льдовъ и области ихъ распространенія. Морскія волны. Приливы и отливы. Морскія теченія и ихъ значеніе.

Работа моря вдоль береговъ (разрушительная и созидательная). Отложенія прибрежныя и глубоководныя. Типы морскихъ береговъ. Поднятіе и опусканіе морскихъ береговъ. Типы острововъ.

Типы горныхъ породъ, составляющихъ сушу, и ихъ происхожденіе. Образованіе горныхъ складокъ. Землетрясенія. Вулканы, ихъ формы и строеніе; процессъ и продукты изверженія. Географическое распространеніе вулкановъ и землетрясеній. Внутренняя теплота земли. Образованіе почвъ. Главные виды почвъ.

Растительный и животный міръ. Зависимость распространенія растеній и животныхъ отъ климатическихъ условій. Растительныя формаціи: тропическіе лѣса, степи, пустыни, подтропическіе лѣса, лѣса умѣреннаго пояса, тундры; горная флора. Области распространенія важнѣйшихъ растеній и животныхъ.

Человѣчество. Число и распредѣленіе людей на земномъ шарѣ. Основанія классификаціи человѣческаго рода. Характеристики типовъ: негра, монгола и европейца. Бытъ народовъ дикихъ, кочевыхъ и осѣдлыхъ. Характеристика новѣйшей культуры съ точки зрѣнія развитія производительныхъ силъ и мірового обмѣна. Вліяніе природы на человѣка и человѣка на природу.

II. Географія Россіи.

Географическое положеніе Россіи на земномъ шарѣ. Территорія Россіи по сравненію съ другими государствами.

Границы морскія и сухопутныя, ихъ физико-географическія свойства, значеніе политическое и торговое.

Устройство поверхности Россіи. Характеристика низменностей и горныхъ странъ. Горныя породы, выходящія на земную поверхность и образующія подпочвенные слои. Слѣды ледниковаго періода. Вулканы дѣйствующіе и потухшіе. Области, наиболѣе подверженныя землетрясеніямъ. Минеральныя богатства.

Климатъ Россіи. Распредѣленіе воздушнаго давленія зимою и лѣтомъ. Циклоны и антициклоны. Ходъ изотермъ январскихъ, іюльскихъ и годовыхъ. Распредѣленіе осадковъ и періоды ихъ выпаденія.

Распредѣленіе и свойства русскихъ рѣкъ и озеръ.

Рѣчные долины, овраги.

Почвы Россіи, ихъ свойства и области распространенія.

Растительныя области Россіи. Животный міръ. Народонаселеніе Россіи. Количество и плотность его. Племенной и вѣроисповѣдный составъ.

Административное дѣленіе Россіи.

Города, важные въ культурномъ, промышленномъ и торговомъ отношеніяхъ.

Основанія дѣленія Россіи на культурно-историческія области.

Государственный строй Россіи. Народное образованіе. Вооруженныя силы.

III. Описаніе государствъ Западной Европы, Азіи, Африки, Америки и Австраліи.

Приблизительно по слѣдующему плану:

Міровое положеніе.

Границы.

Устройство поверхности.

Климатъ.

Рѣки и озера.

Растительный и животный міръ.

Количество населенія и его составъ.

Промышленность и торговля.

Важнѣйшіе города.

IV. Краткій очеркъ географическихъ открытій.

Руководства *):

Круберъ, Барковъ, Григорьевъ и Чефрановъ. Начальный курсъ географіи и курсъ географіи внѣевропейскихъ странъ.

*) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія коммерческой географіи въ ком. учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ обязательно знаніе учебниковъ: Морева и Соболева и книгъ В. Э. фонъ-Дена, а для преподаванія въ торговыхъ школахъ и классахъ можно ограничиться учебникомъ Морева или Соболева.

Бѣлоха-Соколовъ. Учебникъ географіи Россійской Имперіи.

Проф. Соболевъ. Коммерческая географія Россіи.

Д. Д. Моревъ. Очеркъ коммерческой географіи и хозяйственной статистики Россіи.

В. Э. фонъ-Денъ. Экономическая географія. Ч. I.

" " " Каменоугольная и желѣзнодорожная промышленность въ Россіи.

Пособія:

Круберъ, Барковъ, Григорьевъ и Чефрановъ. Иллюстрированные географическіе сборники Европейской Россіи, Азіатской Россіи, Азіи, Америки, Африки, Австраліи и Европы.

ПРОГРАММА СТАТИСТИКИ *).

Опредѣленіе статистики. Примѣненіе численнаго метода къ изученію общественныхъ явленій.

Три ступени статистическихъ операцій;

а) количественное наблюденіе массъ явленій (переписи и текущая регистрація).

б) группировка первичнаго матеріала и счетная его обработка и

в) выводъ статистическихъ законовъ. Статистическія величины; абсолютныя и относительныя; статистическіе ряды. Графическіе способы изображеній статистическихъ данныхъ.

Статистическіе органы въ Россіи и ихъ работы.

Руководства:

Ходскій. Теорія и техника статистики.

Чупровъ. Учебникъ статистики.

Георгъ Майеръ. Закономѣрность явленій общественной жизни.

ПРОГРАММА ЗАКОНОВѢДѢНІЯ **).

Законовѣдѣніе и правовѣдѣніе. Право и нравственность. Право публичное и частное. Право гражданское и торговое.

*) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія коммерческой географіи въ коммерческихъ училищахъ.

**) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія бухгалтеріи, коммерческой корреспонденціи и коммерціи въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ.

Государство. Основныя черты государственнаго устройства въ Россіи. Учрежденія по части торговли и промышленности. Понятіе объ организаціи международнаго общенія.

Законъ, его возникновеніе, дѣйствіе и толкованіе. Законъ и распоряженіе. Русское гражданское и торговое законодательство. Примѣненіе иностранныхъ законовъ.

Обычай. Ближайшія условія примѣненія гражданскаго и торговаго обычая.

Субъекты правъ. Лица физическія. Правоспособность и дѣеспособность. Возникновеніе, ограниченіе и прекращеніе гражданской и торговой право—и дѣеспособности. Купецъ; торговое предпріятіе.

Юридическія лица, виды ихъ, ихъ правоспособность; товарищества: полное, на вѣрѣ, акціонерное и др.

Юридическіе факты, событія и дѣйствія (волеизъявленія), юридическія сдѣлки; форма сдѣлокъ; нотаріатъ.

Представительство въ гражданскомъ и торговомъ правѣ. Вспомогательный персоналъ торговаго предпріятія, торговые повѣренные, приказчики, торговые служащіе.

Фирма единоличнаго и товарищескаго предпріятія, торговая регистрація; торговыя книги.

Объекты торговыхъ сдѣлокъ; товаръ, товарный знакъ, обычныя въ торговлѣ единицы мѣры, вѣса и объема.

Цѣнныя бумаги, понятіе ихъ, виды ихъ, бумаги именныя, приказныя (ордерныя) и на предъявителя.

Понятіе о вещныхъ правахъ: владѣніе, право собственности, ограниченіе права собственности, вещныя права въ чужомъ имуществѣ, залогъ.

Понятіе объ обязательственномъ правѣ. Возникновеніе, обезпеченіе и прекращеніе обязательствъ.

Договорныя обязательства и ихъ группировка. Дареніе и его виды.

Мѣна, купля-продажа (въ особенности торговая), запродажа, подрядъ и поставка.

Договоръ комиссіи.

Ссуда, заемъ, бодмерея.

Вексель; экономическое значеніе векселей; право обязываться векселями, виды векселей, составныя части текста векселя, выдача его, принятіе векселя, передача его, платежъ по векселю, протестъ, регрессъ по векселю, утрата векселя, вексельная давность.

Наемъ имущественный и личный, довѣренность.

Поклажа, въ особенности въ товарныхъ складахъ.

Перевозка сухимъ путемъ, въ особенности желѣзнодорная, и водою.

Срахованіе. Особенности морского страхованія.

Банковыя сдѣлки по закону и по обычаю.

Биржа, ея организація (въ особенности фондовой), маклера; сдѣлки, совершаемыя на биржѣ.

Авторское право, въ особенности привилегіи на изобрѣтенія и усовершенствованія.

Обязательства, возникающія изъ причиненія вреда и убытковъ. Аварія, въ особенности аварія общая.

Понятіе о семейномъ и наслѣдственномъ правѣ. Особенности по наслѣдству для торговаго быта.

Понятіе о гражданскомъ и торговомъ судоустройствѣ и судопроизводствѣ. Исполнительный процессъ.

Взысканіе по векселямъ. Производство дѣлъ о несостоятельности.

Мировыя сдѣлки. Третейскій судъ; особенности въ торговомъ быту.

Руководства:

Шершеневичъ. Учебникъ торговаго права.

Хвостовъ. Общая теорія права.

Устиновъ, Новицкій, Гернетъ. Основныя понятія русскаго государственнаго, гражданскаго и уголовнаго права.

Пособія:

Коркуновъ. Лекціи по общей теоріи права.

Алексѣевъ. Конспектъ русскаго государственнаго права.

Шершеневичъ. Учебникъ гражданскаго права.

Энгельманъ. Учебникъ гражданскаго судопроизводства.

Лазаревскій. Лекціи по русскому государственному праву.

ПРОГРАММА ПОЛИТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМІИ *).

Производство цѣнностей. Факторы производства.

Вліяніе природы на степень производительности и на характеръ производства.

Условія производительности труда. Количество труда въ странѣ. Качество труда.

Раздѣленіе труда. Выгодныя и темныя стороны его.

Капиталъ. Понятіе.

Условія образованія и роста его. Виды капитала.

Крупное и мелкое производство.

Формы соединенія капиталовъ. Товарищества. Акціи и облигаціи.

Обмѣнъ натуральный и денежный. Спросъ и предложеніе. Цѣна и цѣнность. Издержки производства.

Деньги. Понятіе. Денежные матеріалы, сравнительныя удобства ихъ. Монетная единица и монетная система. Монометаллизмъ и биметаллизмъ. Денежное обращеніе въ Россіи.

Торговля. Понятіе и значеніе. Виды торговли. Организація торговли. Биржи.

Пути сообщенія. Желѣзныя дороги. Желѣзнодорожные тарифы. Морскіе и рѣчные фрахты.

Международная торговля. Торговый и разсчетный балансъ.

Протекціонизмъ и свободная торговля. Синдикаты.

Кредитъ. Понятіе. Виды кредита. Векселя, вексельный курсъ. Суррогаты денегъ. Процентныя бумаги.

Условія развитія кредита.

Банки. Понятіе и виды по способу образованія капиталовъ и по роду операцій. Операціи банковъ.

Распредѣленіе. Народный и частный доходъ. Валовой и чистый доходъ. Составныя части дохода.

Рента. Теорія Рикардо. Вліяніе разстоянія отъ рынка.

Системы сельскаго хозяйства.

---

*) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія бухгалтеріи, коммерческой корреспонденціи и коммерческой географіи въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ, и коммерціи въ торговыхъ школахъ и классахъ.

Прибыль. Составныя части. Уравненіе процента. Заработная плата. Ея виды и формы. Условія, вліяющія на размѣръ. Вліяніе правительства на отношеніе труда и капитала.

Измѣненіе во времени размѣровъ ренты, прибыли и заработной платы.

Потребленіе. Равновѣсіе между предложеніемъ и спросомъ. Кризисы. Значеніе роскоши.

Страхованіе. Виды и организаціи.

Государственные доходы. Виды: налоги, пошлины, частно-хозяйственные доходы государства. Прямые налоги. Понятіе, виды. Прямые налоги въ Россіи.

Косвенные налоги. Косвенные налоги въ Россіи. Понятіе, виды.

Промысловый налогъ вообще и въ Россіи.

Казенная монополія. Винная монополія въ Россіи.

Государственный кредитъ. Виды его. Фонды.

Русскія государственныя бумаги.

Роспись доходовъ и расходовъ государства.

Руководства*):

Моревъ. Руководство политической экономіи.

Ходскій. Руководство политической экономіи въ связи съ финансами.

Чупровъ. Политическая экономія.

В. Я. Желѣзновъ. Очерки политической экономіи.

А. А. Исаевъ. Начала политической экономіи.

ПРОГРАММА КОММЕРЦІИ.

О хозяйственной дѣятельности и главнѣйшихъ процессахъ ея.

Торговля, экономическое ея значеніе, виды торговли, торговое законодательство.

Торговое предпріятіе, имущественный составъ его, личный

---

*) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія политической экономіи или коммерческой географіи въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ требуется знаніе какихъ-либо четырехъ изъ указанныхъ учебниковъ, въ томъ числѣ обязательно знаніе учебника Желѣзнова.

составъ его, единоличное предпріятіе, купецъ, торговые приказчики и повѣренные.

Предпріятіе товарищеское, товарищества: полное, на вѣрѣ, акціонерное, артельное, общества взаимнаго кредита, ссудосберегательныя товарищества, потребительныя общества и т. п.

Фирма единоличнаго и товарищескаго предпріятія, торговая регистрація, торговыя книги.

Товаръ, товарный знакъ. Обычныя въ торговлѣ единицы мѣры, вѣса и объема.

Законъ колебанія рыночныхъ цѣнъ.

Деньги, экономическая функція ихъ, системы денежнаго обращенія, монометаллизмъ и биметаллизмъ, система денежнаго обращенія въ Россіи и другихъ важнѣйшихъ государствахъ, бумажныя деньги.

Цѣнныя бумаги, понятіе ихъ, виды ихъ, бумаги именныя, приказныя (ордерныя) и на предъявителя.

Вексель, экономическое значеніе векселей, вексельный курсъ, право обязываться векселями, виды векселей, составныя части текста векселя; выдача векселя; принятіе векселя, передача его, платежъ по векселю, протестъ, регрессъ по векселю.

Кредитъ. экономическое его значеніе, организація кредита, банки, важнѣйшіе виды ихъ, главныя ихъ операціи.

Важнѣйшія и торговыя сдѣлки, договоръ купли-продажи, договоръ комиссіи.

Договоръ поклажи, товарные склады (элеваторы и др.), выдаваемые ими документы.

Виды и средства сообщенія, экономическое ихъ значеніе, перевозка, въ особенности желѣзнодорожная и морская.

Почта и телеграфъ, ихъ организація, важнѣйшія правила сношеній по почтѣ и телеграфу.

Страхованіе, его экономическое значеніе, виды страхованія, страховой договоръ.

Учрежденія, содѣйствующія рыночному обмѣну; ярмарки, биржи, виды биржъ, организація русскихъ биржъ, маклера, биржевыя сдѣлки, сдѣлки на срокъ.

Налоги и пошлины, прямые и косвенные налоги, промысловый налогъ.

Косвенные налоги, таможенныя учрежденія, покровительственная таможенная политика, таможенные сборы, гербовый сборъ.

Система русскихъ судовъ, коммерческіе суды, несостоятельность, конкурсный процессъ, администрація.

Руководство:

П. Лунскій. Коммерція.

Пособія:

А. Гуляевъ. Торговое дѣло.
Г. Шершеневичъ. Учебникъ торговаго права.
В. Желѣзновъ. Очерки политической экономіи.

ПРОГРАММА МАТЕМАТИКИ *).

I. Ариѳметика.

Единица. Число. Естественный (натуральный) рядъ чиселъ. Ариѳметическіе символы и знаки. Нумерація словесная и письменная.

Различныя системы счисленія. Переводъ числа, выраженнаго по десятичной системѣ нумераціи, на другую систему съ даннымъ основаніемъ, отличнымъ отъ 10, и обратно. Выраженіе чиселъ по системѣ счисленія, основаніе которыхъ x. Славянское и римское обозначенія чиселъ.

Понятіе объ ариѳметическомъ дѣйствіи. Опредѣленіе и производство ариѳметическихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Число цифръ произведенія и частнаго. Измѣненіе результатовъ дѣйствій въ зависимости отъ измѣненій элементовъ дѣйствій.

Кратное число и дѣлитель. Числа простыя и составныя, взаимно-кратныя и взаимно-простыя. Разложеніе числа на простыхъ производителей. Нахожденіе всѣхъ дѣлителей составного числа. Признаки дѣлимости чиселъ и теоремы, на которыхъ основано нахожденіе этихъ признаковъ. Дѣлимость чиселъ на составныхъ дѣлителей.

Общій наибольшій дѣлитель двухъ и нѣсколькихъ чиселъ. Нахожденіе его посредствомъ разложенія чиселъ на простыхъ производителей и посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія. Наименьшее

*) Для экзамена на пріобрѣтеніе права преподаванія коммерческой ариѳметики въ коммерческихъ училищахъ.

кратное двухъ и нѣсколькихъ чиселъ. Нахожденіе его посредствомъ разложенія чиселъ на простыхъ производителей и при помощи общаго наибольшаго дѣлителя.

Теорія обыкновенныхъ дробей.

Теорія десятичныхъ дробей. Періодическія дроби.

Приближенныя вычисленія.

Ариѳметическія и геометрическія отношенія и пропорціи.

Измѣренія величинъ. Соотвѣтствіе между величинами и числами. Общая мѣра величинъ. Прямая и обратная пропорціональность величинъ.

Системы мѣръ. Метрическая система. Русскія мѣры.

Производство ариѳметическихъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными именованными числами.

Приложеніе ученія о пропорціональности величинъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ. Тройныя правила. Правила пропорціональнаго дѣленія. Правила процентовъ и учета векселей. Правило смѣшенія (сплавы). Цѣпное правило.

Руководства:

Серре. Ариѳметика. Переводъ Юденича.

А. Г. Малининъ. Курсъ ариѳметики.

Киселевъ. Ариѳметика.

А. Н. Глаголевъ. Курсъ теоретической ариѳметики.

Пособія:

Ж. Бертранъ. Ариѳметика. Переводъ М. В. Пирожкова.

Шапошниковъ. Основанія общей ариѳметики и алгебры.

II. Алгебра.

Положительныя и отрицательныя числа. Сложеніе и вычитаніе ихъ. Алгебраическая сумма. Неравенства. Умноженіе и дѣленіе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Дроби. Степени. Геометрическія и другія конкретныя приложенія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ.

Понятіе о предѣлѣ. Основныя теоремы, относящіяся къ предѣламъ. Ирраціональныя числа. Непрерывныя дроби.

Классификація алгебраическихъ выраженій. Эквивалентность (тождественность) алгебраическихъ выраженій. Понятіе о функціи.

Сложеніе и вычитаніе одночленовъ и многочленовъ.

Умноженіе одночленовъ и многочленовъ. Возвышеніе въ степень одночленовъ.

Дѣленіе одночленовъ и многочленовъ.

Общій наибольшій дѣлитель одночленовъ и многочленовъ.

Алгебраическія дроби и дѣйствія надъ ними. Формы $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$.

Показатели, равные нулю и отрицательные.

Извлеченіе корней и дѣйствія надъ радикалами. Дробные показатели.

Несоизмѣримые показатели. Разсмотрѣніе выраженія: a^x при всякомъ вещественномъ x и при a положительномъ, большемъ и меньшемъ единицы.

Логариѳмы и ихъ свойства. Переходъ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой. Логариѳмы при основаніи 10. Устройство и употребленіе таблицъ логариѳмовъ.

Тожества и уравненія. Классификація уравненій. Эквивалентность уравненій. Системы уравненій. Общія начала, на которыхъ основываются преобразованія уравненій и ихъ рѣшеній.

Рѣшеніе уравненій первой степени съ одной неизвѣстной. Изслѣдованіе уравненій первой степени съ одной неизвѣстной.

Неравенства первой степени.

Рѣшеніе системы уравненій первой степени съ двумя и болѣе неизвѣстными, когда число неизвѣстныхъ равно числу уравненій. Различные способы исключенія неизвѣстныхъ. Способъ Безу. Изслѣдованіе рѣшеній уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Системы уравненій, въ которыхъ число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій.

Задачи, приводящія къ уравненіямъ первой степени. Изслѣдованіе такихъ задачъ. Истолкованіе отрицательныхъ рѣшеній.

Неопредѣленныя уравненія первой степени. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ.

Мнимыя числа. Дѣйствіе надъ комплексными числами. Выраженіе мнимыхъ количествъ при помощи тригонометрическихъ величинъ. Геометрическое представленіе комплексныхъ выраженій.

Уравненія второй степени съ одной неизвѣстной. Свойства корней квадратнаго уравненія. Разложеніе трехчлена второй степени на линейные множители. Изслѣдованіе уравненій второй степени.

Системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, въ которыхъ одно уравненіе второй, а другое первой степени. Рѣшеніе нѣкоторыхъ простѣйшихъ системъ ихъ.

Рѣшеніе уравненій высшихъ степеней, приводимыхъ къ квадратнымъ уравненіямъ. Биквадратныя уравненія. Двухчленныя уравненія.

Методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Освобожденіе уравненій отъ радикаловъ.

Показательныя уравненія.

Прогрессіи: ариѳметическая и геометрическая. Безконечно убывающая геометрическая прогрессія.

Главнѣйшія свойства безконечныхъ рядовъ. Число e.

Сложные проценты. Срочные взносы и уплаты.

Соединенія. Размѣщенія, перестановки, сочетанія. Биномъ Ньютона.

Понятіе о вѣроятности. Опредѣленіе вѣроятности простыхъ и сложныхъ событій. Вѣроятности событій при повтореніи испытаній. Теорема Бернулли. Математическое ожиданіе.

Руководства:

А. Кисилевъ. Элементарная алгебра.

І. Сомовъ. Начальная алгебра съ дополнительными статьями, содержащими курсъ допольнительнаго класса реальныхъ училищъ.

Шапошниковъ. Курсъ алгебры, въ двухъ частяхъ.

Пособія:

Билибинъ. Алгебра.

Маракуевъ. Элементарный курсъ алгебры.

III. Геометрія.

Основныя опредѣленія: объемъ, поверхность, линія, точка. Геометрическая фигура. Прямая линія. Линіи кривыя и ломаныя. Плоскость. Кривая поверхность. Три точки, не лежащія на одной прямой, опредѣляютъ плоскость. Раздѣленіе геометріи.

Аксіома. Теорема. Логическая зависимость между предложеніями: прямымъ, обратнымъ и противоположными.

Углы.

Параллельныя прямыя. Аксіома Евклида о параллельныхъ прямыхъ.

Треугольники и многоугольники. Равенство треугольниковъ и многоугольниковъ.

Перпендикуляръ и наклонныя. Симметрія.

Параллелограммы.

Окружность. Положеніе точки и прямой относительно окружности. Условія, опредѣляющія окружность. Свойства дугъ, хордъ и различныхъ угловъ въ кругѣ. Касательныя (двоякое ихъ опредѣленіе). Нормали. Взаимное положеніе окружностей.

Геометрическія построенія.

Отысканіе общей мѣры двухъ прямыхъ. Несоизмѣримыя прямыя. Несоизмѣримость стороны и діагонали квадрата.

Мѣра угловъ.

Пропорціональность линій. Подобіе треугольниковъ. Пропорціональныя линіи въ кругѣ.

Задачи на пропорціональныя линіи и подобіе фигуръ.

Масштабы.

Геометрическое значеніе простѣйшихъ алгебраическихъ выраженій. Построеніе алгебраическихъ выраженій раціональныхъ и ирраціональныхъ. Рѣшеніе геометрическихъ задачъ при помощи уравненій. Дѣленіе линіи въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Понятіе о методахъ рѣшенія геометрическихъ задачъ.

Правильные многоугольники.

Длина окружности. Вычисленіе числа π.

Измѣреніе и сравненіе площадей прямолинейныхъ фигуръ. Теорема Пиѳагора. Геометрическая квадратура площадей.

Площадь круга и его частей.

Линіи и плоскости въ пространствѣ. Двугранные углы.

Трехгранные и многогранные углы. Равенство и симметрія многогранныхъ угловъ.

Многогранники. Призма. Пирамида. Правильные многогранники. Равенство и подобіе многогранниковъ.

Поверхности многогранниковъ.

Объемы многогранниковъ.

Поверхности: цилиндрическія, коническія и поверхности вращенія.

Цилиндръ и конусъ вращенія. Поверхности и объемы цилиндровъ и конусовъ и ихъ частей.

Сфера. Положеніе прямой и плоскости относительно сферы. Прямыя и плоскости, касательныя къ сферѣ. Конусъ и цилиндръ, описанные около сферы. Условія, опредѣляющія положеніе сферы въ пространствѣ. Круги и дуги сферы. Оси и полюсы круговъ сферы. Опредѣленіе радіуса сферы построеніемъ на ея поверхности. О фигурахъ на сферѣ. Сферическіе треугольники. Построеніе на сферѣ.

Поверхности и объемы сферы, шара и ихъ частей.

Сѣченія цилиндра и конуса плоскостью: эллипсисъ, гипербола и парабола.

Винтовая линія.

Руководства:

А. Давыдовъ. Элементарная геометрія въ объемѣ гимназическаго курса.

А. Кисилевъ. Элементарная геометрія для среднихъ учебныхъ заведеній.

А. П. Глаголевъ. Элементарная геометрія и собраніе геометрическихъ задачъ.

Пособія:

Русскій переводъ сочиненія Eléments de Géométrie, par E. Rouché et C. de Comberousse (безъ дополнительныхъ статей) графини Н. Бобринской и В. Березиной подъ заглавіемъ: „Основы геометріи“ Руше и Комберусса. Спб. 1900 г.

IV. Тригонометрія.

Прямыя круговыя функціи и ихъ взаимныя соотношенія. Обратныя круговыя функціи.

Приведеніе тригонометрическихъ функцій къ простѣйшему виду аргумента.

Формулы сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія. Преобразованіе суммы и разности въ произведеніе.

Рѣшеніе простѣйшихъ тригонометрическихъ уравненій.

Тригонометрическія таблицы. Употребленіе таблицъ.

Способъ введенія вспомогательнаго угла.

Соотношенія между сторонами и углами треугольниковъ прямоугольныхъ и косоугольныхъ.

Вычисленіе треугольниковъ.

Измѣреніе линій и угловъ на земной поверхности. Простѣйшіе угломѣрные инструменты. Рѣшеніе нѣкоторыхъ простѣйшихъ задачъ, относящихся къ топографическимъ операціямъ. Понятіе о тріангуляціи.

Руководства:

А. Ребьеръ. Курсъ элементарной тригонометріи. Перевелъ Н. Де-Жоржъ.

Шапошниковъ. Курсъ прямолинейной тригонометріи.

Пособіе:

Traité de Trigonométrie par Serret.

V. Приложеніе алгебры къ геометріи и начала аналитической геометріи двухъ измѣреній.

А. Приложеніе алгебры къ геометріи.

Предметъ приложенія алгебры къ геометріи. Выраженіе протяженій числами. Ходъ рѣшенія геометрическихъ задачъ помощью алгебры. Примѣры. Однородность уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ. Случай ея нарушенія. Возстановленіе однородности.

Построеніе раціональныхъ линейныхъ выраженій. Построеніе ирраціональныхъ выраженій. Построеніе выраженій, содержащихъ тригонометрическія величины. Задачи для приложенія пріемовъ построенія формулъ и для изслѣдованія рѣшеній.

Б. Начала аналитической геометріи двухъ измѣреній.

Понятіе о геометрическихъ мѣстахъ.

Уравненія линій. Геометрическое значеніе уравненія съ двумя перемѣнными. Двѣ основныя задачи: а) на данной линіи найти точку, зная одну изъ координатъ этой точки, и б) узнать, находится ли данная точка на данной линіи.

Примѣры построенія по точкамъ линій, заданныхъ уравненіями. Построеніе уравненій $y=\sin x$, $y=\tan x$, $y=\sec x$, $y=x^3$ и т. д. Случаи, когда уравненіе представляетъ отдѣльныя точки, двѣ или нѣсколько линій или, наконецъ когда оно не представляетъ никакого геометрическаго мѣста.

Опредѣленіе точекъ пересѣченія данныхъ линій между собой и съ осями координатъ.

Преобразованіе уравненія линій: а) перенесеніемъ начала координатъ и б) перемѣной направленія осей.

Классы и порядки линій.

Линія перваго порядка. Уравненіе прямой. Изслѣдованіе уравненія $Ax+By+C=0$. Построеніе прямой, заданной уравненіемъ.

Задачи на прямую линію. Найти уравненія: прямой отсѣкающей данные отрѣзки отъ осей координатъ; прямой, проходящей черезъ данную точку; прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки. Опредѣлить точку пересѣченія двухъ прямыхъ. Опредѣлить уголъ, составляемый двумя данными прямыми. Черезъ данную точку провести прямую, параллельную и перпендикулярную къ данной прямой. Опредѣлить разстояніе данной точки отъ данной прямой. Примѣненіе предыдущихъ вопросовъ къ рѣшенію задачъ на прямую линію.

Окружность. Уравненіе окружности. По данному уравненію окружности найти ея центръ и радіусъ. Найти пересѣченіе окружности съ прямой и съ другой окружностью. Провести окружность черезъ три данныя точки.

Эллипсъ. Уравненіе его. Изслѣдованіе фигуры эллипса по его уравненію. Оси, вершины, центръ, эксцентрицитетъ и параметръ эллипса. Сжатіе элипса. Пересѣченіе эллипса прямой. Выпуклость эллипса. Построеніе эллипса по точкамъ и непрерывнымъ движеніемъ. Площадь эллипса. Діаметры эллипса.

Гипербола. Уравненіе гиперболы. Изслѣдованіе фигуры гиперболы по ея уравненію. Оси, вершины, центръ, эксцентрицитетъ и параметръ гиперболы. Пересѣченіе гиперболы прямой. Выпуклость гиперболы. Построеніе гиперболы. Діаметры гиперболы. Ассимптоты ея.

Парабола. Уравненіе параболы. Изслѣдованіе фигуры параболы по ея уравненію. Ось, вершины, фокусное разстояніе, параметръ параболы. Пересѣченіе параболы прямою. Выпуклость параболы. Построеніе параболы. Діаметры ея.

Касательныя и нормальныя. Уравненіе касательной къ кривой второго порядка. Подкасательная и поднормаль. Построенія касательныхъ къ кривымъ второго порядка.

Общее изслѣдованіе кривыхъ второго порядка. Розысканіе центра кривыхъ второго порядка. Розысканіе осей кривыхъ съ центромъ. Два вида кривыхъ съ центромъ эллипсъ и гипербола. Розысканіе оси кривой, не имѣющей центра. Парабола — единственная кривая этого рода. Розысканіе фокусовъ и радіусовъ векторовъ кривыхъ второго порядка. Директрисы кривыхъ второго порядка.

Составленіе уравненій геометрическихъ мѣстъ. Примѣры.

Графическій и табличный способы заданія функцій. Линіи, выражающія законъ измѣненія цѣлыхъ раціональныхъ алгебраическихъ функцій. Графическое представленіе эмпирическихъ функцій. Графическая интерполяція.

Руководство:

А. Фроловъ. Приложеніе алгебры къ геометріи и начала аналитической геометріи на плоскости.

ПРОГРАММА ТОВАРОВѢДѢНІЯ.

Дер-во. Главныя древесныя породы, имѣющія въ Россіи наибольшее распространеніе и торговое значеніе. Строеніе дерева, признаки доброкачественности и пороки его. Понятіе о лѣсѣ: корабельномъ, строевомъ и дровяномъ. Главные виды древеснаго строительнаго и подѣлочнаго матеріала: балки, бревна, доски, бочарный и другіе подобные матеріалы.

Дерево, какъ топливо; главные сорта дровъ, ихъ измѣреніе, достоинства и недостатки. Древесный уголь. Торфъ; понятіе о его происхожденіи; главные виды торфа и способы его приготовленія; достоинства и недостатки торфа, какъ топлива. Общее понятіе объ образованіи каменнаго угля въ природѣ. Главнѣйшіе виды каменныхъ углей; сухая перегонка ихъ. Русскіе каменные угли. Коксованіе и коксъ.

Нефть, описаніе ея физическихъ свойствъ и химическаго состава. Мѣсторожденіе нефти въ Россіи и Америкѣ; понятіе о добычѣ нефти. Способы храненія и перевозки нефти. Понятіе о перегонкѣ нефти и о получаемыхъ при этомъ продуктахъ. Легкія нефтяныя масла: нефтяной эфиръ и спиртъ; масла для освѣщенія: обыкновенный торговый керосинъ, тяжелый керосинъ и пиронафтъ. Нефтяные остатки. Смазочныя масла и нефтяные остатки. Смазочныя масла и нефтяное сало. Признаки доброкачественности и испытаніе нефтяныхъ продуктовъ.

Способы опредѣленія достоинства различныхъ топливъ.

Химическіе товары. Кислоты и соли, имѣющія болѣе значительное примѣненіе къ промышленности. Смолы, смолы-камеди.

Естественные, растительные красильные пигменты, красильные экстракты. Минеральныя краски. Искусственные красильные пигменты, анилиновые, нафталиновые, ализариновые, антраценовые и азокраски.

Металлы. Общее понятіе о составѣ, строеніи и свойствахъ желѣзныхъ металловъ (чугуна, желѣза и стали). Производство чугуна. Сырые матеріалы для полученія чугуна. Выплавка чугуна. Сорта чугуна и ихъ примѣненіе. Отливка издѣлій. Производство ковкаго желѣза (стали и собственно желѣза). Полученіе сварочнаго ковкаго желѣза пудлингованіемъ. Приготовленіе литого ковкаго желѣза по способу Сименсъ-Мартена. Приготовленіе литого ковкаго желѣза по способу Бессемера. Приготовленіе тигельной, цеметной стали. Сорта ковкаго желѣза. Приготовленіе нѣкоторыхъ особыхъ улучшенныхъ сортовъ стали. Испытаніе желѣзныхъ металловъ. Механическое, химическое и микроскопическое изслѣдованіе ихъ. Мѣдь, цинкъ, олово, свинецъ, серебро, золото и прочіе металлы и ихъ сплавы.

Глины. Матеріалы, употребляемые для приготовленія различныхъ глиняныхъ издѣлій.

Понятіе о соотношеніи между свойствами употребленныхъ матеріаловъ и свойствами получаемыхъ издѣлій. Главнѣйшіе виды глиняныхъ издѣлій: кирпичъ, понятіе о способахъ формовки и обжигѣ. Главные виды кирпича, какъ строительнаго и печного матеріала; его достоинства и недостатки. Понятіе о простѣйшихъ глиняныхъ издѣліяхъ, употребляемыхъ для посуды, какъ-то: о муравленыхъ издѣліяхъ, простой каменной посудѣ, понятія о фаянсѣ, маіоликѣ, терракотѣ; фарфоръ, его сорта и отличіе отъ прочихъ глиняныхъ издѣлій. Описаніе способовъ формовки и обжига глиняныхъ издѣлій; матеріалы, служащіе для приготовленія глазурей, способы покрыванія издѣлій глазурью.

Стекло. Приготовленіе стекла и издѣлій изъ онаго. Матеріалы для приготовленія стекла. Приготовленіе и варка стеклянной массы; переработка оной. Листовое, литое зеркальное стекло. Посудное стекло, цвѣтныя стекла, мозаика, оптическія стекла. Стеклярусъ, бусы.

Известь и цементы. Приготовленіе извести и цементовъ. Матеріалы, для сего примѣняемые. Известковые растворы. Вліяніе обжига на качество получаемыхъ продуктовъ. Отличительныя свойства гидравлическихъ цементовъ. Химическій ихъ составъ. Важнѣйшіе сорта въ продажѣ; условія ихъ доброкачественности. Привозные и русскіе цементы, ихъ испытаніе.

Волокнистые матеріалы, служащіе для изготовленія пряжи и тканей. Главные виды волокнистыхъ веществъ и значеніе ихъ въ жизни человѣка.

Хлопокъ, мѣста его полученія. Описаніе хлопчатобумажнаго волокна. Главные сорта хлопка и ихъ качества. Понятіе о классификаціи хлопка. Современное состояніе хлопководства въ Россіи. Общее понятіе о превращеніи хлопка въ пряжу. Сорта хлопчатобумажной пряжи, основа и утокъ; крученная пряжа. Номерація хлопчатобужной пряжи. Опредѣленіе степени крученія пряжи. Опредѣленіе крѣпости пряжи и зависимость ея отъ различныхъ условій.

Ленъ. Общія понятія о растеніи и полученіи изъ него волокна; строеніе волокна и его свойства. Сорта и сортировка льна. Распространеніе льноводства въ Россіи и значеніе русскаго льна въ Европейской торговлѣ. Общее понятіе о переработкѣ льна въ пряжу. Различные сорта льняной пряжи, ея номерація.

Пенька. Общія понятія о растеніи и полученіи изъ него волокна; строеніе волокна и его свойства. Качества пеньковаго волокна и его употребленіе; главные виды пеньковой пряжи, бичевки, веревки, канаты.

Джутъ, его обработка и издѣлія изъ онаго.

Свѣдѣнія о другихъ волокнистыхъ матеріалахъ растительнаго царства, не имѣющихъ въ Европѣ большого значенія.

Шерсть. Свойства шерстяного волокна. Породы овецъ, дающихъ главные торговые сорта шерсти. Дѣленіе грязной шерсти на сорта. Мытье шерсти, понятіе объ употребляемыхъ матеріалахъ, о процессѣ мытья и устройствѣ шерстомоенъ. Сортировка шерстей суконныхъ и камвольныхъ. Общія понятія объ искусственной шерсти, ея полученіи, сортахъ и признакахъ. Кнопъ.

Альпага, вигонь, могеръ, кашемирская и ангорская шерсть; верблюжій и коровій волосъ. Общія понятія о пряденіи шерсти: существенная разница въ пряденіи кардной и камвольной шерсти. Сорта шерстяной пряжи и ея номерація.

Шелкъ. Жизнь и превращенія шелковичнаго червя; органы его, производящіе шелкъ. Выкормка червей для полученія грены и коконовъ. Понятіе о гренажныхъ заведеніяхъ.

Замариваніе, сортировка и размотка коконовъ. Строеніе шелковаго волокна. Различные качества и сорта шелковой пряжи.

Крученіе шелка; шелковыя основы и утки; титръ шелка. Кондиціонированіе шелка. Варка шелка; шелкъ вареный и супль. Тусоръ. Понятіе о пряденіи шелка изъ отбросовъ, получаемыхъ на выкормкахъ, при размоткѣ и при крученіи шелка; различные сорта пряденнаго шелка (буръ-де-суа). Понятіе объ искусственномъ шелкѣ, его полученіи изъ клѣтчатки, свойсвахъ и употребленіи.

Образованіе изъ нитей тканей, различныя болѣе типичныя переплетенія и зависимость наружнаго вида отъ переплетенія нитей. Общія понятія о производствѣ тканья и устройствѣ ткацкаго станка.

Обзоръ главнѣйшихъ хлопчатобумажныхъ тканей. Суровый товаръ. Понятіе о бѣленіи тканей. Понятіе о крашеніи и печатаніи узоровъ. Понятіе объ отдѣлкѣ тканей. Ситцы, пунцовые и кубовые товары. Бѣлые и цвѣтные коленкоры. Примѣры узорчатыхъ и тяжелыхъ хлопчатобумажныхъ тканей.

Льняныя ткани; разные сорта суроваго и бѣленаго полотна; узорчатые ткани; кружева. Пеньковыя и джутовыя ткани.

Шерстяныя ткани. Понятіе о выдѣлкѣ сукна. Главнѣйшіе сорта валяныхъ шерстяныхъ тканей. Камвольныя ткани. Шелковыя ткани; главнѣйшіе виды гладкихъ и узорчатыхъ шелковыхъ тканей. Парчи и подобные имъ товары.

Изслѣдованіе тканей. Опредѣленіе крѣпости, растяжимости и рода переплетенія тканей; приборы, для этой цѣли примѣняемые. Опредѣленіе матеріала, изъ котораго сдѣлана ткань. Опредѣленіе качества окраски и степени аппретуры.

Писчая бумага. Матеріалы для ея приготовленія; понятіе о сортировкѣ тряпья; древесная масса и целлюлоза; соломенная целлюлоза. Понятіе о ручной и машинной формовкѣ бумаги. Сатинированіе бумаги. Главнѣйшіе сорта бумаги; обои. Способы изслѣдованія бумаги.

Крахмалъ. Содержаніе его въ растеніяхъ, строеніе крахмальныхъ зеренъ, составъ, свойства и превращеніе крахмала. Понятіе о полученіи картофельнаго, пшеничнаго и рисоваго крахмала. Способы для изслѣдованія крахмала. Полученіе изъ крахмала декстрина и ему подобныхъ продуктовъ.

Понятіе о различныхъ видахъ сахаровъ.

Патока, ея приготовленіе и испытаніе.

Кристаллическій сахаръ. Полученіе сахара сырца изъ тростника и свекловицы, его составъ и признаки доброкачественности.

Торговые сорта сахара сырца. Сахаръ рафинадъ, бастардъ и лумпъ. Способы опредѣленія чистоты сахара.

Спиртъ и пиво. Матеріалы для ихъ полученія. Ферменты—дрожжи. Броженіе. Винокуреніе. Пивовареніе. Очистка спирта. Опредѣленіе крѣпости и чистоты продажнаго спирта, водки и пива. Акцизъ со спирта и пива въ Россіи.

Виноградныя вина. Происхожденіе и главные сорта винъ. Понятіе о фальсификаціи винъ. Изслѣдованіе виноградныхъ винъ.

Хлѣбное зерно. Ознакомленіе съ строеніемъ зерна и главными его составными частями. Главные виды хлѣбнаго зерна. Понятіе о постороннихъ примѣсяхъ къ хлѣбному зерну и о причинахъ засоренности хлѣбнаго зерна, поступающаго въ торговлю. Способы очистки и сортировки зерна. Сушка зерна. Храненіе зерна, понятіе объ элеваторахъ и ихъ значеніи для хлѣбной торговли. Опредѣленіе качествъ хлѣбнаго зерна; хлѣбные вѣсы различныхъ системъ.

Понятіе о приготовленіи изъ зерна крупы и муки. Торговые сорта крупы и ихъ качества. Сорта пшеничной и ржаной муки и ихъ качества. Способы храненія муки. Способы изслѣдованія муки. Печеный хлѣбъ, бѣлый и черный; понятія о хлѣбопеченіи и припекѣ. Способы изслѣдованія печенаго хлѣба.

Чай. Происхожденіе и понятіе о главныхъ составныхъ частяхъ чайнаго листа. Приготовленіе чая въ Китаѣ и другихъ странахъ. Сорта и виды чая, потребляемаго въ Россіи. Фальсификація чая. Способы изслѣдованія.

Кофе. Подготовленіе кофейныхъ сѣмянъ для торговли, упаковка. Важнѣйшіе сорта на европейскихъ рынкахъ. Признаки доброкачественности, принятые въ торговлѣ. Составъ кофе. Подделка кофе, испытаніе чистоты кофе. Суррогаты кофе.

Табакъ. Главные сорта табака, какъ привознаго, такъ и воздѣлываемаго въ Россіи. Понятіе о приготовленіи листового табака. Главные виды табачныхъ издѣлій.

Жиры. Растительные и животные. Общее понятіе о составѣ жировъ.

Главные виды масличныхъ сѣмянъ и растительныхъ маселъ; ихъ качества и способы изслѣдованія. Пчелиный воскъ. Главные виды жировъ животнаго происхожденія. Торговые ихъ сорта.

Понятіе о салотопленіи огневомъ и паровомъ.

Маргаринъ, его приготовленіе и значеніе.

Понятіе о полученіи изъ сала стеарина и глицерина.

Понятіе о приготовленіи свѣчей и различные виды свѣчного товара.

Понятіе о мылахъ и мыловареніи. Сорта мыла и способы ихъ изслѣдованія.

Молоко—его составъ, способы изслѣдованія. Масло изъ молока; сорта, способы изслѣдованія.

Сыры—понятіе о сыровареніи и класификація сыровъ; главные торговые сорта сыра.

Яйца; составныя части, значеніе ихъ для питанія. Способы храненія яицъ.

Поваренная соль. Источники ея добычи. Способы ея полученія и рафинировки. Сорта торговой соли. Значеніе ея въ пищѣ и въ промышленности.

Мясо. Строеніе и главныя составныя части. Главнѣйшія мясныя породы рогатаго скота, овецъ и свиней. Болѣзни рогатаго скота и другихъ животныхъ, служащихъ для полученія мяса; организація надзора за скотомъ и мясомъ. Понятіе объ устройствѣ центральныхъ городскихъ боенъ. Сортировка мясной туши. Полученіе изъ крови альбумина. Способы сохраненія мяса; мясные консервы.

Рыба. Главнѣйшіе виды рыбы, потребляемой въ пищу. Понятіе о рыбныхъ промыслахъ въ Россіи. Способы храненія и заготовки въ срокъ рыбныхъ товаровъ. Икра. Рыбій клей.

Кожевенные товары. Сырыя кожи: мѣстныя, американскія и остъиндскія. Дубильные матеріалы, примѣняемые въ Россіи. Переработка сырья въ кожевенные товары. Сапожный товаръ. Сафьянъ, сыромять, лайка, замша и проч.; признаки доброкачественности и ихъ испытаніе. Пороки сапожнаго товара.

Понятіе о выдѣлкѣ мѣховъ, овчинъ и мерлушекъ.

Кость — ея строеніе и составъ. Понятіе о продуктахъ, получаемыхъ при фабричной обработкѣ костей: костяной мукѣ для удобреній, костяномъ салѣ, клеѣ, костяномъ углѣ и проч.

Руководство:

Руководство по товаровѣдѣнію съ необходимыми свѣдѣніями изъ технологіи. Составили московскіе преподаватели: А. М. Бочваръ, Вл. Р. Вильямсъ, проф. Н. С. Нестеровъ, проф. Я. Я. Никитинскій, А. В. Новицкій, проф. П. П. Петровъ, Ѳ. В. Цереветиновъ, А. П. Шахно и А. Н. Шустовъ.

Пособія:

Пособія, указанныя въ означенномъ руководствѣ. Пр. Остъ. Химическая технологія. Перев. Тимофеева.

На подлинномъ написано: „Утверждаю. Апрѣля 26 дня 1911 года. Министръ Торговли и Промышленности *С. Тимашевъ*".
Вѣрно: Управляющій Учебнымъ Отдѣломъ *А. Лагоріо.*

ИНСТРУКЦІЯ.

Для производства испытаній въ Испытательной Комиссіи при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности.

I. Объ испытательной комиссіи.

1. При Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ состоитъ Испытательная Комиссія для производства испытаній на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, состоящихъ въ вѣдѣніи Министерства Торговли и Промышленности.

2. Предсѣдателемъ Испытательной Комиссіи состоитъ Главный Инспекторъ по учебной части.

3. Члены Испытательной Комиссіи назначаются Министромъ Торговли и Промышленности. Въ составъ Комиссіи входитъ Окружный Инспекторъ по учебной части Кіевскаго района.

4. Къ вѣдѣнію Испытательной Комиссіи относятся:

а) пріемъ прошеній лицъ, желающихъ подвергнуться испытаніямъ на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, состоящихъ въ вѣдѣніи Министерства Торговли и Промышленности;

б) производство означенныхъ испытаній и

в) обсужденіе результатовъ таковыхъ испытаній.

II. Объ испытаніяхъ.

5. Штатными преподавателями и преподавательницами спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности, общественныхъ и частныхъ, опредѣляются лица получившія свидѣтельства на право преподаванія сихъ предметовъ.

6. Означенныя въ § 5 свидѣтельства выдаются Учебнымъ Отдѣломъ Министерства Торговли и Промышленности по успѣшномъ выдержаніи въ Испытательной Комиссіи дополнительныхъ испытаній, установленныхъ настоящими правилами.

Примѣчаніе. 1. Сіи испытанія производятся по программамъ, утвержденнымъ Министромъ Торговли и Промышленности 26 мая 1909 года.

Примѣчаніе. 2. Указанныя въ § 5 свидѣтельства выдаются, на право преподаванія въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ, лицамъ, окончившимъ курсъ въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, при чемъ свидѣтельства на право преподаванія политической экономіи и законовѣдѣнія могутъ быть выдаваемы только лицамъ, получившимъ политико-экономическое и юридическое образованіе въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, а товаровѣдѣнія и химіи—лицамъ, получившимъ высшее образованіе на естественныхъ отдѣленіяхъ физико-математическихъ факультетовъ университетовъ или соотвѣтствующее образованіе въ другихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. На право же преподаванія въ торговыхъ школахъ и классахъ-лицамъ, окончившимъ курсъ въ среднихъ (преимущественно коммерческихъ) учебныхъ заведеніяхъ или въ учительскихъ институтахъ.

Примѣчаніе. 3. На право преподаванія бухгалтеріи и коммерческой корреспонденціи въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ разрядовъ выдаются свидѣтельства и лицамъ, окончившимъ курсъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ или въ учительскихъ институтахъ. На право преподаванія тѣхъ же предметовъ въ торговыхъ школахъ и классахъ могутъ быть выдаваемы свидѣтельства также и лицамъ, кои, не имѣя указаннаго общеобразовательнаго ценза, представятъ удостовѣренія или о своей преподавательской дѣятельности, или о службѣ въ торгово-промышленныхъ учрежденіяхъ, свидѣтельствующей о практическомъ знакомствѣ ихъ съ предметомъ.

7. Испытанія въ Комиссіи производятся однажды въ годъ въ срокъ, по представленію Совѣта Института и утвержденію Министра Торговли и Промышленности.

8. Къ испытаніямъ допускаются лица обоего пола, не моложе 20-лѣтняго возраста.

9. Лица, желающія получить свидѣтельства на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, подаютъ прошенія за одинъ мѣсяцъ до назначеннаго для испытаній срока въ Испытательную Комиссію на простой бумагѣ о допущеніи ихъ къ испытаніямъ, съ обозначеніемъ избираемаго ими для преподаванія предмета и разряда учебнаго заведенія, въ которомъ они желаютъ и по своему образовательному цензу имѣютъ право преподавать. Къ прошенію прилагаются слѣдующіе документы: 1) свидѣтельство о рожденіи, 2) аттестатъ или свидѣтельство объ окончаніи курса въ томъ или другомъ учебномъ заведеніи и 3) автобіографическія свѣдѣнія.

10. Каждое испытуемое лицо подвергается испытанію:

1) изъ избраннаго имъ для преподаванія предмета, являющагося для него главнымъ и

2) изъ соотвѣтственныхъ вспомогательныхъ предметовъ, указанныхъ въ прилагаемомъ къ сему расписаніи, (см. таб. на 40 стр.)

11. Испытанія по главному предмету состоятъ изъ:

1) письменнаго и устнаго экзаменовъ по программамъ, приложеннымъ къ настоящимъ правиламъ,

2) пробныхъ уроковъ или пробныхъ лекцій,

3) педагогической подготовки въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ, съ отчетомъ о ней, и

4) разбора учебныхъ руководствъ и пособій.

Примѣчаніе. Пробные уроки устанавливаются для лицъ, которыя подвергаются письменнымъ и устнымъ испытаніямъ, а пробныя лекціи—для лицъ, освобожденныхъ отъ таковыхъ испытаній.

12. Испытанія по каждому вспомогательному предмету, кромѣ коммерческой корреспонденціи, состоятъ изъ одного только устнаго экзамена по программамъ, приложеннымъ къ настоящимъ правиламъ, а по коммерческой коресподенціи — въ составленіи писемъ на заданныя темы.

Примѣчаніе 1. На право преподаванія коммерческой ариѳметики въ торговыхъ школахъ и классахъ экзамены по ариѳметикѣ, алгебрѣ и геометріи производятся въ объемѣ курса общеобразовательныхъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Примѣчаніе 2. На право преподаванія коммерческой географіи, коммерціи и товаровѣдѣнія въ торговыхъ школахъ и

РАСПИСАНІЕ

главныхъ и вспомогательныхъ предметовъ, по коимъ должны быть сдаваемы экзамены.

Главные предметы.	Учебныя заведенія, на право преподаванія въ которыхъ производится экзаменъ.	Вспомогательные предметы.
1. Бухгалтерія.	Коммерческія учебныя заведенія всѣхъ разрядовъ.	1. Коммерческая ариѳметика. 2. Законовѣдѣніе. 3. Политическая экономія. 4. Коммерческая корреспонденція.
2. Коммерческая корреспонденція на русскомъ языкѣ.		1. Бухгалтерія. 2. Коммерческая ариѳметика. 3. Торговое право.
3. Коммерческая ариѳметика.		1. Теоретич. ариѳметик. 2. Алгебра. 3. Геометрія. 4. Тригонометрія. 5. Основанія аналитической геометріи.
	Торговые школы и классы	1. Ариѳметика. 2. Алгебра. 3. Геометрія.
4. Коммерція.		1. Бухгалтерія. 2. Законовѣдѣніе. 3. Политическая экономія.
5. Коммерческая географія.	Коммерческія учебныя заведенія всѣхъ разрядовъ.	1. Общая географія (математ., физич. и политическая). 2. Теорія статистики 3. Политическая экономія.
	Торговые школы и классы.	1. Общая географія. 2. Политическая экономія.
6. Товаровѣдѣніе.		1. Физика. 2. Химія. 3. Естествовѣдѣніе. 4. Коммерческая географія.
	Коммерческія учебныя заведенія всѣхъ разрядовъ.	1. Коммерческая географія.

классахъ экзамены по вспомогательнымъ предметамъ производятся въ объемѣ курса коммерческихъ училищъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности:

13. Освобождаются:

1) отъ письменнаго и устнаго экзаменовъ по главному предмету и отъ устнаго экзамена по каждому вспомогательному предмету — лица, получившія соотвѣтствующее высшее образованіе, если изъ представленныхъ ими аттестатовъ видно, что они выдержали успѣшно экзаменъ по этому предмету;

2) отъ экзаменовъ по всѣмъ вспомогательнымъ предметамъ — лица, окончившія курсъ коммерческихъ училищъ съ отличіемъ (медалью), при соисканіи права преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ торговыхъ школахъ, торговыхъ классахъ и на бухгалтерскихъ и счетоводныхъ курсахъ;

3) отъ устнаго и письменнаго экзаменовъ по главному предмету и отъ экзаменовъ по всѣмъ вспомогательнымъ предметамъ — лица, имѣющія аттестаты объ окончаніи коммерческихъ курсовъ, указанныхъ въ ст. 67 объ измѣненіи положенія о коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ 10 іюня 1900 года, если Министромъ Торговли и Промышленности такое право будетъ предоставлено курсамъ;

4) отъ педагогической подготовки въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ - лица, преподававшія въ учебныхъ заведеніяхъ не менѣе одного года, но не иначе, какъ по полученіи отъ начальства сихъ учебныхъ заведеній одобрительнаго отзыва о ихъ педагогической дѣятельности;

5) отъ пробныхъ уроковъ — лица, еще ранѣе допущенныя къ преподаванію избраннаго ими главнаго предмета, если Окружнымъ Инспекторомъ по учебной части будетъ данъ одобрительный отзывъ объ ихъ урокахъ, состоявшихся въ его присутствіи;

6) отъ пробныхъ лекцій — лица, извѣстныя своей педагогической дѣятельностью и научными трудами по избранному ими главному предмету, или сдавшія магистерскій экзаменъ по соотвѣтствующей спеціальности;

7) отъ разбора учебныхъ руководствъ или пособій — лица, извѣстныя своими научными трудами, свидѣтельствующими, по мнѣнію Испытателей Комиссіи, о знакомствѣ ихъ съ избраннымъ ими главнымъ предметомъ.

14. Испытуемому лицу предоставляется избрать главнымъ не одинъ, а нѣсколько предметовъ. Въ этомъ случаѣ онъ подчиняется всѣмъ правиламъ, относящимся къ испытаніямъ по каждому избранному имъ главному предмету.

15. Порядокъ испытаній слѣдующій:

1) письменный экзаменъ по главному предмету,

2) устный экзаменъ по главному предмету,

3) экзамены по вспомогательнымъ предметамъ,

4) педагогическая подготовка въ коммерческомъ учебномъ заведеніи и письменный отчетъ о ней,

5) пробный урокъ и

6) письменный разборъ учебныхъ руководствъ или пособій, или иныя письменныя работы, по избранному испытуемымъ главному предмету, по указанію Коммисіи.

Примѣчаніе. По желанію испытуемаго, помянутыя въ семъ параграфѣ письменныя работы могутъ быть представлены имъ и ранѣе указанной очереди.

16. Письменный экзаменъ состоитъ въ изложеніи на письмѣ, въ присутствіи Испытателей Комиссіи, отвѣта на заданную по главному предмету тему, объявляемую экзаменующимся предсѣдателемъ Испытальной Комиссіи непосредственно передъ началомъ экзамена. Отвѣтъ долженъ быть изложенъ экзаменующимся совершенно самостоятельно. Справки и вообще какія-либо пособія допускаются при исполненіи письменной работы только съ особаго разрѣшенія предсѣдателя.

Примѣчаніе. Письменные отвѣты на предложенныя темы по бухгалтеріи и коммерческой корресподенціи должны быть и съ внѣшней стороны исполнены съ возможной тщательностью, необходимою на практикѣ при веденіи книгъ и составленіи писемъ, а также съ соблюденіемъ законныхъ требованій.

17. На устныхъ экзаменахъ по главному и вспомогательному предметамъ и на письменномъ испытаніи по коммерческой корреспонденціи, какъ вспомогательному предмету, экзаменующимся предлагаются по жребію, вынимаемому ими самими, билетъ по каждому изъ предметовъ экзамена. Сверхъ того, члены Испытательной Комиссіи могутъ задавать экзаменующимся вопросы, въ предѣлахъ экзаменаціонной программы.

18. Письменные и устные экзамены должны быть совершенно закончены въ сроки, опредѣляемые Испытательной Комиссіей.

19. Лица, допущенныя Испытательной Комиссіей къ педагогической подготовкѣ въ коммерческомъ учебномъ заведеніи, обязаны по указанію начальства заведенія посѣщать въ немъ уроки, подъ руководствомъ преподавателей, и подъ наблюденіемъ начальства исполнять всѣ порученныя имъ работы. По истеченіи не менѣе 3-хъ мѣсячной педагогической подготовки въ учебномъ заведеніи, испытуемый обязанъ представить въ Испытательную Комиссію подробный письменный отчетъ о своихъ занятіяхъ.

Педагогическая подготовка испытуемаго признается выполненной успѣшно или неуспѣшно на основаніи представленнаго испытуемымъ отчета и на основаніи отзыва о его занятіяхъ начальства того учебнаго заведенія, къ которому былъ прикомандированъ испытуемый.

20. Пробныхъ лекцій по избранному испытуемымъ главному предмету назначаются двѣ: первая—на тему по собственному выбору испытуемаго, вторая — на тему по назначенію Комиссіи. Срокъ на приготовленіе послѣдней лекціи назначается не болѣе недѣли.

21. Пробная лекція излагается устно. Испытуемый можетъ имѣть передъ собой конспектъ лекціи, который передъ началомъ испытанія предъявляется Испытательной Комиссіи для ознакомленія съ нимъ. Пробная лекція продолжается не болѣе одного часа и не должна быть прерываема присутствующими. Право перерыва лекціи, если въ томъ встрѣтится надобность, принадлежитъ исключительно предсѣдателю Испытательной Комиссіи. Вопросы и замѣчанія испытуемому могутъ быть предложены членами Комиссіи только по окончаніи пробной лекціи.

22. Пробный урокъ дается испытуемымъ въ одномъ изъ коммерческихъ учебныхъ заведеній въ присутствіи Комиссіи, состоящей изъ одного изъ членовъ Испытательной Комиссіи, завѣдующаго учебной частью заведенія и преподавателя того предмета, на право преподаванія котораго испытуемый желаетъ получить свидѣтельство. Тема пробнаго урока предлагается Комиссіей не менѣе, какъ за одинъ день до урока По окончаніи этого урока можетъ происходить собесѣдованіе членовъ Комиссіи съ испытуемымъ.

Примѣчаніе 1. Въ Комиссіи для пробнаго урока вмѣсто члена Испытательной Комиссіи можетъ присутствовать по назначенію Учебнаго Отдѣла мѣстный Окружный Инспекторъ.

Примѣчаніе 2. Пробный урокъ въ учебномъ заведеніи, по усмотрѣнію Испытательной Комиссіи, можетъ быть замѣненъ и пробной лекціей въ присутствіи сей Комиссіи.

23. Кромѣ педагогической подготовки и пробнаго урока, испытуемый долженъ представить въ Испытательную Комиссію подробный отчетъ объ учебныхъ руководствахъ и другихъ учебныхъ пособіяхъ по избранному имъ главному предмету преподаванія. Въ письменномъ отчетѣ о руководствахъ или пособіяхъ испытуемый долженъ выказать достаточное для преподавателя знакомство съ учебной литературой по данному предмету и самостоятельное сужденіе о достоинствахъ или недостаткахъ того или другого учебнаго руководства или пособія. По поводу представленнаго отчета Испытательной Комиссіи можетъ быть назначена испытуемому дополнительно устная бесѣда.

III. О цѣляхъ разныхъ видовъ испытаній.

24. Письменный и устный экзамены производятся съ тою цѣлью, чтобы удостовѣриться, имѣютъ ли лица, ищущія право на преподаваніе какого-либо предмета, необходимыя для сего познанія, какъ въ избранномъ ими главномъ предметѣ, такъ и въ предметахъ вспомогательныхъ, находящихся въ связи съ нимъ.

25. Педагогическая подготовка въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ устанавливается съ той цѣлью, чтобы дать экзаменующемуся возможность ознакомиться съ пріемами преподаванія и предоставить ему самому возможную практику, а письменные отчеты о таковой подготовкѣ имѣютъ цѣлью узнать результатъ этихъ занятій.

26. Пробный урокъ назначается испытуемому съ той цѣлью, чтобы удостовѣриться въ способности и умѣніи его преподавать предметъ ясно и вполнѣ доступно пониманію учащихся.

27. Пробныя лекціи назначаются испытуемому съ цѣлью удостовѣриться не только въ томъ, имѣетъ ли онъ надлежащія для преподаванія свѣдѣнія по избранному имъ главному предмету, но и въ способности его къ научному и ясному для пониманія учащихся изложенію предмета.

28. Письменный отчетъ о руководствахъ или пособіяхъ или иныя письменныя работы, по предложенію Комиссіи, имѣютъ цѣлью удостовѣриться въ знакомствѣ испытуемаго съ учебной литературой по избранному имъ главному предмету и въ умѣніи критически въ ней разобраться.

IV. О порядкѣ дѣлопроизводства испытаній, выдачи свидѣтельствъ и допущеніи къ повторнымъ испытаніямъ.

29. Дѣлопроизводство въ Испытательной Комиссіи возлагается на Канцелярію Кіевскаго Коммерческаго Института.

30. Принятыя Канцеляріей прошенія посылаются на разсмотрѣніе въ Учебный Отдѣлъ Министерства Торговли и Промышленности и, по разсмотрѣніи ихъ въ Испытательной Комиссіи при Учебномъ Отдѣлѣ, пересылаются въ Кіевскую Комиссію.

31. О произведенныхъ испытаніяхъ составляется протоколъ за подписью предсѣдателя и членовъ Испытательной Комиссіи, равно и приглашенныхъ для производства испытаній лицъ. Въ протоколѣ должны быть указаны отдѣльно темы, какъ письменныхъ и устныхъ отвѣтовъ экзаменовавшихся, такъ и пробныхъ лекцій и уроковъ, съ присоединеніемъ оцѣнки достоинства всѣхъ видовъ испытаній.

Члены, несогласные съ рѣшеніемъ Комиссіи, подаютъ, если пожелаютъ, особыя мнѣнія, которыя должны быть вручены предсѣдателю Испытательной Комиссіи не позже, какъ черезъ три дня послѣ засѣданія. Къ протоколу прилагаются конспекты пробныхъ лекцій и пробныхъ уроковъ и вообще все, то что признано будетъ необходимымъ Испытательною Комиссіею.

32. Достоинство экзаменныхъ отвѣтовъ, пробныхъ лекцій, пробныхъ уроковъ и всѣхъ другихъ видовъ испытаній опредѣляется Испытательной Комиссіей отмѣтками: удовлетворительно и неудовлетворительно.

33. Протоколы Испытательной Комиссіи о произведенныхъ ею испытаніяхъ съ письменными работами экзаменовавшихся и общее сужденіе Комиссіи о результатахъ испытаній, вмѣстѣ съ особыми мнѣніями ея членовъ, если таковыя будутъ поданы, представляются въ Учебный Отдѣлъ Министерства Торговли и Промышленности для постановленія въ Испытательной Комиссіи при Отдѣлѣ о выдачѣ свидѣтельствъ.

34. Учебный Отдѣлъ Министерства Торговли и Промышленности, по расмотрѣнію Учебнымъ Комитетомъ заключенія Кіевской Испытательной Комиссіи о результатахъ произведенныхъ испытаній и постановленія Испытательной Комиссіи при Учебномъ Отдѣлѣ о выдачѣ свидѣтельствъ, выдаетъ съ утвержденія Товарища Министра Торговли и Промышленности, выдержавшему испы-

танія свидѣтельство на право преподаванія спеціальныхъ предметовъ въ соотвѣтствующихъ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ названнаго Министерства.

35. Испытуемый, не явившійся на устный или письменный экзаменъ въ назначенный срокъ или прервавшій экзаменъ, лишается права продолжать экзаменъ и можетъ возобновить его съ самаго начала не ранѣе, какъ въ слѣдующую сессію Испытательной Комиссіи. Въ случаѣ неявки безъ уважительныхъ причинъ къ пробной лекціи или къ пробному уроку въ назначенный срокъ, испытуемый лишается права читать лекцію или давать урокъ на ту же тему, но можетъ получить взамѣнъ ея другую, на опредѣленный же срокъ. Если испытуемый не явится и ко вторичному сроку, то новая тема можетъ быть назначена, по его прошенію о томъ, не ранѣе, какъ по истеченіи года со дня вторичнаго срока. Пропускъ третьяго срока влечетъ за собою лишеніе права на допущеніе къ испытанію. Неявившіеся безъ уважительныхъ причинъ для педагогической подготовки въ назначенное имъ учебное заведеніе въ теченіе одного года со времени сдачи испытаній, указанныхъ въ § 15, теряютъ право на полученіе свидѣтельства на званіе преподавателя спеціальныхъ предметовъ въ коммерческихъ учебныхъ заведеніяхъ вѣдомства Министерства Торговли и Промышленности.

36. Лица, не выдержавшія испытаній, могутъ ходатайствовать о допущеніи ихъ къ новымъ испытаніямъ въ слѣдующія сессіи Испытательной Комиссіи.

Подписалъ: Управляющій Учебнымъ Отдѣломъ **А. Лагоріо.**

Скрѣпилъ: Начальникъ Отдѣленія **Аглаимовъ.**

Вѣрно: Начальникъ Отдѣленія **Аглаимовъ.**

Свѣрялъ: Столоначальникъ.

„Извѣстія Кіевскаго Коммерч. Института"

выходятъ 4—6 разъ въ годъ по мѣрѣ накопленія матеріала въ редакціи. Кромѣ оффиціальныхъ свѣдѣній о дѣятельности Института и состоящихъ при немъ учрежденій въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются и научные труды преподавателей Института.

Подписная цѣна на годъ для слушателей Института **2** руб. и для постороннихъ лицъ **3** руб. безъ пересылки (на пересылку 50 коп.).

Цѣна отдѣльной книжки **75** коп. для постороннихъ и **50** коп. для слушателей.

Редакторъ **А. А. Русовъ.**

Изданія Кіевскаго Коммерческаго Института:

	ЦѢНА.
„Извѣстія Кіевскаго Коммерческаго Института". Выходятъ 4—6 разъ въ годъ; цѣна **2** руб. **для студентовъ К. К. Института** и **3** руб. для постороннихъ; отдѣльныя книги	50 и 75 коп.
В. Г. Бажаевъ. Къ вопросу о законахъ аграрной эволюціи.	15
И. В. Егоровъ. Техническій анализъ. Кіевъ 1909 г.	2 р. —
Кэтлэ. Соціальная физика. Т. I. (Переводъ студентовъ Института)	2 р. —
Труды Общества экономистовъ при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ. Кіевъ. Вып. I 1910 г.	50 „
Труды Общества Экономистовъ. Кіевъ. Вып. II. 1910 . . .	1 р. —
И. В. Егоровъ. Объ окиси декаметиленгликоля.	10 „
Записка о Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ изд. **1909** г. .	15 „
Записка о Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ изд. **1910** г. .	25 „
Отчетъ о музеѣ товаровѣдѣнія при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ г. Кіевъ 1910 г.	25 „
Обозрѣніе преподаванія на 1911—1912 академическій годъ въ Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ. Кіевъ 1911 г.	20 „
М. В. Довнаръ-Запольскій. На зарѣ крестьянской свободы. Кіевъ. 1911	1 р. —
Означенныя книги продаются у кассира Института; у него же продаются:	
М. В. Довнаръ-Запольскій. Изъ исторіи общественныхъ теченій въ Россіи, изд. 2-ое. Кіевъ 1910 г.	1 р. 50 „
Его-же. Русская Исторія т. I, изд. 2-ое	2 р. — „
т. II.	2 р. — „
Его-же. Изслѣдованія (этнографія и соціологія, обычное право и статистика). Кіевъ 1909 г.	3 р. „

90-00