ИЗВѢСТІЯ
Кіевскаго Коммерческаго
ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга IX.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Фундуклеевская ул., д. № 22.
1911.

ИЗВѢСТІЯ
Кіевскаго Коммерческаго
ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга IX.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Фундуклеевская ул., д. № 22.
1911.

ИЗВѢСТІЯ
Кіевскаго Коммерческаго
ИНСТИТУТА,

состоящаго въ вѣдѣніи Министерства Промышленности и Торговли.

1911.

Книга IX.

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Фундуклеевская ул., д. № 22.
1911.

Печатано по опредѣленію Учебнаго Комитета Кіев. Коммерч. Института.
Директоръ **М. Довнаръ-Запольскій.**

Содержаніе.

ОПЕЧАТКИ.

Энциклопедія математики.

СТРАНИЦЫ.	СТРОКА.	НАПЕЧАТАНО:	СЛѢДУЕТЪ ЧИТАТЬ:
20	15 снизу	$= \alpha\,(\cos\beta + i\,\sin)$	$= \alpha\,(\cos\beta + i\,\sin\beta)$
89	14 сверху	§ 74	§ 72

Энциклопедія математики.

Проф. **Д. Граве.**

§ 1. Математика—одна изъ древнѣйшихъ наукъ; ея начало теряется во мракѣ доисторическихъ временъ. Вызванная потребностями обыденной жизни, потребностями въ счетѣ и измѣреніяхъ протяженныхъ величинъ, она въ теченіи вѣковъ получила большое развитіе, такъ что было бы затруднительно въ краткихъ словахъ характеризовать современное ея положеніе въ полномъ объемѣ. Собственно говоря, трудно даже дать вполнѣ удовлетворительную съ логической точки зрѣнія классификацію математическихъ наукъ; чтобы не быть голословнымъ, я разсмотрю обычные пріемы раздѣленія математики.

§ 2. Обычное раздѣленіе математики на элементарную и высшую не выдерживаетъ строгой критики, такъ какъ не существуетъ объективныхъ признаковъ такой классификаціи. Въ настоящее время во всѣхъ государствахъ раздаются голоса о реформѣ преподаванія математики въ средней школѣ; одно изъ главныхъ теченій состоитъ въ томъ, что считаютъ полезнымъ ввести въ среднюю школу начала высшей математики; съ другой стороны нѣкоторые отдѣлы, преподававшіеся до сихъ поръ въ средней школѣ, считаются относящимися къ высшей математикѣ, какъ напримѣръ биномъ Ньютона и непрерывныя дроби. Итакъ, объективныхъ признаковъ для того, чтобы судить, къ низшей или высшей математикѣ относится какая нибудь задача или теорема, мы не видимъ.

§ 3. Другое раздѣленіе математики—есть раздѣленіе ея на чистую и прикладную; въ русскихъ университетахъ существуютъ каѳедры чистой и прикладной математики. Это раздѣленіе не классифицируетъ матеріала математики, а говоритъ только о задачахъ и цѣляхъ изслѣдованія. Тотъ, кто разсматриваетъ какую нибудь математическую теорію съ намѣреніемъ примѣнить ее въ натуральной философіи, въ техникѣ или въ наукахъ общественныхъ или политическихъ, является лицомъ, занимающимся прикладной математикой; если онъ ту же самую теорію разсматриваетъ съ точки зрѣнія общефилософской, то онъ является представителемъ математики чистой. Такимъ образомъ и этотъ способъ дѣленія не характеренъ.

§ 4. Въ послѣднее время, въ XIX вѣкѣ выработалось раздѣленіе математики на отдѣлы, назовемъ его школьнымъ; я привожу его:

- I. Анализъ
  - *A.* Ариѳметика
  - *B.* Алгебра
    - элементарная
    - высшая
  - *C.* Тригонометрія
  - *D.* Трансцендентный анализъ
    - дифференціальное исчисленіе
    - интегральное „
    - разностное „
    - варіаціонное „
- II. Геометрія
  - *A.* Чистая
  - *B.* Аналитическая
  - *C.* Проэктивная
  - *D.* Начертательная
  - *E* Analysis situs (геом. положенія)
  - *F.* Дифференціальная
    - приложенія диф. исчисленія
    - приложенія инт. исчисленія
- III. Механика
  - *A.* Кинематика
  - *B.* Динамика
    - Статика
    - Кинетика
  - *C.* Гидродинамика
  - *D.* Теорія упругости
- IV. Математическая физика
- V. Теорія вѣроятностей.

§ 5. Современная наука не мирится однако съ такимъ раздѣленіемъ матеріала. Стремясь къ нахожденію единства въ разнообразіи, она находитъ значительную связь и взаимодѣйствіе между отдѣльными частями указанной таблицы. Много теорій, созданныхъ въ послѣднее время, прямо не укладываются въ рамки этой классификаціи; я упомяну о четырехъ изъ нихъ.

Возьмемъ, напримѣръ, такъ называемую теорію функцій. Жизнь, которая проявляется въ перемѣнѣ и движеніи, вызвала разсмотрѣніе перемѣнныхъ величинъ; эта часть математики разрослась въ громадный отдѣлъ, носящій названіе теоріи функцій.

Теорія чиселъ—даетъ второй примѣръ такой теоріи. Теорія чиселъ началась съ простыхъ теоремъ, относящихся къ свойствамъ чиселъ натуральнаго ряда, изложенныхъ еще въ „Началахъ“ Эвклида. Эти начала теперь мы вводимъ во всѣ начальные курсы ариѳметики; теорія чиселъ разрослась въ настоящее время въ большую доктрину и дошла до созданія новыхъ чиселъ, названныхъ идеальными. Она въ настоящемъ своемъ развитіи не подходитъ ни подъ одну изъ рубрикъ школьной классификаціи, какъ и теорія функцій.

Какъ третій примѣръ разсмотримъ теорію группъ. Она характеризуется тѣмъ, что ищетъ общіе законы въ совершенно различныхъ частяхъ математики. Примѣромъ можетъ служить слѣдующее обстоятельство: изученіе свойствъ уравненія пятой степени сводится къ изученію свойствъ правильнаго многогранника, называемаго икосаедромъ. Профессоръ Klein университета въ Göttingen'ѣ написалъ книгу, которую озаглавилъ: „Ученіе объ икосаедрѣ“. Эта книга заключаетъ не что иное, какъ теорію уравненій пятой степени.

Теорія числовыхъ множествъ или ансамблей (Mengenlehre)—представляетъ изъ себя четвертый примѣръ большой теоріи, не умѣщающейся въ рамкахъ школьной классификаціи. Имѣя дѣло съ идеей безконечности, она въ своихъ мечтаніяхъ доходитъ до чиселъ большихъ безконечности, называемыхъ трансфинитными.

§ 6. Итакъ, мы имѣемъ рядъ большихъ отдѣловъ математики, не укладывающихся въ школьную систему раздѣленія. Поэтому, предполагая дать обзоръ современнаго состоянія математики, я долженъ буду не придерживаться какого нибудь шаблоннаго раздѣленія математики по отдѣламъ, а стараться обратить ваше вниманіе на главнѣйшія задачи, рѣшеніемъ которыхъ занимается современная математика, и на главнѣйшіе методы изслѣдованія, употребляемые въ настоящее время; такимъ образомъ передъ вашими глазами предстанетъ картина того, что мы называемъ въ настоящее время математикой.

ГЛАВА I.

Невозможныя задачи и ихъ роль въ математикѣ.

§ 1. Всѣ задачи, рѣшеніемъ которыхъ занимается математика, очень разнообразны, но все же можно указать два типа задачъ, наиболѣе часто встрѣчающихся. Въ задачахъ перваго типа требуется доказательство нѣкотораго положенія, нѣкоторой теоремы --задача состоитъ въ доказательствѣ, которое можетъ быть какъ положительнаго, такъ и отрицательнаго характера, т. е. мы доказываемъ или существованіе или отсутствіе какого нибудь факта. Въ литературѣ относительно такого рода задачъ очень часто употребляются термины: строгое и нестрогое доказательство. Съ строго логической точки зрѣнія мы имѣемъ дилемму: или доказательство или отсутствіе его; однако, исторія точнѣйшей изъ всѣхъ наукъ, математики, на каждомъ шагу даетъ намъ примѣры доказательствъ и строгихъ и нестрогихъ. Причины этого слѣдующія: въ доказательствѣ, считавшемся раньше выполненнымъ, убѣдительнымъ и строгимъ, съ теченіемъ времени находили иногда ошибки, неточности и нестрогости; доказательство исправлялось или видоизмѣнялось, дѣлалось, какъ говорятъ, строгимъ. Иногда новое доказательство дѣлало прежнее совершенно излишнимъ, иногда доказательство продолжало существовать въ двухъ видахъ. Исторія математики имѣетъ даже такой примѣръ, что предложеніе, которое высказывалось на лекціяхъ выдающимися профессорами, какъ очевидное, оказалось невѣрнымъ. Съ другой стороны очень многіе находятъ полезнымъ для прогресса науки указывать новыя теоремы, хотя бы и не умѣя ихъ строго доказывать. Къ этому мнѣнію можно смѣло присоединиться: появленіе въ большомъ количествѣ новаго матеріала, хотя бы и не вполнѣ обработаннаго, значительно расширяетъ кругозоръ и потому очень важно; улучшеніе же строгости доказательствъ есть дѣло времени; это мы видимъ изъ примѣровъ исторіи. Всѣ нестрогія доказательства, всѣ парадоксы и софизмы въ математикѣ были временны; доказательства обращались всегда въ строгія, парадоксы и софизмы разрѣшались, математика всегда выходила съ честью изъ затруднительнаго положенія. Увѣренность въ точности выводовъ математики не была никогда поколеблена, наоборотъ, появлялись новые, болѣе строгіе пріемы.

Обратимся къ задачамъ другого рода, задачамъ, въ которыхъ по нѣкоторымъ даннымъ ищутся новые, неизвѣстные элементы. Въ большинствѣ случаевъ можно сказать, что ищутся нѣкоторыя числа; почти всѣ задачи можно свести къ этому.

§ 2. Подъ рѣшеніемъ какой нибудь математической задачи мы разумѣемъ слѣдующій процессъ: всю математику мы разбиваемъ на рядъ задачъ, переходя отъ болѣе простыхъ къ болѣе сложнымъ; рѣшить какую нибудь задачу, это значитъ свести ея рѣшеніе къ рѣшенію ряда предыдущихъ задачъ, которыя нами уже разобраны и которыя рѣшать мы уже умѣемъ. Простѣйшими изъ этихъ задачъ являются, конечно, тѣ, которыя относятся къ четыремъ дѣйствіямъ ариѳметики: сложенію, вычитанію, умноженію и дѣленію.

§ 3. Рѣшеніе такихъ простыхъ задачъ, часто необходимое въ математикѣ, мы называемъ математическими операціями или математическими дѣйствіями. Если мы свели рѣшеніе какой нибудь задачи къ рѣшенію ряда такихъ простѣйшихъ задачъ, то это значитъ, что мы свели нахожденіе чиселъ къ ряду операцій; такой рядъ дѣйствій или операцій, который служитъ для рѣшенія какой нибудь задачи, мы называемъ *алгоритмомъ*. Итакъ, алгоритмъ представляетъ собой ту программу дѣйствій, которую надо выполнить, чтобы получить изъ данныхъ чиселъ искомыя. Алгоритмъ въ анализѣ соотвѣтствуетъ до нѣкоторой степени въ геометріи построенію, въ механикѣ—модели, воспроизводящей какое нибудь движеніе.

§ 4. Несмотря на большой промежутокъ времени, пережитый математикой, число простыхъ задачъ, которыя мы можемъ свести къ основнымъ математическимъ операціямъ, не велико; между тѣмъ, практическая жизнь, окружающая насъ съ одной стороны, и философская пытливость нашего ума съ другой — ставятъ намъ все новыя и новыя задачи; число ихъ растетъ. Ньютонъ сказалъ: я не знаю, что обо мнѣ думаютъ люди, но я самъ себѣ кажусь похожимъ на мальчика, собирающаго камешки на берегу, тогда какъ океанъ скрываетъ истину отъ глазъ моихъ.

§ 5. Что же дѣлать, если нѣкоторыя задачи появляются и не могутъ быть рѣшены при помощи извѣстныхъ намъ задачъ? Математика даетъ намъ два пути. Первый состоитъ въ расширеніи понятія о числѣ, въ расширеніи основныхъ математическихъ понятій, во введеніи новыхъ понятій, при помощи которыхъ эти задачи могутъ быть разрѣшены. Этотъ путь чисто научный. Другой путь, который избирается прикладной математикой, состоитъ въ слѣдующемъ: если нельзя рѣшить какую нибудь задачу при помощи алгоритма, состоящаго изъ конечнаго числа дѣйствій, то нужно попробовать составить алгоритмъ изъ безконечнаго числа дѣйствій, такимъ образомъ, чтобы, производя въ этомъ алгоритмѣ все бóльшее число дѣйствій, мы приближались бы къ искомому результату; если нельзя получить точнаго результата, мы ограничиваемся приближеннымъ рѣшеніемъ. Приближенное рѣшеніе нельзя назвать неправильнымъ рѣшеніемъ; не только въ прикладной, но и въ чистой математикѣ мы встрѣчаемся съ теоретическими вопросами, въ которыхъ приходится имѣть дѣло съ безконечнымъ алгоритмомъ. Нужно только обратить вниманіе на то обстоятельство, что характеръ приближеннаго рѣшенія математической задачи можетъ быть различенъ. Если удалось найти такое приближенное рѣшеніе задачи, которое позволяетъ приблизиться къ искомому результату съ произвольной, заранѣе выбранной степенью точности, то мы считаемъ его всегда настоящимъ, т. е. удовлетворяющимъ требованіямъ чистой математики. Напримѣръ, разсматривая квадратный корень изъ какого нибудь цѣлаго числа, не представляющаго квадрата другого цѣлаго числа, мы можетъ этотъ корень представить въ видѣ безконечной непеpіодической десятичной дроби; послѣдовательное вычисленіе цифръ этой дроби даетъ намъ рядъ приближенныхъ значеній; точнаго результата такимъ путемъ получить нельзя. Однако въ нашемъ умѣ складывается убѣжденіе, что этотъ рядъ цифръ вполнѣ опредѣленъ, т. е. что на всякомъ сколь угодно далекомъ мѣстѣ находится опредѣленная цифра. Для полученія нужной точности приближеннаго значенія придется только достаточно далеко провести алгоритмъ послѣдовательнаго вычисленія цифръ. Въ математикѣ такое приближенное рѣшеніе приходится считать за точное.

§ 6. Въ прикладной математикѣ приходится ограничиваться приближенными знаніями менѣе совершеннаго характера; иногда мы довольствуемся рѣшеніемъ задачи съ данной степенью приближенія, хотя бы мы и не могли сдѣлать ее произвольно малой; иногда мы ограничиваемся приближенными рѣшеніями, степень точности которыхъ выясняется только по окончаніи задачи. Наконецъ въ прикладной математикѣ мы имѣемъ примѣры такихъ неудовлетворительныхъ съ математической точки зрѣнія пріемовъ приближенія, когда приходится наблюденіями устанавливать точность результата. Такъ нѣкоторыя приближенныя рѣшенія астрономическихъ задачъ съ математической точки зрѣнія можно было бы считать совершенно неудовлетворительными.

§ 7. Оставивъ пока въ сторонѣ вопросъ о приближенныхъ вычисленіяхъ, посмотримъ, къ какимъ новымъ теоретическимъ положеніямъ привели въ исторіи математики такъ называемыя невозможныя задачи, т. е. такія задачи, которыя не рѣшались на основаніи задачъ рѣшенныхъ раньше въ исторіи математики. Я хочу высказать нѣсколько смѣлое заявленіе: главный прогрессъ въ математикѣ происходитъ именно отъ такихъ задачъ, которыя были невозможны и требовали введенія въ науку новыхъ понятій и новыхъ методовъ. Поэтому первую главу своего курса я и посвящаю разсмотрѣнію главнѣйшихъ изъ этихъ задачъ, игравшихъ первостепенную роль въ исторіи математики.

Обобщеніе понятія о числѣ.

Числа раціональныя.

§ 8. Одно изъ первыхъ крупныхъ явленій въ математикѣ, явившихся слѣдствіемъ невозможныхъ задачъ, это обобщеніе понятія о числѣ. Сначала у насъ было только понятіе о рядѣ чиселъ натуральныхъ:

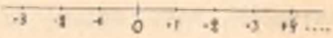
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . . . .

эти числа явились слѣдствіемъ счета предметовъ. Матеріалъ, даваемый этими числами, оказался недостаточнымъ для рѣшенія самыхъ простыхъ задачъ, и вотъ наступаетъ этапъ обобщенія понятія о числѣ: задача дѣленія цѣлаго числа на другое цѣлое число не всегда возможна, появилась необходимость въ созданіи *дробныхъ* чиселъ, чиселъ вида $\frac{m}{n}$. Подъ вліяніемъ геометрическихъ и другихъ соображеній явилась потребность сдѣлать всегда возможной задачу вычитанія, даже въ случаѣ вычитанія бо́льшихъ чиселъ изъ меньшихъ; появилось понятіе объ *отрицательномъ* числѣ. Послѣ введенія дробныхъ и отрицательныхъ чиселъ мы получили систему чиселъ, названныхъ *раціональными*. Для всѣхъ чиселъ этой системы всегда возможны первыя четыре дѣйствія ариѳметики.

Числа ирраціональныя.

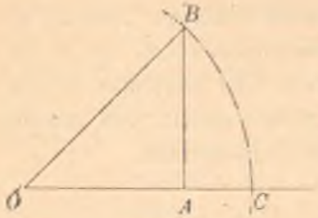
§ 9. Уже древніе греки замѣтили, что для рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ недостаточно чиселъ цѣлыхъ, дробныхъ и отрицательныхъ; появилась потребность въ дальнѣйшемъ обобщеніи понятія о числѣ, явились *ирраціональныя*, несоизмѣримыя числа; хорошее изложеніе началъ ученія о нихъ мы встрѣчаемъ уже у Эвклида, въ его „Началахъ“.

На произвольной прямой отъ точки O (черт. 1) будемъ откладывать единицу длины въ обѣ стороны отъ нея. Совокупность полученныхъ точекъ можно сравнить съ системой цѣлыхъ чиселъ, положительныхъ и отрицательныхъ. Точки, соотвѣтствующія дробнымъ числамъ, находятся въ промежуткахъ между дѣленіями. При продолженіи линіи до безконечности въ обѣ стороны точки, соотвѣтствующія всевозможнымъ раціональнымъ числамъ, плотно заполнятъ ее, т. е. на каждомъ, произвольно маломъ отрѣзкѣ прямой помѣстится безчисленное множество такихъ точекъ. Греческіе математики дали отвѣтъ на вопросъ, исчерпываются ли всѣ точки прямой точками, соотвѣтствующими раціональнымъ числамъ. Отвѣтъ былъ отрицательный. Оказывается, что между плотно заполняющими прямую раціональными точками существуютъ какіе-то промежутки нулевой длины, въ которые помѣщаются точки прямой, несоотвѣтствующіе уже раціональнымъ числамъ. Эти промежутки нулевой длины невозможно себѣ представить наглядно, но фактъ ихъ существованія остается. Такъ напримѣръ найдемъ точку, соотвѣтствующую новому, невозможному до сихъ поръ для насъ числу, квадратъ котораго равенъ 2. Для этого отложимъ длину, равную единицѣ,



Черт. 1.

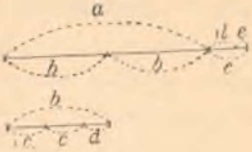
на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ точки A (черт. 2), соотвѣтствующей числу $+1$, радіусомъ равнымъ гипотенузѣ OB полученнаго прямоугольнаго треугольника OAB опишемъ дугу BC; точка C пересѣченія этой дуги съ нашей прямой OA будетъ искомой точкой, соотвѣтствующей числу, квадратъ котораго равенъ 2. Въ самомъ дѣлѣ теорема Пиѳагора даетъ намъ: $OB = \sqrt{OA^2 + BA^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Но, какъ мы знаемъ изъ элементарнаго курса, нельзя подобрать ни цѣлаго числа, ни дробнаго, т. е. отношенія двухъ цѣлыхъ чиселъ, квадратъ котораго былъ бы равенъ 2. Поэтому точка C находится гдѣ то въ промежуткѣ между раціональными точками; она и подобныя ей точки соотвѣтствуютъ нѣкоторымъ новымъ числамъ, которыя мы должны ввести, если хотимъ, чтобы система чиселъ, соотвѣтствовала системѣ точекъ, непревывно заполняющихъ прямую, чтобы каждой точкѣ соотвѣтствовало число, чего мы не имѣли раньше, и чтобы, какъ и прежде, каждому числу соотвѣтствовала точка на прямой.



Черт. 2.

§ 10. Обозначая символомъ R совокупность раціональныхъ чиселъ и символомъ W совокупность чиселъ новаго вида, ирраціональныхъ, и беря обѣ совокупности совмѣстно, мы получаемъ совокупность такъ называемыхъ *вещественныхъ* чиселъ, которую можемъ обозначить символомъ (R, W). Эта совокупность обладаетъ свойствомъ непрерывности и вслѣдствіе этого способна изображать всѣ точки непрерывной прямой линіи безъ пропуска. Процессъ сопоставленія протяженной величинѣ нѣкотораго числа называется измѣреніемъ. Слѣдовательно, эта система можетъ служить какъ бы масштабомъ измѣренія для всевозможныхъ непрерывно измѣняющихся протяженныхъ величинъ. Нѣкоторое частное значеніе протяженной величины при такомъ измѣреніи мы принимаемъ условно за единицу или, что то же, считаемъ этой величинѣ соотвѣтствующимъ число 1.

§ 11. Разсмотримъ задачу измѣренія длинъ; измѣренія всѣхъ остальныхъ протяженныхъ величинъ сводятся къ этому основному измѣренію. Эвклидъ далъ способъ рѣшенія этой задачи; геометрическій способъ ея рѣшенія представляетъ нахожденіе общей наибольшей мѣры. Положимъ, мы имѣемъ два отрѣзка (черт. 3); обозначимъ ихъ длины a и b. Построеніе Эвклида состоитъ въ томъ, что меньшій отрѣзокъ мы откладываемъ въ большемъ столько разъ, сколько это окажется возможнымъ; при этомъ могутъ быть два случая: или меньшій отрѣзокъ содержится цѣлое число разъ въ большемъ, тогда онъ будетъ общей наибольшей мѣрою между самимъ собой и большимъ отрѣзкомъ; или получится нѣкоторый остатокъ, меньшій, чѣмъ отрѣзокъ b;



Черт. 3.

$$a = bp_1 + c,$$

гдѣ p_1 число цѣлое. Подобнымъ же образомъ мы сравниваемъ отрѣзокъ b съ остаткомъ c и получаемъ

$$b = cp_2 + d$$

продолжая аналогичныя откладыванія получаемъ

$$c = dp_3 + e$$
$$d = ep_4 + f \text{ и т. д.}$$

Процессъ послѣдовательнаго откладыванія отрѣзковъ можетъ или кончиться, или нѣтъ; въ первомъ случаѣ послѣдній остатокъ, откладывающійся цѣлое число разъ въ предыдущемъ, будетъ, очевидно, общей наибольшей мѣрою для отрѣзковъ a и b, и отношеніе ихъ длинъ дастъ раціональное число; если при этомъ одинъ изъ отрѣзковъ мы примемъ за единицу, то отношеніе другого къ нему и будетъ числовымъ выраженіемъ длины этого другого отрѣзка; во второмъ случаѣ общей мѣры не существуетъ, отрѣзки несоизмѣримы; ихъ отношеніе есть число несоизмѣримое или ирраціональное.

Преобразовавъ всѣ равенства, мы получаемъ алгоритмъ для разложенія отношенія двухъ длинъ въ непрерывную дробь.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = p_1 + \frac{c}{b} \\ \frac{b}{c} = p_2 + \frac{d}{c} \\ \frac{c}{d} = p_3 + \frac{e}{d} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \frac{a}{b} = p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \ddots}}$$

§ 12. Такъ напримѣръ раскладывается въ безконечную непрерывную дробь ирраціональное число $\sqrt{2}$. Чтобы проще получить это разложеніе, воспользуемся тождествомъ

$$(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1)=1$$

отсюда

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

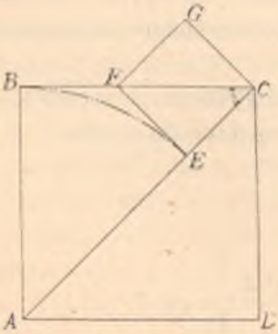
далѣе

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}} \tag{1}$$

Итакъ, раціональное число соотвѣтствуетъ конечной непрерывной дроби, ирраціональное — безконечной. Разберемъ тотъ же самый примѣръ геометрически, ибо $\sqrt{2}$ представляетъ собой отношеніе діагонали къ сторонѣ квадрата.



Черт. 4.

Для доказательства будемъ находить способомъ Эвлида общую мѣру діагонали AC и стороны AB квадрата (черт. 4). Отложимъ на діагонали AC отрѣзокъ AE, равный AB, проведемъ EF перпендикулярно AC въ точкѣ E. Имѣемъ $BF=FE$, какъ двѣ касательныя къ окружности, проведенныя изъ точки F; прямоугольный треугольникъ FEC равнобедренный, такъ какъ $\angle ECB=45^0$. Находимъ общую мѣру отрѣзка EC и стороны квадрата AB, или что то же BC; $EC=EF=FB$; отрѣзокъ EC откладываемъ одинъ разъ отъ точки B на сторонѣ BC, конецъ его упадетъ въ точку F.

Задачу нашу мы свели къ нахожденію общей мѣры отрѣзковъ EC и FC; но, если мы построимъ на отрѣзкѣ EC квадратъ $ECGF$, то увидимъ, что FC служитъ діагональю этого квадрата; слѣдовательно, нашу задачу мы свели къ подобной ей задачѣ относительно меньшаго квадрата; очевидно, отъ второй задачи мы прійдемъ къ такой же третьей и такъ далѣе до безконечности, причемъ квадраты будутъ уменьшаться по размѣрамъ. Отсюда можно заключить, что діагональ не имѣетъ общей мѣры со стороной квадрата, а, слѣдовательно, ихъ отношеніе разлагается въ безконечную непрерывную дробь какъ разъ вида (1). Это ясно изъ того, что первый разъ сторона квадрата на діагонали помѣщается одинъ разъ, что даетъ неполное частное 1; дальше отрѣзки ложатся на предыдущіе по два раза.

Числа комплексныя.

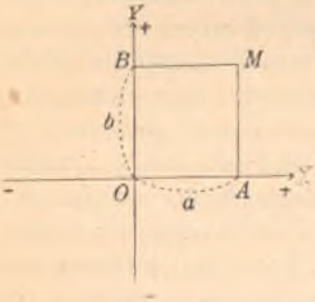
§ 13. Всѣ вещественныя числа, будучи возведены въ четную степень, даютъ положительныя числа. Задача извлеченія корня четной степени изъ отрицательнаго числа оказывается невозможной для вещественныхъ чиселъ. Потребовалось новое обобщеніе понятія о числѣ, были введены мнимыя и комплексныя числа.

Такъ какъ

$$\sqrt{-b}=\sqrt{-1}.\sqrt{b},$$

то оказалось достаточнымъ ввести числа со знакомъ мнимости $i=\sqrt{-1}$, $a+bi$, гдѣ a и b числа вещественныя. Эти новыя числа называются числами *комплексными*. Вещественное число можно разсматривать, какъ частный случай комплекснаго числа, если $b=o$; если $a=o$, число принимаетъ видъ bi, и ему даютъ названіе *чисто мнимаго* числа. Дѣйствія надъ комплексными числами такъ устанавливаются, чтобы вся алгебра дѣйствій надъ вещественными числами сохранялась и для новыхъ комплексныхъ чиселъ.

§ 14. Для геометрическаго изображенія чиселъ комплексныхъ не хватаетъ уже точекъ прямой линіи, такъ какъ всѣ эти точки соотвѣтствуютъ числамъ вещественнымъ. Системѣ комплексныхъ чиселъ приходится сопоставить совокупность точекъ заполняющихъ всю плоскость. Вещественныя числа, какъ и раньше, мы сопоставляемъ точкамъ нѣкоторой прямой OX, (черт. 5), которой дадимъ названіе вещественной оси. Мнимыя числа сопоставимъ точкамъ перпендикулярной къ ней прямой OY, которую назовемъ мнимой осью, такъ чтобы мнимому числу bi соотвѣтствовала точка B, находящаяся изъ условія $b = OB$.



Черт. 5.

Всякое комплексное число $a + bi$ сопоставляемъ точкѣ M плоскости находящейся въ вершинѣ прямоугольника $OAMB$, построеннаго на сторонахъ $OA = a$ и $OB = b$. Положительныя значенія a откладываемъ вправо отъ точки O, отрицательныя влѣво; положительныя значенія b—вверхъ отъ точки O, отрицательныя внизъ. Такимъ образомъ комплексное число однозначно опредѣляетъ точку плоскости и обратно. Совокупность комплексныхъ чиселъ заполняетъ всю плоскость плотно и непрерывно.

§ 15. Вводя въ математику комплексныя числа, мы должны условиться, что мы будемъ понимать подъ равенствомъ двухъ такихъ чиселъ. Будемъ считать, что два комплексныхъ числа равны другъ другу и писать

$$a + bi = c + di,$$

если

$$a = c \text{ и } b = d.$$

Геометрически это значитъ, что два равныхъ комплексныхъ числа соотвѣтствуютъ одной и той же точкѣ плоскости. Знаки неравенствъ для комплексныхъ чиселъ не употребляются; напримѣръ, если хотятъ указать, что вещественное число a не равно нулю, то пишутъ

$$a \gtrless o;$$

для комплекснаго числа такой формулы писать нельзя, а надо написать

или a не равно o

или $a \neq o$.

§ 16. Всѣ раціональныя дѣйствія надъ комплексными числами совершаются по законамъ дѣйствій надъ двучленами, причемъ мнимый знакъ i разсматривается, какъ алгебраическая величина, которая допускается только въ первой степени. Высшія степени замѣняются по таблицѣ

$$i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = +1.$$

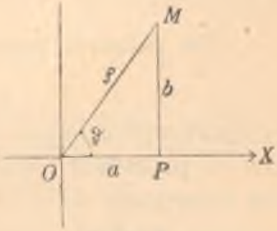
Вообще говоря

$$i^{4n+1} = i; \qquad i^{4n+3} = i^3 = -i;$$

$$i^{4n+2} = i^2 = -1;\ i^{4n+4} = i^4 = +1.$$

§ 17. Укажемъ рядъ терминовъ и свойствъ комплексныхъ чиселъ, связанныхъ съ ихъ геометрическимъ представленіемъ. Положимъ, на плоскости находится точка M (черт. 6), которая соотвѣтствуетъ нашему комплексному числу; эту точку мы называемъ affixe'омъ комплекснаго числа.

Обозначимъ черезъ ρ разстояніе нашей точки M отъ точки O пересѣченія осей; ρ есть положительное число; оно носитъ названіе *модуля* комплекснаго числа.



Черт. 6.

Такъ, напримѣръ, если мы возьмемъ комплексное число

$$3 + 4i,$$

то модуль его выразится такъ:

$$\rho = +\sqrt{3^2 + 4^2} = +\sqrt{25} = 5.$$

Вообще, модуль комплекснаго числа

$$a + bi$$

выразится такъ:

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 18. Уголъ, который образуетъ прямая OM, идущая отъ нулевой точки къ affixe'у числа, съ вещественной осью X, обозначимъ черезъ ϑ; этотъ уголъ

$$\vartheta = \angle MOX$$

носитъ названіе *аргумента* комплекснаго числа. Онъ отсчитывается въ какую-нибудь опредѣленную сторону отъ вещественной оси, обыкновенно противъ часовой стрѣлки; при отсчетѣ этого угла можно обходить любое число разъ вокругъ нулевой точки. При такомъ обходѣ аргументъ будетъ измѣняться отъ нуля до безконечности, смотря по тому, какое число разъ мы обойдемъ вокругъ нулевой точки.

Мы вводимъ въ разсмотрѣніе и отрицательныя значенія аргумента; они должны отсчитываться въ другую сторону. Эти отрицательныя значенія могутъ также измѣняться отъ нуля до отрицательной безконечности.

Если мы измѣнимъ значеніе аргумента на 360^0, то прямая OM сохранитъ свое направленіе. Слѣдовательно, для того, чтобы указать направленіе, достаточно указать значеніе аргумента, меньшее 360^0; другія значенія его будутъ отличаться на число градусовъ, кратное 360^0, и будутъ соотвѣтствовать тому же самому направленію.

Итакъ будемъ считать аргументъ всегда положительнымъ, измѣняющимся отъ нуля до 360^0 или, при счетѣ радіанами, отвлеченнымъ числомъ, измѣняющимся отъ O до 2π.

§ 19. Введя модули и аргументы, полезно ввести и тригонометрическія величины. Я буду предполагать начала тригонометріи уже извѣстными.

Изъ прямоугольнаго треугольника OPM мы получимъ

$$(1) \qquad a = \rho \cos \vartheta \, ; b = \rho \sin \vartheta$$

Что касается выраженій

$$\sin \vartheta \text{ и } \cos \vartheta,$$

то существуетъ много таблицъ, позволяющихъ намъ вычислять ихъ съ различной степенью точности. При маломъ числѣ знаковъ, при вычисленіи *sin* и *cos* можно съ пользой употреблять логариѳмическія линейки, которыя чрезвычайно практичны.

Итакъ всякое комплексное число можно написать въ такомъ видѣ:

$$(2) \qquad a + ib = \rho \cos \vartheta + i \rho \sin \vartheta = \rho \; (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

Здѣсь ρ—модуль, положительное число, а множитель, стоящій въ скобкахъ, носитъ названіе *мнимаго множителя*. Посмотримъ, во что обратится этотъ мнимый множитель, если число у насъ будетъ вещественное. Комплексное число можетъ обратиться въ вещественное или когда $\vartheta = 0$, или когда $\vartheta = 180^0$. При $\vartheta = 0$ мы имѣемъ

$$\cos \vartheta = \cos 0 = +1 \, ; a + bi = \rho;$$

наше комплексное число обратилось въ положительное. При $\vartheta = 180^0$ мы получимъ

$$\cos \vartheta = \cos 180^0 = -1 \, ; a + bi = -\rho,$$

и комплексное число обратилось въ отрицательное. При названныхъ значеніяхъ аргумента 0 и 180^0 вещественное число равняется $\pm \rho$, а мнимый множитель обращается въ $+1$ или -1. Итакъ, мнимый множитель въ случаѣ вещественнаго числа есть не что иное, какъ знакъ этого числа, а модуль представляетъ собою то, что мы называемъ абсолютной величиной числа.

Будемъ употреблять терминъ *модуль* для всякихъ чиселъ и будемъ обозначать его такъ: если мы хотимъ написать модуль числа z, то будемъ z ставить между двумя черточками, т. е. будемъ писать

$$|z|.$$

Для комплекснаго числа модулемъ, какъ мы видѣли, будетъ разстояніе affixe'а этой точки до нулевой точки.

Теперь, когда мы ввели понятія о модулѣ и аргументѣ, дѣйствія надъ числами комплексными представятся намъ въ очень простомъ видѣ, въ геометрической формѣ. Обратимъ вниманіе на сложеніе и умноженіе чиселъ.

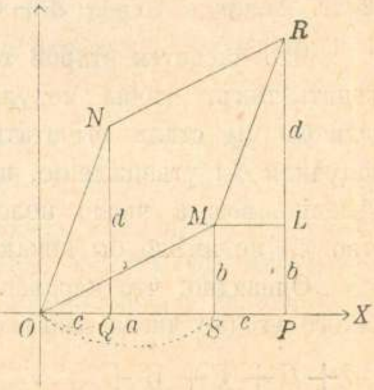
§ 20. Положимъ, что намъ нужно сложить два комплексныхъ числа

$$a + bi \text{ и } c + di.$$

При алгебраическомъ сложеніи, уподобляя эти числа двучленамъ, мы складываемъ отдѣльно части вещественныя и мнимыя:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \ .$$

Посмотримъ, какъ это сложеніе будетъ производится геометрически.



Черт. 7.

Если мы перемѣстимъ треугольникъ OQN (черт. 7) по плоскости, не поворачивая его, а двигая, какъ говорятъ въ механикѣ, поступательно такъ, чтобы точка O упала въ точку M, то точка N упадетъ въ точку R, которая будетъ affixe'омъ комплекснаго числа

$$(a + c) + (b + d)\,i.$$

Это число будетъ алгебраической суммой нашихъ двухъ чиселъ. Итакъ, мы получаемъ геометрическое правило для сложенія двухъ комплексныхъ чиселъ: надо взять модуль OM, соотвѣтствующій одному слагаемому, и отъ конца его M отложить отрѣзокъ MR, параллельный и равный модулю ON другого слагаемаго. Точку R мы соединяемъ съ начальной точкой O; отрѣзокъ OR представитъ собою модуль суммы нашихъ слагаемыхъ. Обратимъ вниманіе на то, что правило для сложенія комплексныхъ чиселъ одинаково съ правиломъ сложенія силъ и скоростей въ механикѣ.

Итакъ, для геометрическаго сложенія нужно построить параллелограммъ, стороны котораго были бы модулями заданныхъ чиселъ; діагональ этого параллелограмма дастъ намъ модуль суммы, а вершина его будетъ affixe'омъ комплекснаго числа, равнаго суммѣ данныхъ чиселъ.

Назовемъ одно число Z, другое U, сумма ихъ будетъ

$$Z+U.$$

Изъ чертежа мы найдемъ ихъ модули

$$|Z|=OM,$$
$$|U|=ON,$$
$$|Z+U|=OR.$$

§ 21. Итакъ модуль суммы есть сторона треугольника, у котораго двѣ другія стороны суть модули слагаемыхъ. Изъ элементарной геометріи мы знаемъ, что всякая сторона треугольника не больше суммы двухъ другихъ сторонъ и не меньше ихъ разности. Это даетъ относительно модулей такую теорему: модуль суммы двухъ комплексныхъ чиселъ не превосходитъ суммы модулей слагаемыхъ и не меньше ихъ разности. Теорема эта употребляется на каждомъ шагу, ее слѣдуетъ хорошо помнить.

Итакъ, мы можемъ написать такія формулы:

$$|Z+U|\leqslant|Z|+|U| \tag{1}$$
$$|Z+U|\geqslant|Z|-|U| \tag{2}$$

Что касается второй теоремы, то мы всегда должны ее примѣнять такъ, чтобы модуль Z былъ больше, чѣмъ модуль U; если бы мы стали вычитать бóльшій модуль изъ меньшаго, то получили бы утвержденіе, ничего не дающее, ибо модуль, по опредѣленію, всегда число положительное, а слѣдовательно неравенство (2) не имѣло бы никакого смысла въ этомъ случаѣ.

Очевидно, что неравенство (1) распространяется на случай какого угодно числа слагаемыхъ, т. е.

$$|Z+U+V+W+\ldots|\leqslant|Z|+|U|+|V|+|W|+\ldots$$

§ 22. Что касается умноженія комплексныхъ чиселъ, то его можно производить очень просто. Пусть нужно перемножить два числа

$$a + bi = \rho\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)$$

и

$$c + di = \rho_1\,(cos\,\vartheta_1 + i\,sin\,\vartheta_1)$$

Перемножая ихъ мнимые множители, какъ двучлены, и принимая во вниманіе, что

$$i^2 = -1,$$

мы имѣемъ

$$(a + bi)\ (c + di) =$$

$$= \rho\rho_1\,[cos\,\vartheta\,cos\,\vartheta_1 - sin\,\vartheta\,sin\,\vartheta_1 + i\,(cos\,\vartheta\,sin\,\vartheta_1 + sin\,\vartheta\,cos\,\vartheta_1)]$$

или

$$(a + bi)\ (c + di) = \rho\rho_1\,[cos\,(\vartheta + \vartheta_1) + i\,sin\,(\vartheta + \vartheta_1)]$$

Въ скобкахъ мы получили мнимый множитель произведенія

$$cos\,(\vartheta + \vartheta_1) + i\,sin\,(\vartheta + \vartheta_1).$$

Произведеніе $\rho\rho_1$ есть модуль произведенія; у насъ получаются двѣ теоремы: модуль произведенія есть произведеніе модулей множителей, а аргументъ произведенія есть сумма аргументовъ множителей. При умноженіи комплексныхъ чиселъ аргументы складываются, а модули перемножаются.

§ 23. То обстоятельство, что аргументы при умноженіи складываются, приводитъ къ одной весьма важной математической формулѣ *Moivre'a*, изъ которой вытекаетъ рядъ важныхъ слѣдствій.

Перемножимъ нѣсколько мнимыхъ множителей, т. е. такихъ комплексныхъ чиселъ, у которыхъ модуль равенъ единицѣ. Для того, чтобы получить модуль искомаго произведенія, модули множителей нужно перемножить; они всѣ равны единицѣ, значитъ произведеніе ихъ тоже будетъ равно единицѣ. Аргументы складываются при умноженіи, поэтому

$$(1)\quad (cos\,\vartheta_1 + i\,sin\,\vartheta_1)\ (cos\,\vartheta_2 + i\,sin\,\vartheta_2)\ \ .\ .\ .\ \ (cos\,\vartheta_n + i\,sin\,\vartheta_n) =$$
$$= cos\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ .\ .\ + \vartheta_n) + i\,sin\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + .\ .\ .\ .\ .\ + sin\,\vartheta_n)$$

Эта формула имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ ϑ; она справедлива и тогда, когда всѣ множители будутъ одинаковы. Примѣняя ее къ этому случаю и обозначая общую величину всѣхъ угловъ черезъ ϑ, мы получимъ

$$(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)^n = cos\,n\,\vartheta + i\,sin\,n\,\vartheta.$$

Это равенство и представляетъ собою ту формулу *Moivre'a*, которую мы желали вывести.

§ 24. Мы остановимся пока на одномъ только приложеніи формулы *Moivre'a*, а именно на разъясненіи понятія о радикалѣ, т. е. объ извлеченіи корня нѣкоторой степени изъ заданнаго числа. Изъ элементарнаго курса мы знаемъ, что квадратный корень изъ какого-нибудь положительнаго числа имѣетъ два значенія, положительное и отрицательное. Является вопросъ, сколько значеній будетъ имѣть корень произвольной степени, большей, чѣмъ два. Возьмемъ корень нѣкоторой n' той степени изъ заданнаго числа a; мы его можемъ найти, рѣшая такое уравненіе:

$$z^n = a$$

Возьмемъ общій случай, когда a — число комплексное. Положимъ

$$a = \alpha (\cos\beta + i \sin\beta).$$

Найдемъ ρ и ϑ, искомые модуль и аргументъ комплекснаго числа

$$(1) \qquad z = \rho (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

Возведемъ z въ степень n

$$z^n = [\rho (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)]^n = \alpha (\cos\beta + i \sin\beta).$$

Примѣнимъ формулу *Moivre'a*

$$z^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) = \alpha (\cos\beta + i \sin).$$

Сравнивъ обѣ части, мы вспомнимъ, что если комплексныя числа равны, то ихъ модули равны, а аргументы могутъ отличаться на число, кратное 2π; слѣдовательно мы можемъ написать

$$\rho^n = \alpha$$
$$n\vartheta = \beta + 2\pi\varkappa$$

гдѣ $\varkappa$ цѣлое число. Откуда

$$(2) \qquad \rho = \sqrt[n]{\alpha}$$

$$(3) \qquad \vartheta = \frac{1}{n} (\beta + 2\pi\varkappa)$$

Знакомъ радикала

$$\sqrt[n]{\alpha},$$

взятаго изъ положительнаго числа α, мы здѣсь обозначаемъ корень въ прежнемъ ариѳметическомъ значеніи этого термина, какое мы придавали ему въ элементарной математикѣ, т. е. положительный ариѳметическій корень.

Итакъ, мы имѣемъ послѣ подстановки значеній ρ и ϑ изъ формулъ (2) и (3) въ формулу (1)

$$z=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\alpha\,(\cos\beta+i\sin\beta)}=$$

$$=\sqrt[n]{\alpha}\left(\cos\frac{\beta+2\varkappa\pi}{n}+i\sin\frac{\beta+2\varkappa\pi}{n}\right) \tag{4}$$

§ 25. Мы видимъ, что получается нѣсколько значеній для нашего радикала; можно убѣдиться изъ геометрическихъ соображеній, что какъ разъ получится n различныхъ значеній, n различныхъ соотвѣтствующихъ точекъ для числа z. Возьмемъ кругъ радіуса

$$\rho=\sqrt[n]{\alpha}.$$

Положимъ

$$\varkappa=0$$

и отложимъ n' тую часть угла β; тогда аргументъ числа z равенъ

$$\frac{\beta}{n}$$

Давая $\varkappa$ значенія

1, 2, 3 и т. д.,

мы будемъ прикладывать къ нашей величинѣ угла $\frac{\beta}{n}$ величины

$$\frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n}\ \text{и т. д.}$$

Для полученія точекъ соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ радикала нужно данную окружность раздѣлить на n равныхъ частей и прикладывать къ нашему углу $\frac{\beta}{n}$ сначала одну часть, затѣмъ двѣ, три и т. д. Радіусъ, равный модулю числа z, остается постояннымъ, а аргументъ будетъ мѣняться.

Сколько же всего различныхъ точекъ мы получимъ на плоскости? Очевидно n точекъ, такъ какъ конецъ n'таго дѣленія совпадетъ съ первоначальной точкой, аргументъ которой равенъ $\frac{\beta}{n}$, а дальше получатся точки, указанныя уже раньше. Итакъ, радикалъ n'той степени изъ какого нибудь комплекснаго числа имѣетъ n значеній, причемъ всѣ эти значенія соотвѣтствуютъ точкамъ, расположеннымъ на окружности круга и дѣлящимъ этотъ кругъ на ровныя части. Поэтому та теорія, въ которой разсматриваются рѣшенія двучленныхъ уравненій вида.

$$z^n - a = o \text{ , т. е. } z = \sqrt[n]{a} \text{ ,}$$

носитъ названіе теоріи дѣленія круга (Kreisteilung). Итакъ задача извлеченія корня изъ какого-нибудь комплекснаго или вещественнаго числа сводится къ задачѣ дѣленія круга на нѣкоторое число равныхъ частей. Напримѣръ уравненіе

$$x^{17} - 1 = 0$$

$$(x - 1)\ (x^{16} + x^{15} + \ .\ \ .\ \ . + 1) = 0$$

имѣетъ 17 различныхъ рѣшеній, его рѣшенія дѣлаетъ окружность круга на 17 равныхъ частей. Мы замѣчаемъ, что знакъ радикала принадлежитъ къ числу не особенно удобныхъ знаковъ въ алгебрѣ, причемъ слабыя стороны его состоятъ въ его многозначности, такъ что всякій разъ мы должны словами оговорить, какое изъ значеній мы разумѣемъ. Этотъ недостатокъ по самому существу дѣла неустранимъ. Всѣ попытки, которыя были направлены къ улучшенію этого знака (а именно, предполагалось подъ знакомъ „радикалъ“ разумѣть одно какое-нибудь опредѣленное значеніе) нельзя признать практичными, и попрежнему всякій знакъ радикала остается знакомъ, требующимъ кромѣ обозначенія на бумагѣ еще и дополненія словами.

Числами комлексными (больше о нихъ я пока говорить не буду) заканчивается обобщеніе понятія о числѣ въ обычномъ значеніи слова. Полная система комплексныхъ чиселъ—это та система, съ которой имѣютъ дѣло главныя части современной математики.

§ 26. Были попытки ввести комплексныя числа съ бо́льшимъ числомъ, чѣмъ двѣ, составныхъ частей, такъ напримѣръ W. R. Hamilton (Lectures on quaternions, Dublin, 1853) предложилъ подъ названіемъ *кватерніоновъ* разсматривать числа вида

$$a_0 + a_1\ i_1 + a_2\ i_2 + a_3\ i_3,$$

гдѣ i_1, i_2, i_3 суть мнимые знаки, которые при выкладкахъ должны быть замѣняемы по формуламъ

$$\begin{array}{ll} i_1^2 = -1 & i_2\ i_3 = -i_3\ i_2 = i_1. \\ i_2^2 = -1 & i_3\ i_1 = -i_1\ i_3 = i_2 \\ i_3^2 = -1 & i_1\ i_2 = -i_2\ i_1 = i_3 \end{array}$$

Данное Hamilton'омъ для кватерніоновъ умноженіе обладаетъ сочетательнымъ закономъ, т. е.

$$(AB)\, C = A\,(BC),$$

точно также существуетъ распредѣлительный законъ умноженія и сложенія, т. е.

$$(A + B)\, C = AC + BC,$$

но перестановочный законъ къ сожалѣнію не имѣетъ мѣста, т. е. вообще говоря

$$A\, B \text{ не } = B\, A.$$

Weierstrass въ своихъ лекціяхъ (1863 г.) разсматривалъ комплексныя числа вида

$$b_1 i_1 + b_2 i_2 + \ .\ \ .\ \ . + b_n i_n,$$

гдѣ i_1, i_2 . . . i_n суть различные мнимые знаки или, какъ онъ ихъ называетъ, различныя единицы. Въ случаѣ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ имѣетъ мѣсто

$$i_1 = 1\ ,\ i_2 = \sqrt{-1}.$$

Weierstrass показалъ, что всѣ законы элементарной алгебры сохраняются только для случая обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ. Въ послѣднее время были попытки разсматривать числа съ безчисленнымъ множествомъ единицъ, причемъ такимъ числамъ было дано названіе *неархимедовыхъ* чиселъ.

Невозможныя задачи въ геометріи.

§ 27. Перейдемъ къ задачамъ другого рода, задачамъ, которыя также способствовали прогрессу математики.

Я скажу нѣсколько словъ о рѣшеніи геометрическихъ задачъ циркулемъ и линейкой. Подобно тому, какъ не всѣ задачи рѣшаются въ числахъ какого-нибудь опредѣленнаго характера, напримѣръ только въ цѣлыхъ или только въ раціональныхъ числахъ, такъ и не всѣ геометрическія задачи могутъ быть рѣшаемы при помощи простѣйшихъ построеній.

Уже греческіе математики, обладавшіе большими знаніями и большой логической строгостью при разсужденіяхъ замѣтили, что нѣкоторыя задачи не рѣшаются при помощи только циркуля и линейки. Подъ рѣшеніемъ задачи циркулемъ и линейкой разумѣется рѣшеніе ея при помощи слѣдующихъ послѣдовательныхъ построеній: во первыхъ, если предыдущее построеніе указало двѣ точки, то эти точки можно соединить прямой линіей и продолжить ее неопредѣленно; эта операція есть способъ примѣненія линейки; во вторыхъ, если предыдущее построеніе дало нѣкоторую точку, то изъ этой точки, какъ центра, можно описать окружность круга, радіусъ котораго заданъ предыдущимъ построеніемъ; эта операція есть способъ примѣненія циркуля. Для того, чтобы убѣдиться, что не всѣ задачи рѣшаются при помощи конечныхъ чиселъ указанныхъ операцій, поступимъ такимъ образомъ: я укажу сперва на нѣкоторый фактъ, который докажу вполнѣ далѣе, во второй главѣ. Оказывается, что какъ бы сложно ни было построеніе изъ ряда круговъ и прямыхъ линій, если только число круговъ и прямыхъ линій будетъ конечное, то длины всѣхъ отрѣзковъ, которые получаются между точками пересѣченія круговъ и прямыхъ линій, выводятся изъ длинъ заданныхъ отрѣзковъ только при помощи уравненій первой степени и квадратныхъ. Слѣдовательно, если задача приводится къ построенію такого числа, которое не можетъ быть получено изъ чиселъ раціональныхъ при помощи уравненій двухъ первыхъ степеней, т. е. при помощи послѣдовательнаго извлеченія квадратнаго радикала, такая задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой. Такъ, напримѣръ, извѣстна Делійская задача; она состоитъ въ удвоеніи куба. Если мы примемъ за единицу сторону первоначальнаго куба, то сторону (x) искомаго куба, объемъ котораго вдвое больше даннаго, нельзя построить при помощи циркуля и линейки.

Мы имѣемъ

$$x^3 = 2;$$

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

На основаніи самыхъ простыхъ алгебраическихъ соображеній можно убѣдиться, что $\sqrt[3]{2}$ есть ирраціональность высшаго порядка, чѣмъ квадратный радикалъ. Эта ирраціональность не можетъ быть вычислена при помощи конечнаго числа извлеченій квадратныхъ радикаловъ. Итакъ, Делійская задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой.

§ 28. Одна изъ такихъ невозможныхъ задачъ (не рѣшающихся при помощи циркуля и линейки) сыграла особенно важную роль въ математикѣ. Это была задача квадратуры круга, т. е. задача построенія квадрата, равнаго по площади заданному кругу. Если мы возьмемъ за единицу радіусъ круга, то его площадь будетъ равна числу π; обозначая черезъ x сторону квадрата равновеликаго данному кругу, мы получимъ

$$x^2 = \pi ; x = \sqrt{\pi}.$$

Итакъ, для рѣшенія задачи намъ нужно построить отрѣзокъ

$$x = \sqrt{\pi}.$$

Неудачи построенія послѣдняго числа, повторявшіяся почти два тысячелѣтія заставили предполагать невозможность рѣшенія этой задачи. Но доказана была эта невозможность лишь во второй половинѣ XIX столѣтія совершенно случайно, извѣстнымъ французскимъ математикомъ Hermite'омъ *). Онъ занимался изученіемъ свойствъ формулы

$$e^x$$

гдѣ e — ирраціональное число, представляющее основаніе неперовыхъ логариѳмовъ. Изучая эту формулу, онъ пришелъ къ заключенію, что число e не можетъ быть корнемъ никакого уравненія вида

$$(1) \qquad x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \, . \quad . + g = 0,$$

въ которомъ коэффиціенты a, b и т. д. — числа раціональныя. Въ настоящее время мы называемъ такія числа трансцендентными въ отличіе отъ чиселъ алгебраическихъ, т. е. такихъ, которыя могутъ удовлетворять уравненію вида (1). Уравненія вида (1) носятъ названіе алгебраическихъ уравненій. Итакъ, если число можетъ удовлетворять нѣкоторому алгебрическому уравненію, то мы его назовемъ алгебраическимъ числомъ, если нѣтъ, то трансцендентнымъ.

Число e оказалось трансцендентнымъ. Lindemann **) докончилъ работу Hermite'а и показалъ, что если e есть число трансцендентное, то и π будетъ непремѣнно трансцендентнымъ числомъ. Слѣдовательно, не только корень квадратный изъ π, но даже и самое число π не можетъ быть корнемъ никакого алгебраическаго уравненія; тѣмъ болѣе оно не можетъ быть представлено въ видѣ послѣдовательнаго рѣшенія ряда уравненій степени не выше второй. Легко убѣдиться, что всякія числа, которыя получаются отъ

---

*) Hermite. Sur la fonction exponentielle. C. R., L LXXVII, 1873.

**) Lindemann. Über die Zahl π. Mathem. Annalen. Berlin, Band 20, 1882.

послѣдовательнаго рѣшенія алгебраическихъ уравненій, всегда числа алгебраическія.

§ 29. Изслѣдованія Hermite'а и Lindemann'а закончили вопросъ о невозможности рѣшенія квадратуры круга циркулемъ и линейкой. Академіи наукъ всего міра уже сравнительно давно перестали принимать для разсмотрѣнія попытки рѣшенія задачи квадратуры круга. Но въ концѣ XVIII столѣтія они еще отвѣчали авторамъ подобныхъ рѣшеній. Интересно обратить вниманіе на одинъ такой отвѣтъ знаменитаго математика Lagrange'а. Ему было поручено разсмотрѣть одну работу. Lagrange отнесся очень внимательно къ автору этой работы: онъ подсчиталъ, что площадь круга представляется у автора однимъ числомъ, а на самомъ дѣлѣ это число должно быть другимъ, т. е. что рѣшеніе было невѣрно, при этомъ онъ сказалъ, что рѣшеніе представляетъ нѣкоторый интересъ, какъ приближенное. Интересно то, что это дало поводъ Lagrange'у изложить знаменитую, вошедшую въ настоящее время во всѣ курсы, теорему о подходящихъ дробяхъ въ теоріи непрерывныхъ дробей; эта теорема говоритъ, что подходящія дроби выражаютъ ближе величину всей непрерывной дроби, чѣмъ всѣ дроби съ меньшими знаменателями. Онъ указалъ на то обстоятельство, что два знаменитыя числа

$$\frac{22}{7} \text{ и } \frac{355}{113}$$

суть двѣ подходящія дроби разложенія числа π въ непрерывную дробь

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

Посмотримъ что же сдѣлали для науки эти попытки рѣшить квадратуру круга. Значеніе ихъ было очень велико. Конечно, я говорю не о многочисленныхъ рѣшеніяхъ бѣдныхъ маніаковъ, малообразованныхъ людей. Но попытки рѣшенія квадратуры круга такими знаменитыми математиками, какъ Архимедъ, выяснили значеніе числа π и тѣ пріемы, при помощи которыхъ вычисляются его приближенныя значенія. Вписывая правильные многоугольники и увеличивая число ихъ сторонъ, мы осуществляемъ такимъ образомъ методы современнаго интегральнаго исчисленія.

Итакъ, задача квадратуры круга была первой задачей, вызвавшей къ жизни начала интегральнаго исчисленія.

Рѣшеніе уравненій въ радикалахъ.

§ 30. Теперь мы перейдемъ къ новой невозможной задачѣ, которая сыграла въ исторіи математики одну изъ первостепенныхъ ролей, а именно къ задачѣ алгебрическаго рѣшенія уравненій. Подъ алгебрическимъ рѣшеніемъ уравненій разумѣется такое рѣшеніе, въ которомъ мы получаемъ корень уравненія при помощи производства конечнаго числа дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня надъ коэффиціентами этого уравненія; вкратцѣ говорятъ, что въ такомъ случаѣ уравненіе рѣшается въ радикалахъ, не указывая на первыя пять дѣйствій, какъ элементарныя.

Рѣшеніе уравненій первой степени встрѣчается еще въ древнеегипетской книгѣ Ames'а за 1700 лѣтъ до Р. Х. Уравненія второй степени были рѣшены еще греческими и арабскими математиками; уравненія степеней третьей и четвертой были рѣшены итальянскими математиками Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari въ XVI столѣтіи. Начиная съ уравненій пятой степени не было найдено рѣшеній. Lagrange, разсматривая въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ „Reflections sur la résolution algébrique des équations“ (1770) различные пріемы рѣшенія уравненій первыхъ четырехъ степеней, думалъ, что изъ нихъ можно вывести правила рѣшенія уравненій высшихъ степеней, начиная съ пятой, но онъ замѣтилъ существованіе какъ бы перелома въ теоріи уравненій; именно, уравненіе третьей степени сводилось къ уравненію второй степени, уравненіе четвертой къ уравненію третьей, тогда какъ всѣ его попытки рѣшить уравненіе пятой степени привели къ тому, что оно свелось къ рѣшенію уравненій степени высшей, шестой; по этому поводу въ одномъ мѣстѣ этого мемуара онъ говоритъ, что рѣшеніе уравненія пятой степени ему кажется почти невозможнымъ.

§ 31. Послѣ Lagrange'а Gauss занимался съ успѣхомъ вопросомъ о рѣшеніи уравненій высшихъ степеней. Онъ обратилъ особое вниманіе на уравненія двучленныя вида

$$x^n - a = 0 \tag{1}$$

Обозначимъ черезъ $\sqrt[n]{a}$ какой-нибудь изъ корней уравненія (1). Тогда, полагая

$$x = t\sqrt[n]{a}$$

мы получимъ для t уравненіе

$$t^n = 1; \tag{2}$$

n корней этого уравненія будутъ

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 \\ t_1 &= cos\,\frac{2\pi}{n} + i\,Sin\,\frac{2\pi}{n} \\ t_2 &= cos\,\frac{4\pi}{n} + i\,sin\,\frac{4\pi}{n} \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ t_{n-1} &= cos\,\frac{2\,(n-1)\,\pi}{n} + i\,sin\,\frac{2\,(n-1)\,\pi}{n}, \end{aligned}$$

такъ что всѣ корни уравненія (1) будутъ имѣть видъ

$$t_0\sqrt[n]{a},\ t_1\sqrt[n]{a},\ t_2\sqrt[n]{a}\ \ .\ .\ .\ t_{n-1}\sqrt[n]{a}.$$

Итакъ, задача свелась къ рѣшенію уравненія (2), т. е. къ вычисленію корней n-ой степени изъ единицы. Gauss показалъ, что уравненія (2) всегда рѣшаются въ радикалахъ; особенно важенъ случай уравненія

$$x^{17} - 1 = 0, \tag{3}$$

соотвѣтствующій задачѣ построенія правильнаго вписаннаго въ кругъ семнадцатиугольника. Уравненіе (3) приводится по раздѣленіи на $(x-1)$ къ уравненію

$$x^{16} + x^{15} + \ .\ .\ .\ + x + 1 = 0, \tag{4}$$

которое и требуется рѣшить.

Знаменитое открытіе Gauss'а состоитъ въ томъ, что уравненіе (4) рѣшается при помощи цѣпи четырехъ квадратныхъ уравненій, т. е. семнадцатиугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ циркулемъ и линейкой. Эта задача была послѣ задачъ, разобранныхъ древними греческими математиками, первымъ случаемъ вписанія многоугольника при помощи циркуля и линейки. Gauss высказалъ болѣе общую теорему: онъ показалъ, что можно вписать циркулемъ и линейкой многоугольники, число сторонъ которыхъ n есть простое число вида

$$n = 2^m + 1.$$

§ 32. Заслуга доказательства невозможности рѣшенія въ радикалахъ общихъ уравненій степеней, начиная съ пятой, принадлежитъ норвежскому математику Niels'у Abel'ю, умершему въ молодомъ возрастѣ, 29 лѣтъ.

Какъ понимать, что нельзя рѣшить общее уравненіе пятой степени въ радикалахъ? Это значитъ, что не существуетъ общаго алгоритма, который годился бы для всѣхъ уравненій пятой степени, каковы бы ни были коэффиціенты. Но было-бы ошибкой думать, что не существуетъ такихъ уравненій пятой степени, которыя можно было бы рѣшить. Существуетъ безчисленное число уравненій пятой и высшихъ степеней, которыя можно рѣшить въ радикалахъ. Нѣтъ только одной общей формулы, по которой всѣ уравненія пятой степени рѣшались бы, нѣтъ такихъ формулъ и для высшихъ степеней. Относительно нѣкоторыхъ числовыхъ уравненій можно доказать, что не можетъ существовать никакихъ формулъ съ радикалами, которыя бы рѣшали ихъ. Что же тогда дѣлать? Gauss показалъ, что уравненіе всякой степени будетъ имѣть непремѣнно одинъ корень, вещественный или комплексный; изъ этой теоремы, какъ мы увидимъ далѣе, вытекаетъ такое слѣдствіе: число корней алгебраическаго уравненія равно его степени.

Итакъ, задача рѣшенія произвольнаго алгебраическаго уравненія возможна; существуютъ его корни, и ихъ столько, сколько единицъ въ показателѣ степени уравненія; невозможность относится не къ отсутствію корней, а лишь къ вычисленію ихъ при помощи радикаловъ.

Задача рѣшенія уравненія выше четвертой степени въ томъ случаѣ, когда оно не рѣшается въ радикалахъ, представляетъ собою новую операцію анализа. Та часть математики, которая изучаетъ свойства и приложенія этой операціи называется алгебраическимъ анализомъ или высшей алгеброй.

§ 33. Разсмотримъ рѣшеніе уравненій третьей и четвертой степени. Возьмемъ уравненіе третьей степени въ общемъ видѣ

) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Прежде всего замѣтимъ, что коэффиціентъ a нельзя считат равнымъ нулю, такъ какъ въ такомъ случаѣ мы получили б уравненіе второй степени, а, слѣдовательно, можно раздѣлить н него все уравненіе и получить уравненіе въ такомъ видѣ:

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0. \tag{2}$$

Для того, чтобы возможно болѣе простымъ образомъ рѣшит кубическое уравненіе, упростимъ его, т. е. сведемъ это уравненіе къ такому, гдѣ нѣтъ члена, содержащаго x^2. Возьмемъ вмѣст x новое неизвѣстное y, полагая

$$x=y+h;$$

уравненіе приметъ видъ

$$(y+h)^3+\alpha(y+h)^2+\beta(y+h)+\gamma=0$$
$$y^3+y^2(3h+\alpha)+yA+B=0.$$

Теперь замѣчаемъ, что если положить

$$3h+\alpha=0,$$

то

$$h=-\frac{\alpha}{3}.$$

Значитъ, наше уравненіе упростится, если мы замѣнимъ прежнее неизвѣстное x новымъ y, полагая

$$x=y-\frac{\alpha}{3}.$$

Наше уравненіе сведется къ уравненію такого вида:

$$x^3+px+p=0. \tag{3}$$

Выбираемъ самый простой способъ рѣшенія; введемъ д новыя неизвѣстныя величины и одну изъ нихъ подберемъ так чтобы получилось упрощеніе. Положимъ

$$x=u+v$$

Наше уравненіе приметъ видъ

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0.$$

Напишемъ его такъ

$$u^3+v^3+3u^2v+3uv^2+p(u+v)+q=0$$
$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0.$$

Подбираемъ u и v такъ, чтобы

$$3uv+p=0.$$

Итакъ, мы получаемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными

$$3\,uv + p = 0 \tag{4}$$

$$u^3 + v^3 + q = 0. \tag{5}$$

Они преобразуются такъ:

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Эти два уравненія настолько просты, что ихъ можно рѣшить относительно каждаго неизвѣстнаго. По суммѣ и произведенію неизвѣстныхъ величинъ u^3 и v^3 мы находимъ эти величины, а затѣмъ выведемъ формулы для x'а. Величины u^3 и v^3 будутъ корнями квадратнаго уравненія относительно ξ

$$\xi^2 + q\,\xi - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{6}$$

Итакъ, согласно Lagrange'у, теорія этого рѣшенія состоитъ въ томъ, что мы привели его къ рѣшенію квадратнаго уравненія; мы получаемъ два корня послѣдняго уравненія (6)

$$u^3 = \xi_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = \xi_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Величины u и v получатся извлеченіемъ корня кубическаго

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Итакъ, корень уравненія (3) представится въ видѣ знаменитой формулы Cardan'а:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \tag{7}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

§ 34. Разсмотримъ это рѣшеніе; корень кубическій изъ какого-нибудь числа, какъ извѣстно, имѣетъ три значенія. Если мы будемъ комбинировать различныя значенія двухъ корней въ формулѣ Cardan'a (7), то мы получимъ для уравненія третьей степени девять комбинацій вмѣсто ожидаемыхъ трехъ. Значитъ, такія девять комбинацій должны давать только три различныхъ результата. Обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство: величины v и u, эти радикалы, въ произведеніи должны давать число

$$-\frac{p}{3};$$

слѣдовательно

$$x=\frac{-\frac{p}{3}}{v}+v,$$

а тогда формула Cardan'a приметъ видъ

$$x=\frac{-\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Давая радикалу v три различныя значенія, мы и получимъ только три корня кубическаго уравненія. Съ теоретической точки зрѣнія это рѣшеніе не представляетъ собою ничего затруднительнаго; что касается вычисленій по этимъ формуламъ, то встѣчаются затрудненія не только выкладочнаго характера, но и болѣе существенныя. Одинъ изъ важныхъ въ практическомъ отношеніи случаевъ тотъ, когда всѣ три корня вещественные. Оказывается, что этотъ случай имѣетъ мѣсто тогда, когда выраженіе, стоящее подъ знакомъ квадратнаго радикала отрицательно, т. е.

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0.$$

Если бы мы захотѣли въ корнѣ кубическомъ изъ комплекснаго числа отдѣлить алгебрическимъ путемъ вещественную часть отъ мнимой, то мы пришли бы къ логическому кругу. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ искать два вещественныхъ числа x и y, удовлетворяющихъ равенству

(1) $$\sqrt[3]{a+ib}=x+iy.$$

Возвышая обѣ части (1) въ кубъ, получимъ

$$a+i\ b=x^3-3xy^2+i\,(3x^2y-y^3).$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ рѣшенію системы двухъ уравненій третьей степени

(2) $$x^3-3\,xy^2=a$$
$$3\,x^2y-y^3=b.$$

Система (2) приводитъ къ слѣдующему существенному затрудненію, а именно, какими бы путями мы ни производили рѣшеніе системы (2), мы приходимъ всегда къ рѣшенію такихъ уравненій, для которыхъ необходимо умѣніе извлекать корни третьей степени изъ комплексныхъ чиселъ. Такимъ образомъ, у насъ нѣтъ возможности что либо сдѣлать алгебраически для отдѣленія вещественной и мнимой части въ корнѣ кубическомъ

$$\sqrt[3]{a+bi}.$$

Придется прибѣгнуть для этой цѣли къ тригонометрическимъ величинамъ (см. § 24).

Этотъ случай называется casus irreducibilis (неприводимый случай).

§ 41. Итакъ, уже на кубическомъ уравненіи мы замѣчаемъ, что представленіе корня въ радикалахъ является не особенно большимъ вычислительнымъ удобствомъ.

Обратимся къ рѣшенію въ радикалахъ уравненій четвертой степени. Возьмемъ уравненіе четвертой степени въ общемъ видѣ, раздѣленное уже на коэффиціентъ при высшей степени $x'a$

(1) $$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Разсмотримъ такое тождество

(2) $$(x^2+\frac{a}{2}x+y)^2=x^4+ax^3+\left(2y+\frac{a^2}{4}\right)x^2+ayx+y^2;$$

вычтемъ изъ этого тождества почленно наше уравненіе, тогда мы получимъ

(3) $$(x^2+\frac{a}{2}x+y)^2=(2y+\frac{a^2}{4}-b)\,x^2+(ay-c)\,x+y^2-d.$$

У насъ пока неизвѣстна величина y. Подберемъ ее такъ, чтобы во второй части получить квадратъ двучлена

$$(\alpha x+\beta)^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2;$$

придется положить

$$\alpha^2=2y+\frac{a^2}{4}-b,$$

$$2\,\alpha\beta=ay\;-c,$$

$$\beta^2=y^2-d.$$

Исключая буквы α и β, мы получимъ

$$(4)\qquad (ay-c)^{\,2}-4\,(2y+\frac{a^2}{4}-b)\,(y^2-d)=0.$$

Это уравненіе оказывается кубическимъ относительно y; итакъ, мы свели уравненіе четвертой степени къ уравненію кубическому, что находится въ полномъ соотвѣтствіи съ общей теоріей Lagrange'a. Найдя какой-нибудь корень этого уравненія и подставляя его вмѣсто y въ уравненіе (3), мы получимъ

$$(x^2-\frac{a}{2}x+y)^{\,2}=(\alpha x+\beta)^{\,2}.$$

Отсюда мы имѣемъ одно изъ двухъ уравненій

$$(5)\qquad x^2+\frac{a}{2}x+y=\alpha x+\beta,$$

$$(6)\qquad x^2+\frac{a}{2}x+y=-\alpha x-\beta.$$

Итакъ, мы привели задачу рѣшенія уравненія четвертой степени къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій; оказывается, что достаточно нахожденія одного какого нибудь корня кубическаго уравненія (4); тогда два квадратныхъ уравненія (5) и (6) дадутъ всѣ четыре корня заданнаго уравненія четвертой степени.

§ 42. Хотя уравненія степени выше четвертой и не рѣшаются въ общемъ видѣ въ радикалахъ, но тѣмъ не менѣе существуетъ безчисленное множество уравненій частнаго вида, гдѣ такое рѣшеніе возможно. Обратимъ вниманіе на одинъ изъ наиболѣе замѣчательныхъ видовъ такого рода уравненій. Возьмемъ уравненіе, къ рѣшенію котораго сводится дѣленіе дуги на пять равныхъ частей. Напишемъ по формулѣ Moivre'a

$$(1)\qquad (\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^5=\cos 5\,\vartheta+i\sin 5\,\vartheta.$$

Пусть задана величина

$$a=\cos 5\,\vartheta.$$

Поставимъ себѣ задачей найти

$$x = \cos \vartheta,$$

другими словами, найдемъ по заданному косинусу пятикратнаго угла косинусъ одиночнаго. Эта задача приводится къ рѣшенію уравненія пятой степени. По биному Ньютона пишемъ

$$\cos^5 \vartheta + 5 \cos^4 \vartheta \, i \sin \vartheta + 10 \cos^3 \vartheta \, i^2 \sin^2 \vartheta + 10 \cos^2 \vartheta \, i^3 \sin^3 \vartheta +$$
$$+ 5 \cos \vartheta \, i^4 \sin^4 \vartheta + i^5 \sin^5 \vartheta = \cos^5 \vartheta - 10 \cos^3 \vartheta \sin^2 \vartheta +$$
$$+ 5 \cos \vartheta \sin^4 \vartheta + i \, (5 \cos^4 \vartheta \sin \vartheta - 10 \cos^2 \vartheta \sin^3 \vartheta + \sin^5 \vartheta) =$$
$$= \cos 5 \vartheta + i \sin 5 \vartheta.$$

Отсюда

$$a = \cos 5 \vartheta = \cos^5 \vartheta - 10 \cos^3 \vartheta \sin^2 \vartheta + 5 \cos \vartheta \sin^4 \vartheta,$$
$$a = \cos^5 \vartheta - 10 \cos^3 \vartheta \, (1 - \cos^2 \vartheta) + \cos \vartheta \, (1 - \cos^2 \vartheta)^2;$$

мы приходимъ къ уравненію пятой степени

$$a = x^5 - 10 \, x^3 (1 - x^2) + 5 \, x \, (1 - x^2)^2.$$

Формула Moivre'а даетъ намъ возможность рѣшить это уравненіе въ радикалахъ. Мы имѣемъ

$$\cos 5 \vartheta = a,$$

откуда

$$\sin 5 \vartheta = \sqrt{1 - a^2}.$$

Можемъ написать

$$(\cos \vartheta \pm i \sin \vartheta)^5 = a \pm i \sqrt{1 - a^2},$$
$$\cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad = \sqrt[5]{a + i \sqrt{1 - a^2}},$$
$$\cos \vartheta - i \sin \vartheta \quad = \sqrt[5]{a - i \sqrt{1 - a^2}}.$$

Отсюда

$$x = \cos \vartheta = \frac{1}{2} \left(\sqrt[5]{a + i \sqrt{1 - a^2}} + \sqrt[5]{a - i \sqrt{1 - a^2}} \right).$$

§ 43. Теперь укажемъ на нѣкоторыя наиболѣе важныя свойства уравненій высшихъ степеней. Первое свойство состоитъ въ теоремѣ Gauss'а, которая гласитъ, что всякое алгебраическое уравненіе какой угодно степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, причемъ этотъ корень можетъ быть какъ дѣйствительный, такъ и комплексный.

Положимъ, что у насъ задано уравненіе какой нибудь n-ой степени

$$(1) \qquad x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \; . \; . \; . \; . \; + p_{n-1} x + p_n = 0.$$

Сокращенно обозначимъ это уравненіе такъ

$$f(x)=0.$$

Согласно теоремѣ Gauss'а, существуетъ нѣкоторое число a обращающее послѣ подстановки его вмѣсто x уравненіе въ тожд ство. Изъ этой теоремы вытекаетъ, какъ слѣдствіе, что ура неніе n-ой степени имѣетъ n корней, т. е. число корней уравн нія равно показателю его степени. Для доказательства этого б демъ дѣлить нашъ полиномъ на разность

$$x-a_0,$$

гдѣ a_0 произвольное число; получаемъ нѣкоторое частное, кото рое обозначимъ черезъ $f_1(x)$, и остатокъ R, въ который не вхо дитъ буква x (нулевой степени относительно x). На основані опредѣленія дѣленія имѣемъ тождество

$$f(x)=f_1(x)(x-a_0)+R. \tag{2}$$

Всякое тождество останется справедливымъ, какое бы зна ченіе мы ни давали буквамъ, входящимъ въ него. Подставля вмѣсто x въ тождество (2) a_0, мы получаемъ

$$a_0^n+p_1a_0^{n-1}+\ .\ .\ .\ .\ .+p_{n-1}a_0+p_n=R. \tag{3}$$

Итакъ, остатокъ, получаемый отъ дѣленія полинома $f(x)$ н

$$x-a_0,$$

равенъ результату подстановки числа a_0 вмѣсто x въ дѣлимое $f(x)$. Очевидно, если a_0 равно корню a нашего уравненія, то этотъ результатъ подстановки равенъ нулю, а слѣдовательно остатокъ также равенъ нулю.

$$f(a)=R=0.$$

Подставляя

$$R=0$$

въ тождество (2), получимъ

$$f(x)=f_1(x)(x-a);$$

значитъ заданное уравненіе

$$f(x)=0$$

можетъ быть переписано такъ:

$$f_1(x)(x-a)=0.$$

Очевидно, что намъ придется разсматривать новое уравненіе

$$f_1(x)=0$$

степени на единицу меньшей. Итакъ, если намъ извѣстенъ одинъ корень a уравненія, то дѣля уравненіе на

$$x - a,$$

мы понижаемъ его степень на единицу.

На основаніи теоремы Gauss'а это новое уравненіе $(n-1)$-ой степени должно также имѣть по крайней мѣрѣ одинъ корень; обозначимъ его черезъ b; слѣдовательно, по предыдущему

$$f_1(x) = (x - b) f_2(x).$$

Въ концѣ концовъ первоначальный полиномъ получится въ такой формѣ

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \;.\;.\;.\;.\; (x - l), \tag{4}$$

т. е. полиномъ разложится на n линейныхъ множителей *).

§ 44. Если всѣ корни

$$a, b, c, \;.\;.\;.\;.\; l$$

различны между собой, то ихъ число n какъ разъ равно степени уравненія; можетъ однако случиться, что среди этихъ корней будутъ одинаковые, тогда мы получимъ такую общую теорему:

Всякій полиномъ n-ой степени раскладывается на множители въ такой формѣ:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \;.\;\;.\;\;.\; (x - a_l)^{k_l}. \tag{I}$$

Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что полиномъ имѣетъ l различныхъ корней. Такой полиномъ имѣетъ уже меньшее число различныхъ корней, чѣмъ единицъ въ показателѣ степени. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что уравненіе имѣетъ k_1 корней, равныхъ a_1 k_2 корней, равныхъ a_2 и т. д.; при этомъ, если показатель k_1 больше единицы, то корень a_1 называется *кратнымъ*; число k_1 называется степенью его кратности. Считая всякій m-кратный корень за m корней, мы замѣчаемъ, что общее число корней будетъ по прежнему равняться показателю степени уравненія, такъ какъ

$$k_1 + k_2 + \;.\;\;.\;\;.\;\;. + k_l = n.$$

Діофантовъ анализъ.

§ 45. Перейдемъ теперь къ слѣдующей категоріи извѣстныхъ въ исторіи математики невозможныхъ задачъ, къ тѣмъ задачамъ, которыя связаны съ такъ называемымъ Діофантовымъ анализомъ.

---

*) Линейными множителями мы называемъ множители первой степени.

Діофантъ—извѣстный александрійскій математикъ, жившій въ III столѣтіи послѣ *Р. X.* Изъ написанныхъ имъ тринадцати книгъ об ариѳметическихъ задачахъ до насъ дошли только шесть, но зат самыя важныя, и одно произведеніе о полигональныхъ числахъ Наиболѣе характерными для Діофанта являются вопросы о рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ и раціональныхъ числахъ. Эти вопросы долгое время составляли главный предметъ науки, носящей названіе теоріи чиселъ, такъ что этой наукѣ придавалось названіе Діофантики или Діофантова анализа.

Одна глава изъ Діофантова анализа вошла уже въ курс элементарной алгебры, именно глава о рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій первой степени въ цѣлыхъ числахъ. Особенно важный шагъ впередъ въ Діофантовомъ анализѣ былъ сдѣланъ открытіям одного изъ самыхъ выдающихся математическихъ умовъ, а именн Fermat'a жившаго отъ 1601 до 1665 года. Fermat не былъ математикомъ по профессіи; онъ былъ юристомъ и занималъ должность въ парламентѣ въ Тулузѣ. Обладая геніальными математическими способностями, онъ имѣлъ солидныя познанія по всѣмъ отраслямъ современной ему математики.

Онъ приготовилъ переводъ Діофанта и на поляхъ этого перевода сдѣлалъ свои знаменитыя замѣтки, въ которыхъ онъ сообщалъ свои открытія по теоріи чиселъ, къ сожалѣнію въ большинствѣ случаевъ безъ доказательства. Эти замѣтки оставили намъ, его потомкамъ, цѣлый рядъ нераскрытыхъ загадокъ.

Остановимся на одной изъ этихъ теоремъ, данныхъ безъ доказательства, представляющей такъ называемую великую теорему Fermat'a. Эта теорема формулируется очень просто:

Уравненіе

$$x^n + y^n = z^n$$

не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, отличныхъ отъ нуля, при n цѣломъ, большемъ, чѣмъ 2.

Сообщая эту теорему, Fermat въ своемъ изданіи Діофанта прибавляетъ только такія слова: „Я нашелъ для этого предложенія удивительное доказательство, но поле книги слишкомъ узко, чтобы его написать".

Уже больше двухсотъ лѣтъ невозможность рѣшенія этого уравненія въ цѣлыхъ числахъ при

$$n > 2$$

остается недоказанной. Въ послѣднее время появилась крупная премія, установленная однимъ умершимъ математикомъ въ Германіи, въ 100000 марокъ за рѣшеніе этой задачи.

Я упоминаю объ этой задачѣ, конечно, не ради этой преміи, а для того, чтобы на ней познакомить васъ съ частью математики, называемой Діофантовымъ анализомъ, а также и сообщить, что при стремленіи доказать невозможность задачи Fermat'а было сдѣлано въ XIX столѣтіи новое обобщеніе понятія о числѣ, были введены въ науку числа идеальныя.

§ 46. Для знакомства съ характеромъ задачъ Діофантова анализа разсмотримъ уравненіе Fermat'а при $n=2$, т. е.

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

Еще древніе математики знали, что можно построить прямоугольный треугольникъ, стороны котораго выражаются цѣлыми числами. Подъ названіемъ египетскаго треугольника былъ извѣстенъ такой прямоугольный треугольникъ, у котораго катеты выражались числами 3 и 4, а гипотенуза числомъ 5. Этотъ треугольникъ давалъ египтянамъ возможность строить прямые углы. Подобныхъ треугольниковъ очень много; легко найти всѣ эти треугольники: для этого надо рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе (1).

Если мы раздѣлимъ все уравненіе на z^2 и обозначимъ $\frac{x}{z}$ черезъ ξ, а $\frac{y}{z}$ черезъ η, то получимъ

$$\xi^2+\eta^2=1.$$

Рѣшая это уравненіе относительно η, имѣемъ

$$\eta=\sqrt{1-\xi^2}.$$

Чтобы η было числомъ раціональнымъ, необходимо раціональное число ξ взять меньше единицы. Такъ какъ квадратный корень

$$\sqrt{1-\xi^2}$$

долженъ оказаться положительнымъ раціональнымъ числомъ, меньшимъ единицы, то можно будетъ положить

$$\eta=\sqrt{1-\xi^2}=1-\frac{u}{v}\xi, \tag{2}$$

гдѣ u и v цѣлыя числа, подлежащія опредѣленію.

Возвышая въ квадратъ равенство (2), имѣемъ

$$\eta^2 = 1 - \xi^2 = 1 - \frac{2u}{v}\xi + \frac{u^2}{v^2}\xi^2.$$

Это уравненіе дастъ

$$(3) \qquad -\xi = -\frac{2u}{v} + \xi\frac{u^2}{v^2}.$$

Такъ какъ въ уравненіе (3) ξ входитъ въ первой степени, то мы получаемъ для числа ξ, рѣшающаго задачу, раціональное значеніе

$$(4) \qquad \xi = \frac{2uv}{u^2 + v^2};$$

подставляя полученное выраженіе для ξ въ уравненіе (2), получимъ

$$(5) \qquad \eta = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}.$$

Цѣлыя числа u и v остаются совершенно произвольными. Нетрудно убѣдиться, что мы получимъ общее рѣшеніе для чиселъ x, y, z, рѣшающихъ уравненіе (1), въ такомъ видѣ

$$x = 2uv; y = u^2 - v^2; z = u^2 + v^2;$$

подставляя вмѣсто u и v всевозможныя цѣлыя числа, получимъ безчисленное множество рѣшеній уравненія (1). Такъ, напримѣръ, при

$$u = 2; v = 1,$$

получимъ египетскій треугольникъ

$$x = 4; y = 3; z = 5.$$

При

$$u = 3; v = 2,$$

имѣемъ

$$x = 12; y = 5; z = 13.$$

§ 47. Переходя къ задачѣ Fermat'a необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что исторія попытокъ рѣшить ее сводится къ слѣдующему. Для $n = 4$ существуетъ доказательство, принадлежащее самому Fermat'y. Для $n = 3$ Euler'y удалось примѣнить соображенія, подобныя соображеніямъ Fermat'a. Случай $n = 5$ былъ рѣшенъ въ началѣ XIX вѣка Lejeune Dirichlet и Legendre'омъ. Въ 1837 году Lamé далъ доказательство для $n = 7$; въ 1847 году онъ сдѣлалъ попытку общаго доказательства теоремы Fermat'a. При этомъ онъ сдѣлалъ характерную ошибку, состоящую въ томъ, что ему были неизвѣстны принципы одной новой теоріи, которая была найдена и разработана Kummer'омъ. Эта теорія есть не что иное, какъ теорія идеальныхъ чиселъ. Она дала возможность Kummer'у сдѣлать громадный шагъ впередъ въ задачѣ Fermat'a, а именно, Kummer доказалъ задачу Fermat'a для безчисленнаго числа значеній показателя n. Между прочимъ Kummer'овское рѣшеніе является настолько серьезнымъ рѣшеніемъ, что изъ него вытекаетъ доказательство теоремы Fermat'a для всѣхъ значеній n, не превосходящихъ 100, и лишь при значеніяхъ n, бóльшихъ 100, появляются показатели, не подходящіе подъ теорію Kummer'a, при которыхъ задача остается по прежнему недоказанной. Жюри, находящееся въ Геттингенѣ, которое теперь разсматриваетъ рѣшенія этой задачи, получаетъ массу рѣшеній, но, конечно, всѣ они ошибочны, въ особенности рѣшенія элементарныя. Ясно, что задача, прошедшая черезъ усилія Euler'a, Lagrange'a, Legendre'a, Dirichlet, Abel'я, Kummer'a, думавшаго о ней цѣлую жизнь, прошла не случайно, что ее дѣйствительно трудно рѣшить. Относительно элементарныхъ доказательствъ жюри даже заявило, что оно не будетъ ихъ разсматривать, если они напечатаны частнымъ образомъ, а будетъ обращать вниманіе только на тѣ рѣшенія, которыя напечатаны въ какомъ нибудь журналѣ; такимъ образомъ оно хочетъ гарантировать себя отъ разсмотрѣнія совсѣмъ нелѣпыхъ рѣшеній. Итакъ, можно съ полнымъ основаніемъ предполагать, что эта задача можетъ быть рѣшена только распространеніемъ рѣшенія Kummer'a на всѣ значенія n, представляющія пока затрудненія.

Задача трехъ тѣлъ.

§ 48. Чтобы закончить главу о невозможныхъ задачахъ, игравшихъ въ исторіи математики большую роль, я долженъ сказать еще объ одной задачѣ. Хотя она и не принадлежитъ къ числу невозможныхъ, но тѣмъ не менѣе до сихъ поръ не рѣшена. Старались рѣшить ее уже около двухсотъ лѣтъ, начиная съ Newton'a, и она оставила большой слѣдъ въ математикѣ; она вызвала къ жизни цѣлый рядъ изслѣдованій въ разныхъ направленіяхъ. Это такъ называемая задача трехъ тѣлъ. Задача эта есть частный случай болѣе общей задачи, задачи какого угодно числа n тѣлъ. Newton въ своихъ „Principia mathematica philosophiae naturalis“ показалъ, что̀ нужно сдѣлать для того, чтобы рѣшить такую задачу. Намъ дается въ пространствѣ, предполагаемомъ совершенно пустымъ, положеніе n матеріальныхъ тѣлъ въ извѣстныхъ n точкахъ

$$N_1, N_2, N_3, \ldots . N_n;$$

n—цѣлое число. Задаются и массы заданныхъ тѣлъ, т. е. для всѣхъ точекъ предполагаются заданными нѣкоторыя положительныя числа

$$m_1, m_2, m_3, \ldots . m_n.$$

Этимъ точкамъ даны толчки, т. е. для нихъ произвольно заданы первоначальныя скорости по величинѣ и направленію. Предполагается при этомъ, что тѣла притягиваются другъ къ другу по такому закону: сила взаимнаго притяженія пропорціональна массамъ точекъ и обратно пропорціональна квадрату разстоянія между ними. Требуется разсказать всю дальнѣйшую исторію движенія этихъ матеріальныхъ точекъ, т. е. требуется въ каждый послѣдующій моментъ времени указать мѣста, гдѣ эти точки находятся и опредѣлить, куда и съ какой скоростью они въ этотъ моментъ направляются. Newton показалъ, что, примѣняя дифференціальное исчисленіе, можно написать такъ называемыя дифференціальныя уравненія движенія этихъ точекъ. О томъ, что такое дифференціальное уравненіе, мы скажемъ послѣ. Написаніе этихъ дифференціальныхъ уравненій оказывается очень простымъ; вся задача сводится къ рѣшенію ихъ или, какъ говорятъ, къ ихъ *интегрированію*. Что касается рѣшенія этихъ уравненій, то оказалось, что Newton рѣшилъ ихъ только для случая двухъ тѣлъ. Задача трехъ тѣлъ уже превысила его силы. Она по наслѣдству осталась для слѣдующихъ поколѣній математиковъ.

Въ природѣ приходится имѣть дѣло съ задачей не только двухъ или трехъ тѣлъ, но гораздо большаго числа ихъ. Мы видимъ на примѣрѣ нашей солнечной системы совершающееся на самомъ дѣлѣ движеніе большаго числа тѣлъ; здѣсь ихъ очень много. Для астрономіи было, конечно, очень неудобно, что задача движенія нѣсколькихъ тѣлъ встрѣтила серьезныя затрудненія даже при трехъ тѣлахъ. Но, какъ мы увидимъ дальше, во всѣхъ задачахъ, поставленныхъ натуральной философіей наблюденіями природы, эти наблюденія сами подсказываютъ до нѣкоторой степени и рѣшеніе ихъ. И хотя задачи трехъ и большаго числа тѣлъ представили большія трудности, все же оказалось возможнымъ дать достаточныя для практики приближенныя ихъ рѣшенія. Изъ этихъ приближенныхъ рѣшеній задачъ о n тѣлахъ образовалась особая наука, названная небесной механикой. Творцомъ этой науки былъ знаменитый математикъ Laplace. Оказалось, что наша планетная система представляетъ, къ сожалѣнію, одинъ частный случай этой задачи. Фактъ состоитъ въ томъ, что планеты, двигающіяся вокругъ солнца, двигаются почти въ одной и той же плоскости. Какъ это произошло, мы сказать не можемъ. Масса планетъ очень мала въ сравненіи съ массой центральнаго тѣла, солнца. Залетаютъ къ намъ иногда постороннія тѣла, кометы, но это происходитъ рѣдко, и масса этихъ тѣлъ невелика. Все вмѣстѣ взятое дѣлаетъ то, что практически необходимая для астрономіи задача многихъ тѣлъ сравнительно проста. Нѣкоторые астрономы мечтаютъ о томъ, что тройныя звѣзды дадутъ намъ возможность рѣшить задачу трехъ тѣлъ. Но если вы припомните, что для того, чтобы надъ системой тройной звѣзды сдѣлать наблюденія, которыя помогли бы намъ рѣшить задачу о трехъ тѣлахъ, нужно ждать нѣсколько вѣковъ, пока произойдетъ въ ней значительное перемѣщеніе, то станетъ яснымъ, что надо пытаться рѣшить задачу чисто математическимъ способомъ, хотя бы приближенно. Пока задача трехъ тѣлъ остается нерѣшенной точно.

§ 49. Обратимся къ рѣшенію задачи двухъ тѣлъ. Въ концѣ курса, когда мы будемъ говорить о механикѣ, мы вернемся къ этой задачѣ.

Если мы имѣемъ въ точкахъ A и B, два тѣла, массы которыхъ равны m и m_1, и если мы сообщимъ имъ нѣкоторыя скорости, то судьба ихъ на вѣчныя времена будетъ такова: соединимъ двѣ точки A и B (черт. 8), въ которыхъ находятся тѣла, прямой и представимъ мысленно на этой прямой центръ тяжести этихъ двухъ тѣлъ. Какъ бы ни двигались тѣла, постоянно будемъ слѣдить мысленно за движеніемъ этого центра тяжести. Движеніе будетъ таково, что центръ тяжести будетъ двигаться равномѣрно по прямой, около этого центра тяжести оба тѣла будутъ описывать движенія по закону Kepler'а, т. е. каждое тѣло будетъ двигаться по одной изъ линій, эллипсу, параболѣ или гиперболѣ, въ фокусѣ которыхъ будетъ находиться центръ тяжести. Въ этомъ состоитъ рѣшеніе задачи двухъ тѣхъ. На основаніи этого рѣшенія можно будетъ

Черт. 8.

прослѣдить движеніе каждаго изъ нихъ черезъ сколько угодно лѣтъ и опредѣлить, гдѣ будетъ находиться эта система во всякій будущій моментъ времени.

Что касается задачи трехъ тѣлъ, то равномѣрное движеніе центра тяжести по прямой имѣетъ мѣсто, т. е. если мы возьмемъ треугольникъ, въ его вершинахъ помѣстимъ массы трехъ данныхъ тѣлъ, а затѣмъ найдемъ центръ тяжести, то этотъ центръ будетъ двигаться равномѣрно по прямой. Рѣшеніе же вопроса, какъ тѣла будутъ вращаться и перемѣщаться относительно этого центра, не поддается до сихъ поръ силамъ математики. Приближенное рѣшеніе возможно, но оно можетъ давать годные результаты при изслѣдованіи движенія только впродолженіе нѣкотораго времени. Если же мы будемъ разсматривать достаточно большой промежутокъ времени, то приближеніе становится недостаточнымъ.

§ 50. Обратимъ вниманіе на одно важное обстоятельство. Пытаясь подойти къ общей задачѣ трехъ тѣлъ, математики уже съ XVIII вѣка начали рѣшать болѣе простыя задачи. Такъ, они предполагали, что два тѣла укрѣплены неподвижно и старались разсмотрѣть, какъ будетъ двигаться тогда третье тѣло. Оказалось, что и эта задача, хотя болѣе простая, встрѣтила громадныя затрудненія. Euler'у удалось преодолѣть затрудненіе въ этой задачѣ притяженія какого нибудь тѣла къ двумъ неподвижнымъ центрамъ. Рѣшеніе привело Euler'а къ весьма важной теоремѣ, о которой я скажу дальше, когда буду говорить о періодическихъ функціяхъ, именно къ теоремѣ, относящейся къ такъ называемымъ эллиптическимъ функціямъ. Она положила начало весьма важной теоріи этихъ функцій. Въ настоящее время задача трехъ тѣлъ нѣсколько подвинута благодаря изслѣдованіямъ современнаго математика Poincarré. Теперь только одну точку оставляютъ неподвижной, но такихъ серьезныхъ результатовъ, какіе Euler получилъ въ случаѣ двухъ неподвижныхъ центровъ, еще пока не получено для этой задачи. Рѣшеніе вопроса двигается очень медленно.

ГЛАВА II.

Параллелизмъ между анализомъ и геометріей.

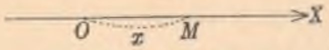
§ 1. Къ первой половинѣ XVII столѣтія принадлежитъ замѣчательное открытіе, сдѣланное философомъ Descartes'омъ и названное имъ *аналитической геометріей.*

Это открытіе представляетъ собою общій способъ переводить рѣшеніе геометрическихъ задачъ на алгебраическія вычисленія. Значеніе этого открытія идетъ глубже, а именно, аналитическая геометрія раскрываетъ замѣчательный параллелизмъ, существующій между алгеброй-анализомъ съ одной стороны и геометріей съ другой. Этотъ параллелизмъ приводитъ къ важнымъ практическимъ результатамъ для рѣшенія геометрическихъ задачъ, а также открываетъ новые горизонты въ философскомъ отношеніи.

Понятіе о декартовыхъ координатахъ.

§ 2. Въ основѣ способа Descartes'а лежитъ введеніе въ разсмотрѣніе нѣкоторыхъ чиселъ, которыя Descartes назвалъ *координатами* и которыя даютъ возможность указывать положеніе точки на линіи, поверхности и въ пространствѣ. Существуетъ безчисленное множество способовъ введенія въ разсмотрѣніе такихъ координатъ. Мы остановимся на простѣйшемъ способѣ, способѣ такъ называемыхъ *прямолинейныхъ координатъ.* Эти координаты часто называютъ также декартовыми.

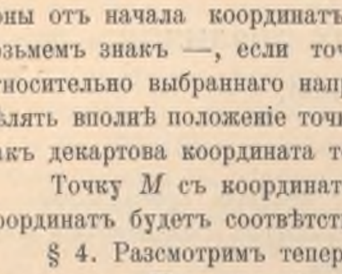
§ 3. Разсмотримъ сначала геометрію одного измѣренія, а именно геометрію на одной прямой. Чтобы опредѣлить положеніе точки M (черт. 9) на прямой, можно поступить такъ. Возьмемъ произвольно нѣкоторую основную точку O на прямой и будемъ эту точку называть *началомъ координатъ*. Возьмемъ на прямой нѣкоторое направленіе, напримѣръ OX, указанное на чертежѣ стрѣлкой. Тогда всякой точкѣ M прямой будетъ соотвѣтствовать число x, абсолютная величина котораго равняется разстоянію OM этой точки M до начала координатъ O, знакъ же числа x $+$ или$-$опредѣлимъ такимъ образомъ: возьмемъ знакъ $+$, если точка M лежитъ съ той стороны отъ начала координатъ O, куда идетъ направленіе OX, и возьмемъ знакъ $-$, если точка M лежитъ съ другой стороны относительно выбраннаго направленія. Тогда число x будетъ опредѣлять вполнѣ положеніе точки M, и это число будетъ ничто иное, какъ декартова координата точки M.



Черт. 9.

Точку M съ координатой x будемъ обозначать (x), началу координатъ будетъ соотвѣтствовать знакъ (O).

§ 4. Разсмотримъ теперь двухмѣрную геометрію, геометрію на плоскости. Проведемъ (черт. 10) въ плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя OX и OY, пересѣкающіяся въ точкѣ O. Назовемъ эти прямыя *осями координатъ*, а точку O *началомъ координатъ*. Тогда положеніе всякой точки M плоскости можетъ быть указано такъ. Опустимъ изъ этой точки M перпендикуляры на оси координатъ, получимъ на осяхъ двѣ точки основаній этихъ перпендикуляровъ, точку P на оси OX и точку Q на оси OY. Тогда положеніе точки M на плоскости опредѣлится положеніями точекъ P и Q на осяхъ. Положеніе точки P на оси OX можно указать координатой $x = OP$, если взять за начало O и выбрать нѣкоторое направленіе на этой оси OX. Точно такъ же положеніе точки Q на оси OY можно указать координатой $y = OQ$ при выборѣ за начало точки O и при указаніи нѣкотораго опредѣленнаго направленія OY на этой оси.



Черт. 10.

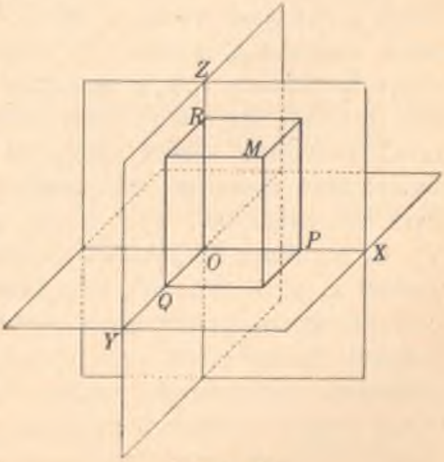
Числа x и y опредѣляютъ вполнѣ положеніе точки M на плоскости. Поэтому эти числа x и y называются *координатами точки на плоскости*. Сохранились до сихъ поръ латинскія названія: одна изъ двухъ декартовыхъ координатъ x и y, обыкновенно x, называется *абсциссою* (abscissa, отрѣзокъ), другая называется *ординатою* (ordonata).

Если мы цифрой I обозначимъ уголъ между положительными направленіями осей OX и OY, а другіе вертикальные углы, въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки, назовемъ II, III, IV, то получится такая таблица знаковъ координатъ

	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Точку M съ координатами x, y обозначимъ знакомъ (x,y). Началу координатъ соотвѣтствуетъ знакъ $(0,0)$.

§ 5. Обратимся къ разсмотрѣнію трехмѣрнаго пространства. Возьмемъ въ пространствѣ прямоугольный трехгранный уголъ (черт. 12) съ вершиною въ точкѣ O. Пусть ребра этого угла будутъ OX, OY, OZ; такъ какъ мы предполагаемъ трехгранный уголъ прямоугольнымъ, то всѣ плоскіе углы между ребрами—прямые.



Черт. 11.

Если мы продолжимъ плоскости этого трехграннаго угла безконечно во всѣ стороны, то эти плоскости раздѣлятъ все пространство на восемь вертикальныхъ угловъ. Укажемъ на ребрахъ OX, OY и OZ нѣкоторыя, произвольно выбранныя, направленія. Чтобы проще оріентироваться въ этихъ направленіяхъ, поступимъ такъ: представимъ себѣ наблюдателя ногами въ точкѣ O, головой по направленію, выбранному на ребрѣ OZ: лицомъ въ сторону направленія, выбраннаго на ребрѣ OY, тогда направленіе на ребрѣ OX можетъ итти или направо отъ наблюдателя, или налѣво. Слѣдовательно, возможны только двѣ различныя комбинаціи направленій на трехъ линіяхъ OX, OY и OZ: одна комбинація, когда направленіе третьей линіи идетъ налѣво отъ наблюдателя, другая—когда направо. Возьмемъ для опредѣленности рѣчи первую комбинацію (направленіе OX идетъ налѣво). Тогда изъ восьми вертикальныхъ угловъ для нашего наблюдателя четыре будутъ верхніе, четыре нижніе, четыре передніе, четыре задніе, четыре лѣвые, четыре правые.

Возьмемъ какую-нибудь точку M пространства и проведемъ черезъ нее три плоскости, параллельныя гранямъ заданнаго трехграннаго угла; получимъ прямоугольный параллелепипедъ, образованный тремя гранями заданнаго угла и тремя новыми, проведенными черезъ точку M, плоскостями. Вершина O и точка M будутъ противоположными точками (по діагонали) этого параллелепипеда. Параллелепипедъ этотъ оказывается вставленнымъ въ одинъ изъ вертикальныхъ угловъ, причемъ одна его вершина лежитъ въ вершинѣ O трехграннаго угла, три ребра OP, OQ и OR расположены на трехъ линіяхъ OX, OY и OZ. Будемъ опредѣлять положеніе вершины P параллелепипеда на прямой OX координатой x (по правилу § 3); подобнымъ образомъ будемъ опредѣлять координатой y положеніе точки Q на линіи OY и координатой z положеніе вершины R на линіи OZ. Нетрудно убѣдиться, что заданіемъ трехъ координатъ x, y, z опредѣляется вполнѣ положеніе точки въ пространствѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если задана точка M пространства, проводимъ черезъ точку M три плоскости, параллельныя плоскостямъ заданнаго трехграннаго угла; эти плоскости пересѣкутъ три линіи OX, OY, OZ въ трехъ опредѣленныхъ точкахъ P, Q, R, этимъ же точкамъ соотвѣтствуютъ опредѣленныя координаты x, y, z. Обратно, если заданы координаты x, y, z, то имъ соотвѣтствуютъ опредѣленныя точки P, Q и R на соотвѣтственныхъ ребрахъ трехграннаго угла; проводя черезъ эти точки P, Q, R плоскости, параллельныя гранямъ трехграннаго угла, получимъ въ точкѣ пересѣченія этихъ трехъ плоскостей вполнѣ опредѣленную точку M пространства, которая будетъ соотвѣтствовать заданнымъ координатамъ. Координата x положительна, если точка M лежитъ въ одномъ изъ лѣвыхъ угловъ, отрицательна—для правыхъ; координата y имѣетъ положительное значеніе въ переднихъ углахъ и отрицательное въ заднихъ; координата z положительна въ верхнихъ углахъ и отрицательна въ нижнихъ. Каждому вертикальному углу будетъ соотвѣтствовать своя комбинація знаковъ; всѣхъ комбинацій можетъ быть восемь, столько же и всѣхъ вертикальныхъ угловъ. Основной трехгранный уголъ представляетъ такъ называемую *систему координатъ*. Вершина O есть *начало координатъ*. Линіи OX, OY и OZ—*оси координатъ*; плоскости граней трехграннаго угла называются *координатными плоскостями*.

Точку M съ координатами x, y, z будемъ обозначать знакомъ

$$M\ (x,\ y,\ z).$$

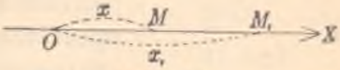
Началу коорлинатъ будетъ соотвѣтствовать знакъ

$$(0,\ 0,\ 0).$$

§ 6. На основаніи всего сказаннаго можно догадаться, что если бы мы могли себѣ представить наглядно геометрію четырехъ измѣреній, то пришлось бы ввести четыре координаты x, y, z, u, и вообще говоря, число координатъ соотвѣтствуетъ числу измѣреній.

Разстояніе двухъ точекъ.

§ 7. Покажемъ, какъ вычислить разстояніе между точками $M(x)$ и $M_1(x_1)$ на прямой линіи (черт. 12), если извѣстны координаты этихъ точекъ x и x_1.



Черт. 12.

Очевидно, что это разстояніе будетъ

$$|x_1 - x|,$$

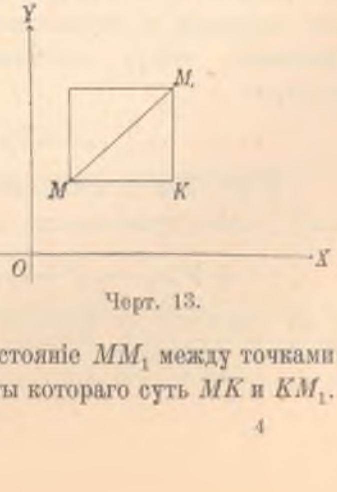
т. е. это разстояніе будетъ равняться абсолютной величинѣ разности координатъ. Эту абсолютную величину можно выразить знакомъ

$$+\sqrt{(x_1-x)^2}.$$

§ 8. Обращаемся теперь къ плоской геометріи. Пусть разсматриваются двѣ точки $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ на плоскости (черт. 13). Предполагаются заданными координаты ихъ

$$x, y\ ;\ x_1, y_1.$$

Разстояніе MM_1 этихъ точекъ есть не что иное, какъ діагональ прямоугольника, имѣющаго эти точки вершинами, стороны котораго параллельны осямъ координатъ, или, другими словами, разстояніе MM_1 между точками будетъ гипотенузой треугольника, катеты котораго суть MK и KM_1.



Черт. 13.

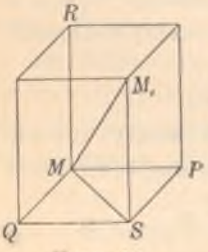
Но изъ чертежа очевидно, что эти катеты равны абсолютнымъ величинамъ соотвѣтствующихъ разностей координатъ, причемъ

$$MK = |x_1 - x|,$$
$$M_1K = |y_1 - y|.$$

Тогда по теоремѣ Пиѳагора получимъ для разстоянія двухъ точекъ формулу

$$+\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}.$$

§ 9. Въ трехмѣрномъ пространствѣ придется разсматривать уже прямоугольный параллелепипедъ, построенный на разстояніи двухъ точекъ M, M_1 (черт. 14), какъ на діагонали, и имѣющій плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ. Имѣемъ



Черт. 14.

$$MM_1^2 = MS^2 + SM_1^2;$$

кромѣ того

$$MS^2 = MP^2 + PS^2;$$

складывая два послѣднихъ равенства, получаемъ

$$MM_1^2 = MP^2 + PS^2 + SM_1^2.$$

Получается обобщенная теорема Пиѳагора, состоящая въ томъ, что квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равняется суммѣ квадратовъ трехъ его непараллельныхъ между собой реберъ. Если противоположныя вершины M и M_1, на которыхъ построенъ параллелепипедъ, имѣютъ координаты

$$M(x, y, z) \text{ и } M_1(x_1, y_1, z_1),$$

то очевидно, что ребра этого параллелепипеда будутъ равняться абсолютнымъ величинамъ разностей координатъ, такъ что для діагонали параллелепипеда, которая есть не что иное, какъ разстояніе между заданными точками M и M_1, получается формула

$$+\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

§ 10. Мы догадываемся, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ должна существовать для разстоянія формула

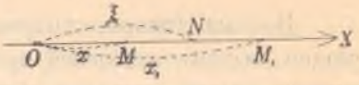
$$+\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 + (u_1 - u)^2},$$

и что подобная же формула будетъ существовать для какого угодно числа измѣреній.

Середина отрѣзка.

§ 11. Возьмемъ сначала геометрію одного измѣренія. Пусть заданы двѣ точки $M(x)$ и $M_1(x_1)$. Найдемъ координату ξ середины N отрѣзка MM_1 (черт. 15). Имѣемъ

$$x_1 - \xi = \xi - x$$
$$2\xi = x + x_1.$$



Черт. 15.

Откуда

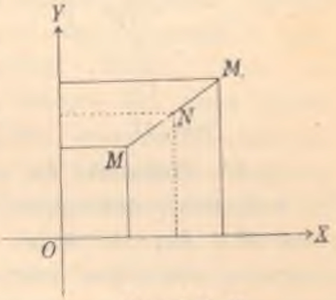
$$\xi = \frac{x+x_1}{2}.$$

Итакъ, получаемъ середину

$$N\left(\frac{x+x_1}{2}\right),$$

т. е. координата середины отрѣзка равняется среднему ариѳметическому изъ координатъ концовъ.

§ 12. Перейдемъ теперь къ нахожденію середины отрѣзка на плоскости.



Черт. 16.

Опустимъ изъ концовъ M и M_1 отрѣзка MM_1 (черт. 16), а также изъ середины N отрѣзка перпендикуляры на обѣ оси координатъ. Тогда мы замѣчаемъ, что основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ середины, дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ между основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ концовъ. Отсюда мы получаемъ, что если концы M и M_1 заданы координатами

$$M(x, y)\ ,\ M_1(x_1 y_1),$$

то для координатъ середины N получимъ среднія ариѳметическія, т. е.

$$N\left(\frac{x+x_1}{2}\ ,\ \frac{y+y_1}{2}\right).$$

§ 13. Очевидно, что будетъ существовать аналогичное предложеніе въ трехмѣрной геометріи, а именно, если концы отрѣзка въ трехмѣрномъ пространствѣ будутъ имѣть координаты

$$M(x, y, z) \text{ и } M_1(x_1, y_1, z_1),$$

то середина N будетъ имѣть координаты

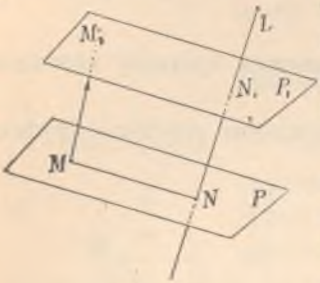
$$N\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}, \frac{z+z_1}{2}\right).$$

Вообще говоря, получается для пространства съ какимъ угодно числомъ измѣреній предложеніе, что координаты середины отрѣзка будутъ средними ариѳметическими изъ соотвѣтственныхъ координатъ концовъ.

О проекціяхъ.

§ 14. Возьмемъ въ пространствѣ нѣкоторую прямую L и внѣ ея точку M (черт. 17). Проведемъ черезъ M плоскость, перпендикулярную къ прямой L; эта плоскость P пересѣчетъ прямую L въ точкѣ N. Будемъ называть точку N *прямоугольною проекціей* или просто *проекціей* точки M на прямой L. Прямую L будемъ называть *осью проекцій*.

Если мы соединимъ точку M съ проекціей N прямою MN, то эта прямая будетъ ничѣмъ инымъ, какъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки M на ось L; мы ее будемъ называть *проектирующимъ перпендикуляромъ*.



Черт, 17.

§ 15. Возьмемъ въ пространствѣ другую точку M_1 (черт. 17) и будемъ разсматривать отрѣзокъ MM_1 прямой, соединяющей точки M и M_1. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ отрѣзкамъ придавать нѣкоторое направленіе и понимать это направленіе, какъ направленіе движенія вдоль поотрѣзку отъ одного изъ его концовъ къ другому. Если на отрѣзкѣ MM_1 мы укажемъ направленіе отъ точки M къ точкѣ M_1, то будемъ называть точку M началомъ отрѣзка, а точку M_1 концомъ отрѣзка. Если будемъ проектировать конецъ M_1 отрѣзка MM_1 при помощи плоскости P_1 на ось проекцій L, то получимъ проекцію N_1 конца отрѣзка. Отрѣзокъ NN_1, образованный на оси L проекціями концовъ отрѣзка MM_1, мы будемъ называть проекціей заданнаго отрѣзка MM_1 на оси L. Если на заданномъ отрѣзкѣ направленіе уже указано, то мы будемъ на проекціи отрѣзка выбирать направленіе соотвѣтствующее, причемъ за начало проекціи будемъ считать проекцію начала отрѣзка.

Мы будемъ обозначать какъ проекціи, такъ и вообще отрѣзки буквами, обозначающими концы, причемъ на первое мѣсто будемъ ставить букву начала отрѣзка. Такъ, напримѣръ, можемъ написать

$$NN_1 = \text{пр. } MM_1.$$

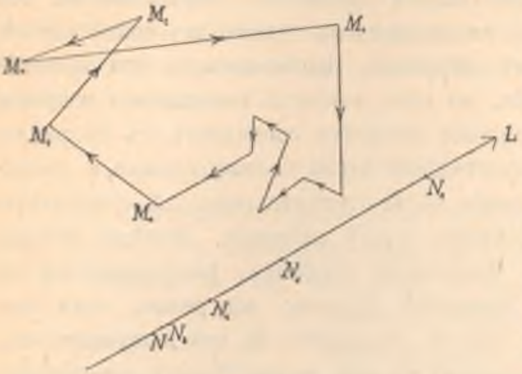
§ 16. Будемъ сопоставлять проекціямъ отрѣзковъ на оси нѣкоторыя вещественныя числа, причемъ будемъ это сопоставленіе производить слѣдующимъ образомъ. Выбираемъ на оси проекцій произвольное направленіе, но разъ навсегда для даннаго вопроса, тогда проекціямъ, направленіе которыхъ совпадаетъ съ направленіемъ на оси, будемъ сопоставлять числа положительныя, а проекціямъ обратнаго направленія числа отрицательныя, за абсолютную же величину числа возьмемъ длину проекціи. Вообще говоря, нѣтъ надобности, чтобы нѣкоторый отрѣзокъ, расположенный на оси, былъ непремѣнно проекціей другого; все равно, если разсматривается нѣкоторая ось съ заданнымъ на ней направленіемъ, то всякому отрѣзку, лежащему на ней, можно будетъ сопоставить нѣкоторое число совершенно такимъ же образомъ, какъ это сказано для проекцій.

§ 17. Во всемъ дальнѣйшемъ подъ словомъ проекція отрѣзка мы будемъ разумѣть или отрѣзокъ на оси, опредѣленный по правиламъ § 15, или соотвѣтствующее этому отрѣзку число. По смыслу фразы всегда будетъ ясно, въ какомъ изъ этихъ двухъ значеній употреблено слово проекція. Такъ, напримѣръ, если говорится „сумма проекцій“, то очевидно, что идетъ рѣчь о числахъ, если же сказано „направленіе проекціи“, то дѣло идетъ объ отрѣзкѣ. Въ этомъ и состоитъ сущность аналитической геометріи, что мы употребляемъ выраженія, въ которыхъ совмѣщаются сразу два понятія, аналитическое и геометрическое.

§ 18. Разсмотримъ (черт. 18) n точекъ въ пространствѣ

$$M_1, M_2, \ldots . M_n.$$

Предположимъ, что наши точки выбраны совершенно произвольно такъ, что могутъ не лежать въ одной плоскости. Будемъ соединять эти точки попарно прямыми, причемъ за начало каждаго слѣдующаго отрѣзка будемъ брать конецъ предыдущаго; послѣднюю точку M_n соединимъ прямою съ первою точкою M_1. Получаемъ такимъ образомъ сомкнутую ломанную линію—многоугольникъ, который, вообще говоря, будетъ косой, т. е. стороны его не будутъ лежать въ одной плоскости. Если въ этой ломанной линіи, какъ было сказано, начало каждой слѣдующей стороны есть конецъ предыдущей, то направленія этихъ сторонъ идутъ въ одну сторону вдоль по периметру этой ломанной линіи и значитъ, слѣдуя по направленію сторонъ, мы обходимъ всѣ вершины многоугольника и возвращаемся въ первоначальную точку. Будемъ проектировать стороны многоугольника на нѣкоторую ось проекцій L. Пусть проекціи вершинъ $M_1, M_2 \ldots M_n$ будутъ точки $N_1, N_2 \ldots N_n$. Очевидно, что мы получимъ независимо отъ расположенія точекъ $N_1, N_2, \ldots N_n$ равенство



Черт. 18.

$$(1) \qquad N_1 N_2 + N_2 N_3 + \ldots + N_{n-1} N_n + N_n N_1 = 0,$$

ибо, двигаясь отъ точки N_1 ко всѣмъ остальнымъ и возвращаясь въ первоначальную точку N_1, мы будемъ перемѣщаться столько же налѣво, сколько и направо, такъ что общее перемѣщеніе въ концѣ концовъ окажется равнымъ нулю.

Но мы имѣемъ

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &= \text{пр. } M_1 M_2 \\ N_2 N_3 &= \text{пр. } M_2 M_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_n N_1 &= \text{пр. } M_n M_1. \end{aligned}$$

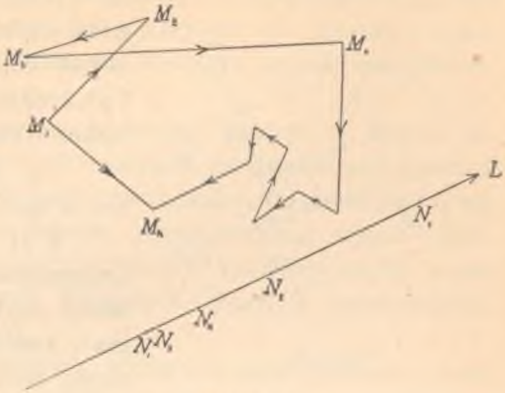
Отсюда получаемъ

$$(2) \; \text{пр. } M_1 M_2 + \text{пр. } M_2 M_3 + \ldots + \text{пр. } M_{n-1} M_n + \text{пр. } M_n M_1 = 0,$$

что даетъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Сумма проекцій сторонъ сомкнутаго многоугольника на любую ось въ пространствѣ равна нулю.*

§ 19. Измѣнимъ направленіе одной изъ сторонъ сомкнутаго многоугольника, напримѣръ $M_n M_1$ (черт. 19). Тогда изъ точки M_1 въ точку M_n можно будетъ попасть или слѣдуя по новому направленію стороны $M_n M_1$, или же по первоначальному направленію всѣхъ остальныхъ сторонъ вдоль по контору. Мы будемъ говорить, что сторона $M_1 M_n$ съ ея новымъ направленіемъ есть *замыкающая* сторона несомкнутой ломанной линіи



Черт. 19.

$$M_1 M_2 M_3 \,.\;\;.\;\;.\;\;.\, M_{n-1} M_n.$$

Равенство (2) предыдущаго §-а можно будетъ переписать такъ
$$\text{пр. } M_1 M_2 + \text{пр. } M_2 M_3 + \;.\;.\;.\; + \text{пр. } M_{n-1} M_n - \text{пр. } M_1 M_n = 0,$$
слѣдовательно, мы имѣемъ
$$\text{пр. } M_1 M_n = \text{пр. } M_1 M_2 + \text{пр. } M_2 M_3 + \;.\;.\;.\; + \text{пр. } M_{n-1} M_n,$$
откуда получаемъ теорему.

Теорема. *Проекція на любую ось замыкающей стороны многоугольника равна суммѣ проекцій сторонъ замыкаемой ломанной линіи.*

§ 20. Теорема. *Проекція отрѣзка на оси равняется произведенію длины отрѣзка на косинусъ угла между направленіемъ отрѣзка и направленіемъ оси проекцій.*

Проведемъ черезъ начало M отрѣзка MM_1 (черт. 20) прямую MK параллельно оси проекцій до встрѣчи въ точкѣ K съ плоскостью P_1, проектирующей конецъ отрѣзка MM_1; тогда изъ треугольника MM_1K будемъ имѣть

(1) $$\text{пр. } MM_1 = NN_1$$

(2) $$MK = MM_1 \cos (M_1 MK)$$

Обозначимъ теперь черезъ θ уголъ между направленіемъ нашего отрѣзка и направленіемъ оси, тогда имѣемъ

$$\angle M_1MK = \vartheta;$$

кромѣ того имѣемъ равенство

(3) $$MK = NN_1,$$

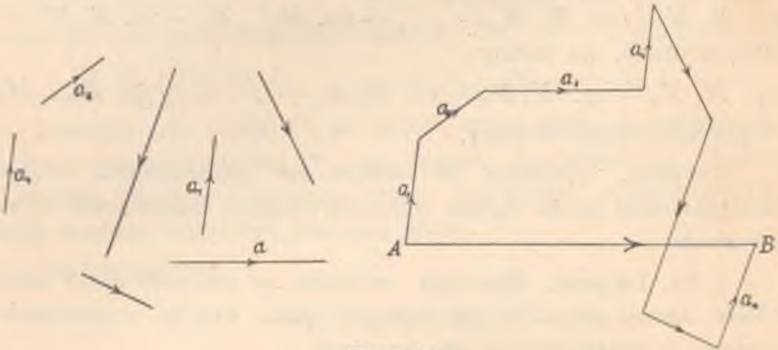
какъ отрѣзки параллельныхъ между двумя параллельными плоскостями. Сопоставляя формулы (1), (2) и (3), можемъ написать

$$\text{пр. } MM_1 = MM_1 \cos \vartheta,$$

что и требовалось доказать.

Черт. 20.

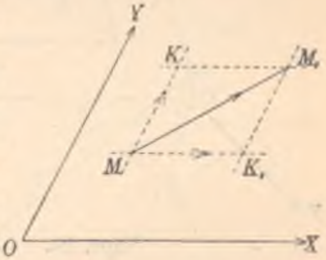
§ 21. Введемъ понятіе о такъ называемомъ геометрическомъ сложеніи отрѣзковъ. Два отрѣзка будемъ называть *геометрически равными*, если длины ихъ равны и они параллельны между собой и одинаково направлены. Замѣну одного изъ двухъ геометрически равныхъ отрѣзковъ другимъ мы будемъ называть параллельнымъ перемѣщеніемъ отрѣзка. Пусть задано въ пространствѣ n отрѣзковъ $a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n$ (черт. 21).



Черт. 21.

Подъ *геометрическимъ сложеніемъ* этихъ отрѣзковъ будемъ разумѣть такую операцію: перемѣщаемъ отрѣзокъ a_1 такимъ образомъ, чтобы его начало попало въ нѣкоторую опредѣленную точку A пространства; второй отрѣзокъ a_2 перемѣщаемъ параллельно такимъ образомъ, чтобы его начало попало въ конецъ перемѣщеннаго перваго отрѣзка; далѣе перемѣщаемъ третій отрѣзокъ a_3, заставляя его начало попасть въ конецъ предыдущаго перемѣщеннаго отрѣзка; продолжая такимъ образомъ дальше, получимъ ломанную линію, которая будетъ представлять результатъ такъ называемаго геометрическаго сложенія отрѣзковъ. Замыкающую сторону AB мы будемъ называть *геометрическою суммою* заданныхъ отрѣзковъ. Не трудно убѣдиться, что геометрическая сумма не зависитъ отъ порядка, въ которомъ произведено сложеніе отрѣзковъ.

§ 22. Разсмотримъ теперь обратную задачу, а именно задачу нахожденія слагаемыхъ по заданной геометрической суммѣ и по заданнымъ направленіямъ этихъ слагаемыхъ. Начнемъ со случая двухъ слагаемыхъ. Пусть задана геометрическая сумма MM_1 (черт. 22); направленія двухъ слагаемыхъ укажемъ двумя осями OX и OY, выходящими изъ нѣкоторой точки O пространства. Итакъ формулируемъ задачу.

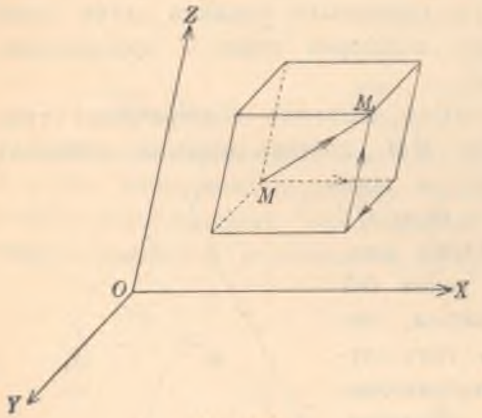


Черт. 22.

Найдемъ два такихъ отрѣзка, чтобы ихъ геометрическая сумма равнялась заданному отрѣзку MM_1, причемъ одинъ изъ отрѣзковъ долженъ быть параллеленъ съ осью OX, а другой отрѣзокъ съ осью OY (это и значитъ, что направленія искомыхъ слагаемыхъ указаны осями OX и OY). Не трудно убѣдиться, что задача возможна лишь въ томъ случаѣ, когда заданная геометрическая сумма MM_1 параллельна плоскости, проходящей черезъ обѣ оси, т. е. плоскости XOY. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что задача возможна, и что мы нашли слагаемыя MK и MK_1. Плоскость треугольника MKM_1 должна быть параллельна плоскости XOY, ибо MK_1 параллельно OX и KM параллельно OY, слѣдовательно, плоскость треугольника MM_1K параллельна плоскости осей, и слѣдовательно прямая MM_1 параллельна плоскости, образуемой осями; мы замѣчаемъ, что задача нахожденія двухъ слагаемыхъ даннаго направленія по заданной суммѣ возможна только въ плоской геометріи, потому что, если отрѣзокъ MM_1 параллеленъ плоскости XOY, то его безъ измѣненія общности задачи можно предположить перенесеннымъ параллельно на плоскость XOY.

Итакъ, будемъ разсматривать задачу на плоскости; пусть заданы двѣ оси OX и OY и въ той же плоскости нѣкоторый отрѣзокъ MM_1; для полученія искомыхъ слагаемыхъ, параллельныхъ осямъ, проведемъ черезъ оба конца M и M_1 прямыя, параллельныя осямъ; получимъ параллелограммъ MKM_1K_1, стороны котораго и дадутъ два искомыхъ слагаемыхъ, параллельныхъ осямъ. Будемъ называть слагаемыя MK и KM_1 *составляющими отрѣзка* MM_1 *на осяхъ*, причемъ MK будетъ составляющая отрѣзка MM_1 на оси OY, а KM_1 на оси OX.

§ 23. Разсмотримъ теперь случай трехъ слагаемыхъ. Возьмемъ въ пространствѣ три оси OX, OY, OZ, образующія нѣкоторый трехгранный уголъ съ вершиною въ точкѣ O (черт. 23)*). Если въ пространствѣ заданъ отрѣзокъ MM_1, то всегда можно однимъ способомъ указать три отрѣзка, имѣющіе направленія заданныхъ осей и дающіе въ геометрической суммѣ данный отрѣзокъ MM_1. Проводимъ черезъ оба конца M и M_1 отрѣзка MM_1 плоскости, параллельныя плоскостямъ трехграннаго угла, образованнаго осями. Эти шесть плоскостей образуютъ параллелепипедъ, діагональ котораго есть отрѣзокъ MM_1; ребра этого параллелепипеда параллельны осямъ OX, OY, OZ. Три ребра различнаго между собою направленія и будутъ три слагаемыя, дающія въ суммѣ діагональ MM_1 и параллельныя осямъ. Эти слагаемыя называютъ составляющими отрѣзка MM_1 на трехъ осяхъ OX, OY, OZ.



Черт. 23.

§ 24. Не трудно видѣть, что если осей въ пространствѣ будетъ больше трехъ, то задача нахожденія составляющихъ отрѣзка на этихъ осяхъ будетъ неопредѣленною.

Предположимъ, что заданы въ пространствѣ четыре оси OX, OY, OZ и OU (черт. 24); требуется найти четыре составляющія x. y, z, u отрѣзка MM_1, параллельныя заданнымъ осямъ. Возьмемъ въ

---

*) Тѣмъ, что сказано, что оси образуютъ трехгранный уголъ, исключается предположеніе, что всѣ оси лежатъ въ одной плоскости.

плоскости двухъ осей OX и OY произвольную ось OV; мы знаемъ, что если поставимъ себѣ задачею найти три составляющія z, u, v отрѣзка MM_1 параллельныя осямъ OZ, OU, OV, то задача будетъ имѣть одно опредѣленное рѣшеніе (если только не будемъ предполагать OV лежащей въ плоскости двухъ другихъ осей OZ и OU). Итакъ, пусть ломанная линія $MKLM_1$ представляетъ изъ себя три составляющихъ:

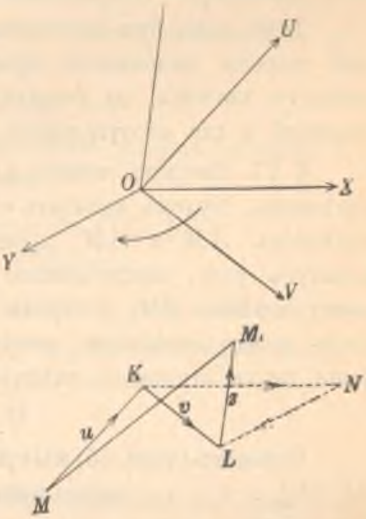
$$MK = u;\ KL = v;\ LM_1 = z,$$

параллельныхъ осямъ OU, OV, OZ. Такъ какъ ось OV лежитъ въ плоскости двухъ осей OX и OY, то отрѣзокъ $KL = v$, параллельный оси OV, параллеленъ плоскости XOY, а значитъ можно найти двѣ составляющія этого отрѣзка на осяхъ OX и OY; проводя прямыя KN и LN параллельно осямъ OX и OY, получаемъ окончательно четыре составляющія:

$$MK = u,\ KN = x,$$

$$NL = y,\ LM_1 = z,$$

параллельныя заданнымъ четыремъ осямъ.



Черт. 24.

Задача неопредѣленна, потому что выборъ вспомогательной оси OV совершенно произволенъ и, слѣдовательно, поворачивая ее въ плоскости XOY около точки O, будемъ получать безчисленное множество ломанныхъ линій

$$MKNLM_1.$$

§ 25. Въ пространствѣ четырехъ измѣреній задача дѣлается опредѣленной при четырехъ осяхъ, при большемъ же числѣ осей она дѣлается также неопредѣленною.

§ 26. Укажемъ теперь на весьма важное обобщеніе изложенныхъ соображеній. Покажемъ, что теорема:

Проекція замыкающей стороны на любую ось равна суммѣ проекцій замыкаемыхъ, сохраняется при косоугольномъ проектированіи, т. е., когда плоскости, проектирующія вершины многоугольника на ось проекцій, и не перпендикулярны къ этой оси.

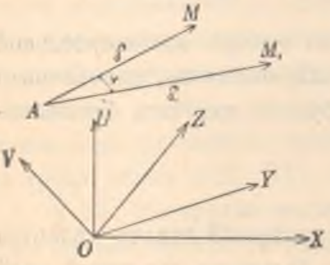
Понятіе о косоугольномъ проектированіи можно установить такъ. Пусть задана ось проекцій L и нѣкоторая плоскость Q, образующая съ осью L уголъ, отличный отъ O или 90^0. Тогда, если мы будемъ проектировать концы отрѣзковъ плоскостями, параллельными плоскости Q, то на оси проекцій будемъ получать такъ называемыя *косоугольныя проекціи отрѣзка*.

Такъ какъ при доказательствѣ теоремы о проекціи замыкающей стороны направленіе проектирующихъ плоскостей не имѣло никакого значенія, то очевидно, что эта теорема останется справедливой и для косоугольнаго проектированія.

§ 27. Введемъ понятіе о *геометрическомъ произведеніи* двухъ отрѣзковъ. Будемъ называть *геометрическимъ произведеніемъ* двухъ отрѣзковъ AM и AM_1 произведеніе длинъ этихъ отрѣзковъ на косинусъ угла, заключеннаго между ними. Обозначая черезъ δ длину отрѣзка AM, а черезъ δ_1 длину отрѣзка AM_1, и черезъ ν уголъ между отрѣзками, получимъ для геометрическаго произведенія двухъ отрѣзковъ слѣдующее выраженіе:

$$\delta\delta_1 \cos \nu.$$

Возьмемъ (черт. 25) въ пространствѣ нѣсколько осей OX, OY, OZ, OU, ... , выходящихъ изъ одной и той же точки O. Мы будемъ предполагать число осей не меньше трехъ. На основаніи изложеннаго выше мы замѣчаемъ, что оба отрѣзка δ и δ_1 будутъ имѣть нѣкоторыя составляющія на осяхъ. Въ случаѣ трехъ осей составляющія будутъ представлять вполнѣ опредѣленные отрѣзки, въ случаѣ же числа осей, большаго трехъ, задача остается возможной, хотя и дѣлается неопредѣленной.



Черт. 25.

Итакъ, пусть числа

$$(1) \qquad x, y, z, u, \ldots\ldots$$

суть составляющія отрѣзка δ на заданныхъ осяхъ, а числа

$$(2) \qquad x_1, y_1, z_1, u_1, \ldots\ldots$$

составляющія второго отрѣзка δ_1 на осяхъ.

Кромѣ составляющихъ введемъ въ разсмотрѣніе прямоугольныя проекціи заданныхъ отрѣзковъ δ и δ_1 на заданныхъ осяхъ. Пусть эти проекціи для перваго отрѣзка будутъ

$$\xi, \eta, \zeta, \upsilon, \ldots \ldots,$$

а для другого отрѣзка

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \upsilon_1, \ldots \ldots$$

Разсмотримъ отрѣзокъ δ, какъ замыкающую сторону ломаной линіи, образованной составляющими (1). Тогда проектируя на любую ось въ пространствѣ, будемъ имѣть

$$\text{пр. } \delta = \text{пр. } x + \text{пр. } y + \text{пр. } z + \text{пр. } u + \ldots \ldots$$

Возьмемъ за ось проекцій направленіе второго отрѣзка δ_1, тогда, примѣняя теорему § 20, получимъ

$$\delta \cos \nu = x \cos (OX, \delta_1) + y \cos (OY, \delta_1) + \\ + z \cos (OZ, \delta_1) + u \cos (OU, \delta_1) + \ldots \ldots$$

Умножая обѣ части послѣдняго равенства на δ_1 и замѣчая, что

$$\delta_1 \cos (OX, \delta_1) = \xi_1,\ \delta_1 \cos (OY, \delta_1) = \eta_1,\ \delta_1,\ \cos (OZ, \delta_1) = \zeta_1, \\ \delta_1 \cos (OU, \delta_1) = \upsilon_1, \ldots \ldots,$$

получимъ

$$\delta\delta_1 \cos \nu = x\ \xi_1 + y\ \eta_1 + z\ \zeta_1 + u\ \upsilon_1 + \ldots \ldots$$

Очевидно, что, помѣнявъ ролями отрѣзки, мы получимъ еще такую формулу

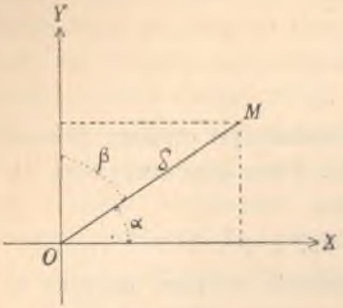
$$\delta\delta_1 \cos \nu = x_1\ \xi + y_1\ \eta + z_1\ \zeta + u_1\ \upsilon + \ldots \ldots$$

и получается теорема:

Теорема. *Геометрическое произведеніе двухъ отрѣзковъ равняется суммѣ произведеній, составляющихъ одного отрѣзка на заданныхъ осяхъ на соотвѣтствующія прямоугольныя проекціи другого отрѣзка на тѣхъ же осяхъ.*

Уголъ между двумя отрѣзками.

§ 28. Весьма важно бываетъ для рѣшенія задачъ разсмотрѣть пріемы вычисленія угловъ между отрѣзками. Вычисленія эти основываются на очень небольшомъ числѣ простыхъ принциповъ· Будемъ всякій отрѣзокъ задавать углами, которыя онъ составляетъ съ осями координатъ. Въ одномѣрной геометріи нѣтъ необходимости въ разсмотрѣніи угловъ. Разсмотрѣніе угловъ можетъ начаться только съ двухмѣрной геометріи.



Черт. 26.

Начнемъ съ плоскости. Мы можемъ предполагать, не нарушая общности задачи, что отрѣзокъ имѣетъ начало въ началѣ координатъ O. Обозначимъ (черт. 26) черезъ α и β углы, которые онъ образуетъ съ осями координатъ. Тогда, если мы назовемъ черезъ δ длину отрѣзка, а черезъ x, y координаты его конца M, то эти координаты будутъ, очевидно, проекціями этого отрѣзка, такъ что будетъ

$$(1) \qquad x = \delta \cos \alpha, \; y = \delta \cos \beta.$$

По формулѣ для разстоянія точки M отъ начала, выведенной въ § 8, мы получаемъ

$$\delta = +\sqrt{(x-o)^2 + (y-o)^2}$$

или иначе

$$(2) \qquad \delta^2 = x^2 + y^2.$$

Подставляя въ равенство (2) выраженія (1), получимъ по сокращеніи на δ^2

$$(3) \qquad 1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta.$$

Это равенство (3) даетъ соотношеніе между косинусами угловъ, которые образуетъ съ осями координатъ нашъ отрѣзокъ. Это соотношеніе не представляетъ, конечно, ничего новаго, ибо уголъ β дополняетъ уголъ α до 90^0, значитъ

$$\cos \beta = \sin \alpha,$$

и получается основная теорема тригонометріи, дающая связь синуса съ косинусомъ.

§ 29. Продѣлаемъ тѣ же разсужденія въ пространствѣ. Пусть α, β, γ будутъ углы, образованные съ осями координатъ нѣкоторымъ отрѣзкомъ OM, имѣющимъ начало въ началѣ координатъ O. Обозначимъ черезъ δ длину отрѣзка, а черезъ x, y, z координаты конца его M. Тогда будемъ имѣть

$$x = \delta \cos \alpha, \; y = \delta \cos \beta, \; z = \delta \cos \gamma.$$

Кромѣ того

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Отсюда получается слѣдующее весьма важное соотношеніе:

(1) $$1 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma$$

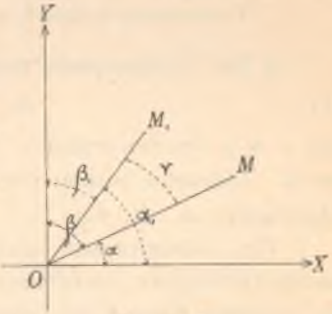
между тремя косинусами угловъ отрѣзка съ осями.

§ 30. Можно догадываться, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ должно существовать соотношеніе аналогичное

$$1 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + cos^2\zeta.$$

§ 31. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію угла между двумя отрѣзками на плоскости. Для простоты предположимъ, что начало отрѣзковъ совпадаетъ съ началомъ координатъ. Пусть ν будетъ уголъ между отрѣзками OM и OM_1 (черт. 27). Пусть α и β суть углы съ осями координатъ, образуемые отрѣзкомъ OM, и пусть α_1 и β_1 соотвѣтствующіе углы отрѣзка OM_1. Тогда мы имѣемъ, очевидно,

$$cos\,\nu = cos\,(\alpha_1 - \alpha) = cos\,\alpha\,cos\,\alpha_1 + \\ + sin\,\alpha\ sin\,\alpha_1.$$



Черт. 27.

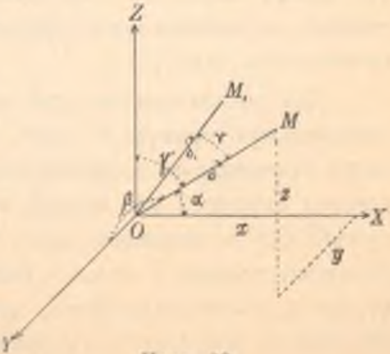
Но такъ какъ углы β и β_1 дополняютъ до прямого углы α и α_1, то можно будетъ написать

$$sin\,\alpha = cos\,\beta \text{ и } sin\,\alpha_1 = cos\,\beta_1,$$

и мы получаемъ формулу

(1) $$cos\,\nu = cos\,\alpha\,cos\,\alpha_1 + cos\,\beta\,cos\,\beta_1.$$

§ 32. Формула (1) предыдущаго §-а обобщается на случай трехмѣрнаго пространства. Пусть ν будетъ уголъ между двумя отрѣзками (черт. 28) OM и OM_1. Пусть α, β, γ будутъ углы съ осями координатъ отрѣзка OM, а α_1, β_1, γ_1 соотвѣтствующіе углы для другого отрѣзка. Пусть x, y, z будутъ координаты конца отрѣзка OM, длину котораго обозначимъ черезъ δ. Проектируя ломанную линію, образованную отрѣзкомъ OM и тремя координатами конца M на направленіе другого отрѣзка OM_1, получимъ по теоремѣ § 19



Черт. 28.

$$\delta \cos \nu = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1.$$

Но

$$x = \delta \cos \alpha,\ y = \delta \cos \beta,\ z = \delta \cos \gamma.$$

Получаемъ окончательно

(1) $$\cos \nu = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1.$$

§ 33. Не трудно догадаться, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ должна существовать формула

$$\cos \nu = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 + \cos \zeta \cos \zeta_1.$$

Уравненіе первой степени между координатами.

§ 34. Разсмотримъ неопредѣленное уравненіе первой степени

(1) $$Ax + By + C = 0,$$

гдѣ x и y будемъ считать декартовыми координатами нѣкоторой точки. Уравненіе можно считать заданнымъ, если заданы три коэффиціента A, B, C.

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что уравненіе будетъ неопредѣленнымъ, если число неизвѣстныхъ будетъ больше одного. Въ данномъ случаѣ это уравненіе дѣйствительно неопредѣленное, такъ какъ одну изъ координатъ x можно задать произвольно, а другую координату y выражать черезъ заданное значеніе x. Существуетъ безчисленное множество паръ рѣшеній этого уравненія

$$x_0, y_0;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Интересно, что точки, соотвѣтстующія этимъ парамъ рѣшеній, лежатъ на одной и той же прямой, такъ что получается слѣдующая весьма важная основная теорема, состоящая въ томъ, что *прямой линіи на плоскости сопостовляется аналитическое понятіе неопредѣленнаго уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными вида* (1).

Для доказательства этой теоремы поступимъ такъ. Возьмемъ произвольную прямую L (черт. 29) на плоскости; тогда ея положеніе относительно координатныхъ осей можно задать такимъ образомъ: опустимъ изъ начала координатъ на прямую L перпендикуляръ ON и назовемъ длину перпендикуляра черезъ p. Тогда положеніе прямой L можетъ быть задано длиною p этого перпендикуляра и его направленіемъ, которое мы будемъ считать идущимъ отъ начала координатъ къ прямой. Обозначимъ черезъ α и β углы, образованные этимъ направленіемъ съ осями координатъ. Возьмемъ на прямой какую нибудь точку M, не указывая, которую именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y. Тогда перпендикуляръ ON будетъ замыкающей стороной ломанной линіи $OPMN$, образованной координатами x, y и отрѣзкомъ MN. Проектируя на направленіе самого перпендикуляра, мы получимъ

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + \\ + MN \cos (MN, p) = 0,$$

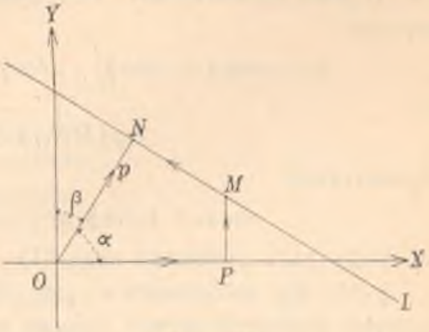
но

$$\cos (MN, p) = 0,$$

слѣдовательно, получимъ уравненіе

$$\cos \alpha . x + \cos \beta . y - p = 0,$$

т. е. какъ разъ уравненіе вида (1).



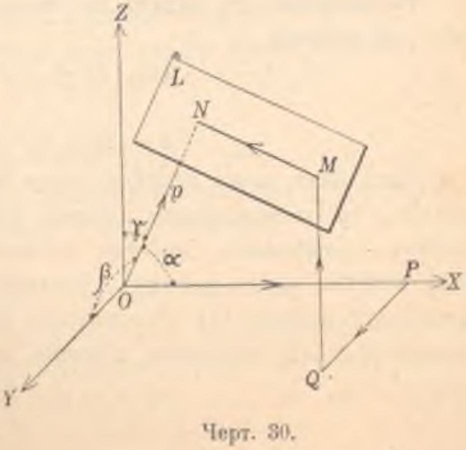
Черт. 29.

§ 35. Покажемъ теперь, что аналогичныя соображенія существуютъ въ трехмѣрномъ пространствѣ, а именно, что неопредѣленное уравненіе первой степени вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

гдѣ x, y, z декартовы координаты, опредѣляетъ въ пространствѣ нѣкоторую плоскость.

Въ самомъ дѣлѣ, положеніе относительно всякой координатной системы плоскости L (черт. 30) въ пространствѣ можно указать такъ. Опустимъ изъ начала O координатъ перпендикуляръ ON на плоскость; обозначимъ длину этого перпендикуляра черезъ p и возьмемъ на немъ направленіе, идущее отъ начала координатъ къ плоскости. Пусть α, β, γ углы этого направленія съ осями координатъ. Возьмемъ на плоскости какую нибудь точку M, не указывая, которую



Черт. 30.

именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y, z. Тогда перпендикуляръ ON будетъ замыкающей стороной ломанной линіи $OPQMN$, образованной тремя координатами x, y, z и отрѣзкомъ MN. Будемъ проектировать на направленіе перпендикуляра. Тогда получимъ

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + MN\cos(MN,p),$$

но

$$\cos(MN,p) = 0,$$

слѣдовательно

$$\cos\alpha . x + \cos\beta . y + \cos\gamma . z - p = 0,$$

т. е. какъ разъ уравненіе вида (1).

§ 36. Мы догадываемся уже, что въ четырехмѣрномъ пространствѣ уравненіе первой степени между четырьмя координатами

$$Ax + By + Cz + Du + E = 0$$

будетъ опредѣлять нѣкоторое плоское трехмѣрное пространство. Такія же соображенія будутъ относиться къ пространствамъ съ произвольнымъ числомъ измѣреній.

§ 37. Такъ какъ уравненіе первой степени на плоскости опредѣляетъ прямую линію, то *линейными* называютъ всѣ уравненія первой степени относительно неизвѣстныхъ, причемъ число этихъ неизвѣстныхъ можетъ быть произвольнымъ.

§ 38. Перейдемъ теперь къ рѣшенію нѣкоторыхъ основныхъ задачъ относительно прямыхъ линій на плоскости.

Задача. *Найти точку встрѣчи двухъ прямыхъ.*

Разсмотримъ эту задачу на численномъ примѣрѣ. Пусть заданы двѣ прямыя

$$2x - 3y + 7 = 0$$

(1)

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Такъ какъ точка встрѣчи этихъ прямыхъ лежитъ на обѣихъ прямыхъ, то ея координаты должны удовлетворять обоимъ написаннымъ уравненіямъ, другими словами для того, чтобы найти точку встрѣчи двухъ прямыхъ, указанныхъ уравненіями (1), надо рѣшить эту систему (1) относительно двухъ неизвѣстныхъ x и y. Въ самомъ дѣлѣ, произведя рѣшеніе, получаемъ

$$x = 1\ ;\ y = 3.$$

§ 39. Оси координатъ, какъ прямыя линіи, должны имѣть свои собственныя уравненія. Эти уравненія, конечно, являются самыми простыми.

Для оси x-овъ получаемъ

$$y=0,$$

а для оси y-овъ

$$x=0.$$

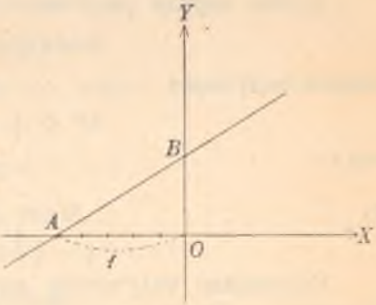
§ 40. Для того, чтобы построить прямую, заданную какимъ нибудь уравненіемъ, напримѣръ

$$3x-5y+3=0,$$

достаточно найти ея точки встрѣчи съ осями координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы найти ея точку встрѣчи съ осью x-овъ, надо будетъ рѣшить два уравненія

$$3x-5y+3=0,$$
$$y=0;$$

получаемъ точку A (черт. 31)



Черт. 31.

$$x=-1,\ y=0$$

Для нахожденія точки встрѣчи съ осью y-овъ рѣшаемъ систему

$$3x-5y+3=0,$$
$$x=0;$$

получаемъ точку B

$$x=0,\ y=\frac{3}{5}\cdot$$

Точки A и B опредѣляютъ искомую прямую.

§ 41. Задача. *Найти уголъ между двумя прямыми*

$$\begin{gathered} Ax+By+C=0,\\ A_1x+B_1y+C_1=0. \end{gathered}\tag{1}$$

Если намъ удастся переписать уравненія (1) въ такомъ видѣ:

$$\begin{gathered} x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0,\\ x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1-p_1=0, \end{gathered}\tag{2}$$

тогда уголъ γ между двумя прямыми опредѣляется очень просто. Онъ равенъ углу между перпендикулярами къ этимъ прямымъ, а слѣдовательно, на основаніи формулы (1) § 32, мы получимъ

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1.\tag{3}$$

Пусть R будетъ тотъ множитель, послѣ умноженія на который уравненіе

$$Ax + By + C = 0$$

обращается въ

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0.$$

Тогда мы имѣемъ, очевидно,

$$(4) \qquad RA = \cos\alpha; \; RB = \cos\beta; \; RC = -p.$$

Но мы видѣли уже, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

значитъ получаемъ

$$R^2 A^2 + R^2 B^2 = 1,$$

откуда

$$(5) \qquad R = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставляя полученное выраженіе для R въ формулу (4), получимъ

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \; \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \; p = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Очевидно, что аналогичныя формулы получатся для другой изъ заданныхъ прямыхъ, т. е. мы получимъ

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}; \; \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}; \; p_1 = \frac{-C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Отсюда по формулѣ (3) получимъ выраженіе для косинуса угла между прямыми

$$(6) \qquad \cos\nu = \frac{AA_1 + BB_1}{\sqrt{A^2 + B^2}\,\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Вычисляя по косинусу синусъ, получимъ

$$(7) \qquad \sin\nu = \frac{AB_1 - BA_1}{\sqrt{A^2 + B_1}\,\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Если прямыя параллельны, то должно быть

$$\sin\nu = 0,$$

т. е. получаемъ

$$AB_1 - BA_1 = 0$$

или

(8) $$\frac{A_1}{A}=\frac{B_1}{B},$$

т. е. получается пропорціональность угловыхъ коэффиціентовъ. Коэффиціенты A и B при неизвѣстныхъ носятъ названія *угловыхъ*, потому что $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ выражаются только черезъ эти коэффиціенты.

Прямыя будутъ перпендикулярны, когда

$$\cos\nu=0,$$

и получается условіе перпендикулярности въ такомъ видѣ

(9) $$AA_1+BB_1=0.$$

§ 42. Мы будемъ называть во всемъ дальнѣйшемъ видъ уравненія

(1) $$Ax+By+C=0$$

общимъ видомъ уравненія прямой, видъ

(2) $$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$$

нормальнымъ видомъ уравненія прямой.

Если мы рѣшимъ общее уравненіе прямой относительно одной изъ координатъ, напримѣръ y, то получимъ

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Это рѣшеніе можно получить только въ томъ случаѣ, если коэффиціентъ B не равенъ нулю. Обозначая

$$-\frac{A}{B}=m\,,-\frac{C}{B}=n,$$

получимъ уравненіе прямой въ такомъ видѣ

(3) $$y=mx+n.$$

Не трудно найти геометрическое значеніе коэффиціентовъ m и n. Если мы положимъ

$$x=0,$$

то получимъ

$$y=n,$$

значитъ n есть ордината той точки, въ которой прямая пересѣкаетъ ось y-овъ. Что касается коэффиціента m, то по формулѣ предыдущаго §-а можно написать

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Но очевидно, что, если α есть уголъ съ осью x-овъ перпендикуляра, опущеннаго на заданную прямую (3), то $\frac{\pi}{2}+\alpha$ будетъ уголъ съ осью x-овъ самой прямой, и мы получаемъ, что угловой коэффиціентъ m есть не что иное, какъ тангенсъ угла, образованнаго съ осью x-овъ прямою (3).

Пусть разсматриваются двѣ прямыя

$$y = mx + n,$$

(4)

$$y = m_1 x + n_1;$$

напишемъ условія ихъ параллельности и перпендикулярности.

Въ этомъ случаѣ можно употребить формулы (8) и (9) предыдущаго §-а, причемъ положить

$$A = m,\ B = -1;$$
$$A_1 = m_1,\ B_1 = -1;$$

мы получаемъ для условія параллельности равенство

$$m = m_1$$

угловыхъ коэффиціентовъ. Условіе же перпендикулярности напишется такъ

$$1 + mm_1 = 0.$$

§ 43. Задача. *Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку* (x_0, y_0).

Очевидно, что уравненіе такой прямой можно написать въ такомъ видѣ

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{1}$$

гдѣ угловой коэффиціентъ m совершенно произволенъ. Въ самомъ дѣлѣ, необходимо убѣдиться, что уравненіе (1) опредѣляетъ во первыхъ прямую, а во вторыхъ какъ разъ такую прямую, которая проходитъ черезъ заданную точку. Что уравненіе (1) опредѣляетъ прямую, явствуетъ изъ того соображенія, что x и y, перемѣнныя координаты, входятъ въ это уравненіе въ первой степени. То обстоятельство же, что прямая (1) проходитъ черезъ заданную точку, слѣдуетъ изъ того, что если мы подставимъ вмѣсто перемѣнныхъ x и y координаты заданной точки, то получимъ тождество

$$y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0).$$

Если мы будемъ мѣнять угловой коэффиціентъ m въ уравненіи (1), то прямая (1) будетъ вращаться около заданной точки. Получится такъ называемый *пучекъ прямыхъ линій* съ вершиной въ заданной точкѣ. Подберемъ коэффиціентъ m такимъ образомъ, чтобы прямая (1) проходила также черезъ другую точку плоскости (x_1, y_1). Предположимъ, что задача рѣшена, и что мы подобрали коэффиціентъ m дѣйствительно такъ, какъ нужно. Провѣримъ справедливость рѣшенія, т. е. подставимъ координаты x_1, y_1 второй точки въ уравненіе (1).

Получимъ

$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0).$$

Если коэффиціентъ m подобранъ правильно, то это уравненіе должно быть тождествомъ и, значитъ, должно быть

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Подставляя въ уравненіе (1) полученное выраженіе для m, придемъ къ уравненію

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{2}$$

прямой, проходящей черезъ двѣ заданныя точки.

Такъ напримѣръ, если прямая должна проходить черезъ двѣ точки (2, 3) и (—1, 4), то получаемъ

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - 3}{4 - 3},$$

откуда окончательно

$$x + 3y - 11 = 0.$$

§ 44. Продѣлаемъ аналогичныя задачи въ трехмѣрномъ пространствѣ относительно плоскостей и прямыхъ.

Такъ какъ въ пространствѣ двѣ плоскости пересѣкаются по прямой, то, слѣдовательно, прямую аналитически придется задавать системой двухъ уравненій первой степени, т. е. прямая въ пространствѣ указывается двумя уравненіями

$$\begin{aligned} &Ax + By + Cz + D = 0, \\ &A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Всякую систему двухъ уравненій можно видоизмѣнять самыми разнообразными способами, не нарушая содержанія этой системы, т. е. видоизмѣняя ее такъ, что новая система будетъ равносильна съ первоначальной. Такъ напримѣръ, систему (1), опредѣляющую нѣкоторую прямую линію, можно рѣшить относительно двухъ изъ числа координатъ, напримѣръ, относительно координатъ x и y. Тогда прямую можно задать двумя уравненіями

$$\begin{aligned} x &= pz + a, \\ y &= qz + b. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравненія прямой, написанныя въ послѣднемъ видѣ, можно въ нѣкоторомъ отношеніи считать простѣйшими, ибо въ нихъ получается наименьшее число коэффиціентовъ, въ данномъ случаѣ четыре. Эти коэффиціенты суть

$$p, q, a, b.$$

Покажемъ еще одинъ важный видъ уравненій прямой линіи. Оказывается, что прямую линію можно будетъ опредѣлять тремя уравненіями, если ввести кромѣ трехъ координатъ x, y, z еще нѣкоторую четвертую перемѣнную величину. Разсмотримъ прямую, проходящую черезъ постоянную точку M_0 (x_0, y_0, z_0). Возьмемъ на прямой перемѣнную точку M, находящуюся на перемѣнномъ разстояніи u отъ постоянной точки M_0. Тогда, если мы обозначимъ черезъ x, y, z координаты перемѣнной точки M, то разности

$$x - x_0, y - y_0, z - z_0$$

будутъ проекціями длины u на осяхъ координатъ. Обозначая черезъ α, β, γ углы, которые образуетъ прямая съ осями координатъ, получимъ три уравненія прямой:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= u \cos \alpha, \\ y - y_0 &= u \cos \beta, \\ z - z_0 &= u \cos \gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Если мы исключимъ добавочную перемѣнную u, то получимъ по прежнему два уравненія прямой. Эти два уравненія можно будетъ написать въ видѣ пропорціи

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}. \tag{4}$$

Очевидно, что въ этой пропорціи послѣдующіе члены $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ могутъ быть замѣнены числами, имъ пропорціональными, l, m, n, т. е. можно будетъ написать

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{5}$$

гдѣ

$$\frac{l}{\cos\alpha}=\frac{m}{\cos\beta}=\frac{n}{\cos\gamma}. \tag{6}$$

Коэффиціенты l, m, n носятъ названіе *угловыхъ коэффиціентовъ*; они пропорціональны косинусамъ угловъ. Не трудно убѣдиться, что пропорція (6) даетъ возможность выразить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ черезъ угловые коэффиціенты. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ

$$\frac{\cos\alpha}{l}=\frac{\cos\beta}{m}=\frac{\cos\gamma}{n}=$$

$$=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Отсюда

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Получается такое общее правило. Если косинусы угловъ съ осями координатъ какого нибудь направленія въ пространствѣ пропорціональны тремъ числамъ l, m, n, то, чтобы перейти отъ этихъ чиселъ къ самимъ косинусамъ, надо раздѣлить эти числа на корень квадратный изъ суммы ихъ квадратовъ.

§ 45. Задача. *Найти уравненія прямой въ пространствѣ, проходящей черезъ двѣ заданныя точки* (x_0, y_0, z_0) *и* (x_1, y_1, z_1).

Пишемъ сначала общія уравненія прямой, проходящей черезъ первую точку. Это не что иное, какъ уравненія (5) предыдущаго §—а, т. е.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{1}$$

Подберемъ теперь угловые коэффиціенты l, m, n такимъ образомъ, чтобы прямая проходила также черезъ вторую точку.

Подставляя координаты второй точки въ послѣднія уравненія, получаемъ

$$(2) \qquad \frac{x_1 - x}{l} = \frac{y_1 - y_0}{n} = \frac{z_1 - z_0}{n}.$$

Сопоставляя пропорціи (1) и (2), получаемъ окончательныя уравненія искомой прямой

$$(3) \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Такъ напримѣръ, требуется провести прямую черезъ точки (0, 0, 0) и (1, 2, 3). Получимъ уравненія

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{z - 0}{3 - 0},$$

которыя можно окончательно переписать въ такомъ видѣ

$$y - 2x = 0,$$
$$z - 3x = 0.$$

§ **46.** Обращаемся теперь къ задачамъ на плоскость.

Уравненіе

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

мы будемъ называть *общимъ* уравненіемъ плоскости, а уравненіе

$$(2) \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

гдѣ α, β, γ углы съ осями перпендикуляра, опущеннаго на эту плоскость, будемъ называть *нормальнымъ* уравненіемъ плоскости. Чтобы перейти отъ общаго уравненія (1) къ нормальному, нужно будетъ опредѣлить множитель R, отъ умноженія на который уравненіе (1) принимаетъ нормальный видъ. Получаемъ

$$RA = \cos\alpha;\ RB = \cos\beta;\ RC = \cos\gamma;\ RD = -p.$$

Такъ какъ мы имѣемъ соотношеніе

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

то получимъ

$$R^2 A^2 + R^2 B^2 + R^2 C^2 = 1,$$

откуда

$$R = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

§ 47. Задача. *Найти уголъ между двумя плоскостями*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A_1x + B_1x + C_1x + D_1 = 0.$$

Обозначая черезъ α, β, γ углы съ осями координатъ перпендикуляра къ первой плоскости, а черезъ α_1, β_1, γ_1 углы перпендикуляра ко второй плоскости, получаемъ

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Такъ какъ уголъ ν между плоскостями есть въ то же время уголъ между ихъ перпендикулярами, то по формулѣ

$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

мы получаемъ

$$\cos\nu = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}. \tag{1}$$

Отсюда получается условіе перпендикулярности двухъ плоскостей

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \tag{2}$$

Чтобы найти условіе параллельности двухъ плоскостей, обратимъ вниманіе на тождество Lagrange'а, которое полезно помнить:

$$(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2) - (AA_1+BB_1+CC_1)^2 =$$
$$= (BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2 + (AB_1 - BA_1)^2.$$

Тогда изъ формулы (1) получимъ

$$\sin^2\nu = \frac{(BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2 + (AB_1 - BA_1)^2}{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)};$$

при параллельности плоскостей получимъ

$$\sin \nu = 0,$$

значитъ будетъ

$$(BC_1 - CB_1)^2 + (CA_1 - AC_1)^2 + (AB_1 - BA_1)^2 = 0.$$

Такъ какъ всѣ коэффиціенты предполагаются вещественными, то квадраты не могутъ быть числами отрицательными, а значитъ для того, чтобы сумма этихъ квадратовъ равнялась нулю, необходимо, чтобы всѣ квадраты отдѣльно равнялись нулю. Мы получаемъ, слѣдовательно,

$$BC_1 - CB_1 = 0,$$
$$CA_1 - AC_1 = 0,$$
$$AB_1 - BA_1 = 0,$$

т. е. пропорцію

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}. \tag{3}$$

Итакъ, условіемъ параллельности двухъ плоскостей является пропорціональность угловыхъ коэффиціентовъ.

§ 48. Если заданы двѣ прямыя

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

то на основаніи соображеній, аналогичныхъ соображеніямъ предыдущаго §-а, мы замѣтимъ, что условіемъ параллельности этихъ прямыхъ будетъ пропорціональность ихъ угловыхъ коэффиціентовъ

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n},$$

условіемъ же перпендикулярности будетъ

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

§ 49. Если бы мы хотѣли найти условія параллельности и перпендикулярности между плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

съ одной стороны и прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

съ другой, то очевидно, что условіе перпендикулярности прямой и плоскости будетъ въ то же время условіемъ параллельности между прямой и перпендикуляромъ, опущеннымъ на плоскость изъ начала координатъ, такъ что происходитъ явленіе обратное: пропорціональность угловыхъ коэффиціентовъ

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$$

дастъ перпендикулярность прямой и плоскости, а условіемъ параллельности будетъ

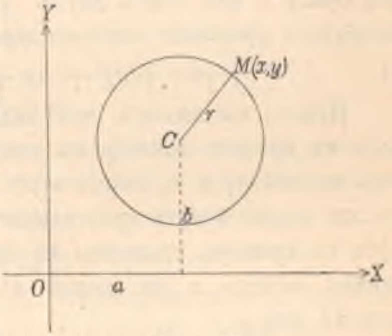
$$Al+Bm+Cn=0.$$

О кругѣ и шарѣ.

§ 50. Переходя къ разсмотрѣнію кривыхъ линій и поверхностей, мы должны обратить вниманіе на простѣйшіе случаи; начнемъ съ круга и шара, какъ геометрическихъ объектовъ, хорошо извѣстныхъ изъ элементарной геометріи.

Пусть на плоскости разсматривается кругъ, имѣющій центръ въ точкѣ $C\ (a, b)$ и радіусъ r. Тогда, если мы на окружности круга возьмемъ какую нибудь точку M, не указывая, которую именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y, то свойство точки M окружности находиться на разстояніи, равномъ радіусу, отъ центра, можно будетъ записать равенствомъ

$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$



Черт. 32.

Это уравненіе послѣ освобожденія отъ радикала приметъ видъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

Итакъ, мы видимъ, что кругъ представляется уравненіемъ уже второй степени между координатами x и y. Это уравненіе по раскрытіи скобокъ приметъ видъ

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \tag{2}$$

гдѣ

$$A=-2a,\ B=-2b,\ C=a^2+b^2-r^2.$$

§ 51. Какъ обобщеніе только что сказаннаго о кругѣ, является такое общее положеніе, что всякое уравненіе между двумя координатами x и y опредѣляетъ, вообще говоря, нѣкоторую кривую линію на плоскости. Простѣйшей линіей является прямая, опредѣляемая уравненіемъ первой степени

$$Ax + By + C = 0.$$

Какъ видно изъ предыдущаго §-а, кругъ опредѣляется уравненіемъ болѣе сложнымъ, въ которое входятъ уже вторыя степени координатъ. Поэтому кругъ называютъ *линіей второго порядка.* Вообще подъ порядкомъ n линіи разумѣется наивысшая степень координатъ, входящая въ уравненіе.

§ 52. Задача. *Найти точку пересѣченія заданнаго круга*

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

и прямой

$$y = mx + n. \tag{2}$$

Очевидно, что для нахожденія координатъ точекъ встрѣчи прямой съ кругомъ придется рѣшить относительно координатъ x и y, какъ неизвѣстныхъ, два уравненія, одно (1) второй степени, другое (2) первой степени. Для рѣшенія проще всего исключить букву y изъ этихъ двухъ уравненій; получаемъ слѣдующее квадратное уравненіе относительно x

$$x^2 + (mx + n)^2 + Ax + B(mx + n) + C = 0. \tag{3}$$

Итакъ, мы видимъ, что задача нахожденія точекъ встрѣчи круга съ прямою привела къ квадратному уравненію (3). Обозначимъ черезъ x_1 и x_2 корни этого уравненія (3). Мы замѣчаемъ, что эти корни будутъ представлять собою абсциссы точекъ встрѣчи круга съ прямою, ординаты же этихъ точекъ мы получимъ, подставляя вмѣсто x эти корни въ уравненіе (2). Получаемъ два значенія для y

$$y_1 = mx_1 + n,$$
$$y_2 = mx_2 + n.$$

Итакъ получаются слѣдующія двѣ точки встрѣчи

$$(x_1, y_1) \text{ и } (x_2, y_2).$$

Если оба корня x_1, x_2 уравненія (3) вещественны, то прямая дѣйствительно пересѣкаетъ кругъ. Если эти корни мнимые, то не существуетъ дѣйствительныхъ точекъ встрѣчи прямой съ кругомъ, прямая круга не пересѣкаетъ. Наконецъ, въ промежуточномъ случаѣ, когда корни квадратнаго уравненія совпадаютъ

$$x_1 = x_2,$$

тогда прямая обращается въ касательную къ кругу и имѣетъ только одну общую точку съ нимъ.

§ 53. Задача. *Найти точку пересѣченія двухъ круговъ*

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \tag{1}$$

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0. \tag{2}$$

Очевидно, что мы получимъ координаты точекъ встрѣчи двухъ круговъ, если рѣшимъ относительно x и y, какъ неизвѣстныхъ, два уравненія (1) и (2). Прежде чѣмъ рѣшать, воспользуемся однимъ общимъ принципомъ, извѣстнымъ намъ изъ элементарнаго курса, а именно, что, если задана система двухъ уравненій

$$\begin{aligned} U&=0,\\ V&=0, \end{aligned} \tag{3}$$

то прежде чѣмъ эти два уравненія рѣшать относительно неизвѣстныхъ, мы имѣемъ право систему подвергнуть любому тождественному преобразованію, т. е. такому преобразованію, послѣ котораго система обращается въ новую, равносильную съ нею. Такъ напримѣръ, систему (3) можно будетъ замѣнить такою, ей равносильною

$$\begin{aligned} U&=0,\\ V-U&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Примѣняя это къ данному случаю, мы замѣчаемъ, что уравненіе (1) можно будетъ оставить, а уравненіе (2) замѣнить разностью этого уравненія и уравненія (1), т. е. уравненіемъ

$$(A_1-A)\,x+(B_1-B)\,y+C_1-C=0. \tag{5}$$

Итакъ, мы видимъ, что задача нахожденія точекъ встрѣчи двухъ круговъ привелась къ задачѣ нахожденія точекъ встрѣчи одного изъ этихъ круговъ съ прямой линіей, опредѣляемой уравненіемъ (5). Слѣдовательно, задача пересѣченія двухъ круговъ приводитъ также къ квадратному уравненію, причемъ круги пересѣкаются, если корни этого уравненія дѣйствительны, не пересѣкаются, если корни мнимые, и касаются другъ друга, если корни равные.

§ 54. Теперь мы можемъ разъяснить то обстоятельство, которое мы оставили безъ доказательства въ § 27 главы I.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ, какія задачи могутъ рѣшаться циркулемъ и линейкой. Предположимъ, что задача рѣшается циркулемъ и линейкой, такъ что на плоскости сдѣланъ чертежъ, состоящій изъ нѣкотораго числа круговъ и прямыхъ линій. Какъ бы сложенъ этотъ чертежъ ни былъ, на основаніи сказаннаго въ предыдущихъ §-ахъ мы заключаемъ, что координаты всѣхъ точекъ пересѣченія круговъ и прямыхъ выражаются квадратными уравненіями или уравненіями первой степени при пересѣченіи двухъ прямыхъ. Разстояніе всякихъ двухъ точекъ пересѣченія выражается корнемъ квадратнымъ черезъ координаты концовъ. Итакъ, мы замѣчаемъ, что построенія циркулемъ и линейкой оставляютъ всѣ отрѣзки между точками этого построенія въ области чиселъ, выражающихся черезъ заданные отрѣзки при помощи послѣдовательнаго рѣшенія уравненій первой и второй степени.

§ 55. Разсмотримъ теперь въ трехмѣрномъ пространствѣ шаръ, имѣющій центръ $C\ (a,\ b,\ c)$ и радіусъ r. Возьмемъ на поверхности шара какую нибудь точку M, не указывая, которую именно, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y, z. Тогда получаемъ уравненіе шара

$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

которое по освобожденіи отъ радикала даетъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \tag{1}$$

Если мы раскроемъ скобки, то получимъ уравненіе

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0, \tag{2}$$

гдѣ

$$A=-2a, B=-2b, C=-2c, D=a^2+b^2+c^2-r^2.$$

§ 56. Какъ обобщеніе только что сказаннаго о шарѣ, является такое общее положеніе, что всякое уравненіе между тремя координатами x, y, z опредѣляетъ, вообще говоря, нѣкоторую кривую поверхность въ трехмѣрномъ пространствѣ. Простѣйшей поверхностью является плоскость, опредѣляемая уравненіемъ

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Какъ видно изъ предыдущаго §-а, шаръ опредѣляется уравненіемъ болѣе сложнымъ, въ которое входятъ уже вторыя степени координатъ. Поэтому шаръ называютъ *поверхностью второго порядка*. Вообще подъ порядкомъ n поверхности разумѣется наивысшая степень координатъ, входящая въ уравненіе поверхности.

Итакъ, мы видимъ, что понятіемъ, аналогичнымъ плоской линіи, является въ пространствѣ поверхность, линіи же въ трехмѣрномъ пространствѣ опредѣляются уже, какъ пересѣченія поверхностей, такъ напримѣръ, прямая линія, какъ мы видѣли, опредѣляется, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей.

Линіи въ пространствѣ раздѣляются на двѣ большихъ категоріи, *плоскія* и *косыя*. Плоскія, это тѣ, которыя всѣми своими точками лежатъ въ нѣкоторой плоскости, косыя—тѣ, которыя не лежатъ въ одной плоскости.

§ 57. Кругъ въ пространствѣ опредѣляется, какъ пересѣченіе шара и плоскости, значитъ, онъ опредѣляется двумя уравненіями такого вида

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

и

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

§ 58. Задача. *Найти линію пересѣченія двухъ шаровъ*

(1) $$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0,$$

(2) $$x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Не трудно видѣть, что эта линія будетъ кругомъ, потому что она будетъ лежать въ плоскости

(3) $$(A_1-A)x+(B_1-B)y+(C_1-C)z+D_1-D=0.$$

§ 59. Какъ обобщеніе шара, получаемъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній такъ называемую *гиперсферу*, кривое трехмѣрное пространство, опредѣляемое уравненіемъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2=r^2.$$

Обобщеніе понятія о координатахъ.

§ 60. Понятіе о декартовыхъ координатахъ, данное нами въ §§ 3—6 и прилагавшееся въ дальнѣйшихъ §-ахъ, допускаетъ самыя разнообразныя и важныя обобщенія.

Первое обобщеніе состоитъ въ томъ, что оси координатъ можно не предполагать образующими прямые углы. Тогда разобранный нами случай можно назвать случаемъ *прямоугольныхъ* координатъ, а въ томъ случаѣ, когда оси координатъ образуютъ произвольно выбранный уголъ, не прямой, система координатъ называется *косоугольною*.

Въ случаѣ косоугольной системы координатъ прямоугольникъ $OPMQ$ (см. черт. 10) обращается въ параллелограммъ, такъ же точно прямоугольный параллелепипедъ (черт. 11) обращается въ случаѣ косоугольной системы координатъ въ косоугольный.

Это обобщеніе прямоугольной системы координатъ въ косоугольную является обобщеніемъ несущественнымъ; формулы аналитической геометріи отъ такой замѣны координатъ претерпѣваютъ лишь несущественныя измѣненія. Такъ какъ формулы для косоугольныхъ координатъ сложнѣе, то обыкновенно въ приложеніяхъ почти всегда употребляется система прямоугольная.

§ 61. Одно обобщеніе прямолинейныхъ координатъ составляютъ такъ называемыя *однородныя* координаты. Если мы декартовы координаты x и y замѣнимъ выраженіями

$$x = \frac{X}{Z},\ y = \frac{Y}{Z},$$

то три величины X, Y, Z носятъ названіе однородныхъ координатъ. Всякое уравненіе прямой линіи

$$Ax + By + C = 0$$

въ однородныхъ координатахъ перепишется такъ:

$$AX + BY + CZ = 0.$$

Такое введеніе однородныхъ координатъ приноситъ пользу въ томъ отношеніи, что мы вводимъ въ разсмотрѣніе такъ называемую *безконечно-далекую* прямую плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, получается уравненіе безконечно-далекой прямой

$$Z = 0,$$

ибо въ этомъ случаѣ

$$x = \infty \text{ и } y = \infty.$$

Итакъ, однородныя координаты даютъ возможность въ числѣ прямыхъ линій, опредѣляемыхъ уравненіями, заключать также безконечно-далекую прямую.

Приходится себѣ представлять безконечно-далекую прямую, какъ линію, огибающую плоскость со всѣхъ сторонъ на подобіе круга безконечно-большого радіуса. Со всякою прямою плоскости безконечно-далекая прямая пересѣкается въ одной только точкѣ. Приходится считать, что всѣ прямыя, параллельныя какой-нибудь опредѣленной, имѣютъ одну общую точку съ безконечно-далекой прямой.

Не трудно видѣть, что три уравненія

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$$

дають три прямыхъ линіи, изъ которыхъ первая будетъ осью y-овъ, вторая осью x-овъ, а третья безконечно-далекой прямой. Въ виду этого однородныя координаты можно разсматривать, какъ предѣльный случай такъ называемыхъ *трилинейныхъ* координатъ. Названіе трилинейныхъ носятъ такія координаты ξ, η, ζ, что равенства

$$\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0$$

имѣютъ мѣсто для трехъ сторонъ нѣкотораго треугольника, называемаго координатнымъ. Однородныя координаты представляютъ собою тотъ предѣльный случай, когда одна сторона треугольника уходитъ на безконечность.

§ 62. Дальнѣйшее болѣе широкое обобщеніе понятія о координатахъ состоитъ въ введеніи такъ называемыхъ *криволинейныхъ* координатъ. Разсмотримъ одинъ изъ простѣйшихъ случаевъ такихъ координатъ, такъ называемую систему *полярныхъ* координатъ. Эту систему мы видѣли при опредѣленіи чиселъ комплексныхъ при помощи модуля и аргумента. Модуль ρ и аргументъ ϑ можно считать за такъ называемыя полярныя координаты точки, соотвѣтствующей комплексному числу. Координата ρ обыкновенно называется *радіусомъ векторомъ* точки, а координата ϑ *полярнымъ угломъ*; начало координатъ ρ носитъ для полярной системы названіе *полюса*.

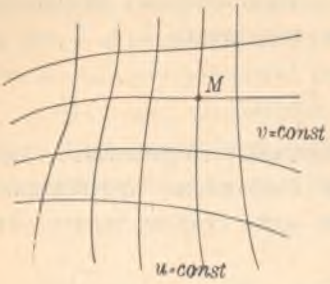
Мы видѣли уже зависимость между этими полярными координатами и прямоугольными координатами x и y, а именно

$$x = \rho \cos \vartheta,\ y = \rho \sin \vartheta. \tag{1}$$

Обратно, черезъ рѣшеніе уравненій (1) относительно ρ и ϑ получимъ полярныя координаты черезъ прямоугольныя

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ tg\, \vartheta = \frac{y}{x}.$$

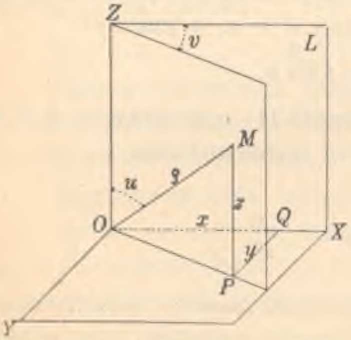
§ 63. Будемъ называть *координатной линіей*, сотвѣтствующей нѣкоторой координатѣ u, такую линію плоскости, для всѣхъ точекъ которой эта координата u постоянная. Очевидно, что въ случаѣ декартовыхъ координатъ координатными линіями являются прямыя, параллельныя осямъ координатъ. Въ случаѣ полярныхъ координатъ координатной линіей для радіуса вектора ρ будетъ, очевидно, кругъ, а для координаты ϑ прямая линія, проходящая черезъ полюсъ. Координаты, для которыхъ координатныя лині кривыя, мы будемъ называть криволинейными координатами. Такъ какъ въ полярныхъ координатахъ одна система координатныхъ линій круги, то полярныя координаты надо считать за криволинейныя. Въ самомъ общемъ случаѣ криволинейныхъ координатъ на плоскости перекрещиваются двѣ системы этихъ линій (черт. 33). Для каждой линіи одной изъ этихъ системъ будетъ постоянной одна координата u, а для каждой линіи другой системы будетъ постоянной другая координата v. Тогда точку M пересѣченія двухъ линій различныхъ системъ мы будемъ опредѣлять тѣми значеніями координатъ u и v, которыя соотвѣтствуютъ проходящимъ черезъ эту точку координатнымъ линіямъ.



Черт. 33.

§ 64. Понятіе о координатахъ точекъ плоскости обобщается на случай кривыхъ поверхностей, причемъ для опредѣленія точки всякой поверхности необходимы двѣ координаты. Одинъ важный примѣръ опредѣленія положенія точки на поверхности при помощи двухъ координатъ мы имѣли уже въ элементарномъ курсѣ географіи, когда опредѣляли положені точки на земномъ шарѣ при помощи долготы и широты. Координатными линіями въ этомъ случаѣ являются меридіаны и параллели.

§ 65. Понятіе о криволинейныхъ координатахъ на плоскости обобщается также въ пространствѣ. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ такъ называемыхъ *полярныхъ* координатъ.



Черт. 34.

Возьмемъ (черт. 34) нѣкоторый полюсъ O въ пространствѣ проведемъ черезъ этотъ полюсъ прямую ZO, которую будемъ на зывать полярною осью, и черезъ эту прямую произвольную плоскость L, которую будемъ называть полярной плоскостью. Тогда положеніе всякой точки M пространства можно указать слѣдующими тремя координатами, которыя мы будемъ называть полярными: во первыхъ, радіусомъ векторомъ ρ, представляющимъ разстояніе точки M до полюса, во вторыхъ, угломъ u, который это разстояніе образуетъ съ полярной осью, и, наконецъ, двуграннымъ угломъ v между полярной плоскостью L и плоскостью, проведенною черезъ заданную точку и полярную ось.

Покажемъ, что эти полярныя координаты находятся въ тѣсной связи съ обыкновенными прямоугольными. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ полярную ось за ось z-овъ, полюсъ за начало координатъ, плоскость L за плоскость XZ. Проведемъ плоскость XY, перпендикулярную къ полярной оси, и возьмемъ за ось x-овъ прямую встрѣчи съ плоскостью L. Тогда изъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ OPM и OQP мы получимъ

$$z = \rho \cos u,\ OP = \rho \sin u,$$
$$x = OP \cos v,\ y = OP \sin v.$$

Отсюда получится такая зависимость между полярными и прямоугольными координатами

$$x = \rho \sin u \cos v,\ y = \rho \sin u \sin v,\ z = \rho \cos u. \tag{1}$$

Рѣшая эти уравненія относительно ρ, u и v, получимъ обратныя выраженія полярныхъ координатъ черезъ прямоугольныя:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$tg\, u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},\ tg\, v = \frac{y}{x}.$$

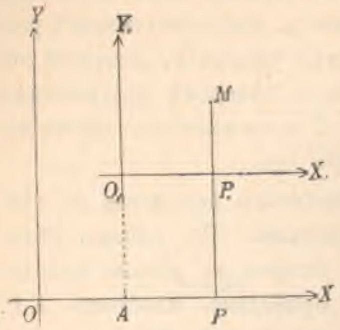
§ 66. Будемъ называть координатными поверхностями такія поверхности въ пространствѣ, для всѣхъ точекъ которыхъ нѣкоторая координата постоянна. Не трудно убѣдиться, что для только что разобраннаго случая полярныхъ координатъ, координатными поверхностями являются для координаты ρ шары, для координаты v плоскости, а для координаты u конусы.

§ 67. Переходъ отъ однѣхъ координатъ къ другимъ представляетъ собою операцію, называемую *преобразованіемъ коорди-*

нать. Мы дадимъ здѣсь правила, по которымъ можно перейти отъ одной прямоугольной системы къ другой.

Перенесемъ на плоскости начало координатъ безъ измѣненія направленія осей въ нѣкоторую точку O_1 (черт. 35), имѣющую координаты a, b относительно первоначальной системы координатъ, такъ что

$$a = OA,\ b = AO_1.$$



Черт. 35.

Тогда, обозначая первоначальныя координаты точки M черезъ x, y, а черезъ x_1, y_1 новыя ея координаты, получимъ

$$x = OP,\ y = PM,$$
$$x_1 = O_1P_1,\ y_1 = P_1M,$$

и у насъ выходятъ слѣдующія формулы для преобразованія координатъ

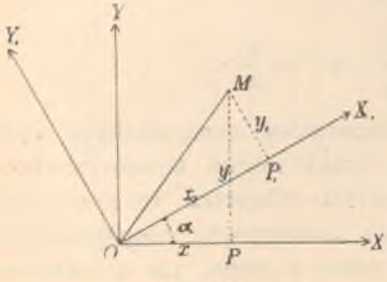
$$x = a + x_1,\ y = b + y_1.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ, если мы разсмотримъ перенесеніе начала координатъ въ пространствѣ безъ измѣненія направленія осей, то формулы преобразованія будутъ

$$x = a + x_1,\ y = b + y_1,\ z = c + z_1,$$

гдѣ a, b, c суть координаты новаго начала.

§ 68. Разсмотримъ теперь измѣненіе направленія координатныхъ осей на плоскости безъ измѣненія начала координатъ.



Черт. 36.

Мы можемъ указать положеніе прямоугольной оси заданіемъ угла α поворота ея относительно первоначальной оси. Тогда пусть первоначальныя координаты точки M (черт. 36) будутъ

$$x = OP,\ y = PM,$$

а новыя координаты

$$x_1 = OP_1,\ y_1 = P_1M.$$

Проектируя отрѣзокъ OM, соединяющій начало координатъ съ точкой M, на первоначальныя оси x-овъ и y-овъ, получимъ

$$x = \text{пр. } x_1 + \text{пр. } y_1,$$

или

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha. \qquad (1)$$

Совершенно подобнымъ же образомъ получимъ

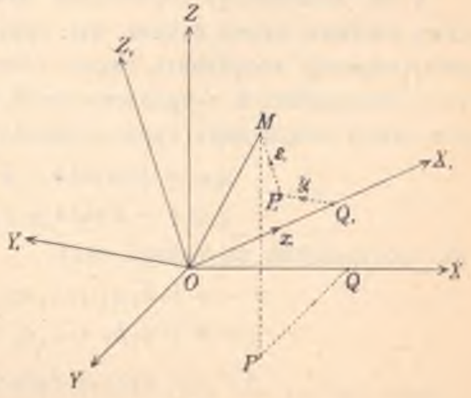
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \qquad (2)$$

§ 69. Соображенія предыдущаго §-а можно будетъ обобщить на случай трехмѣрнаго пространства.

Обозначимъ девять косинусовъ угловъ между первоначальными и новыми осями координатъ отдѣльными буквами слѣдующей таблицы, показывающей сразу, какимъ двумъ осямъ принадлежитъ разсматриваемый уголъ.

	x_1	y_1	z_1
x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3
z	c_1	c_2	c_3

Такъ, напримѣръ, b_3 есть косинусъ угла между первоначальной осью Y и новой осью Z.



Черт. 37.

Проектируя ломанную линію, составляемую тремя новыми координатами x_1, y_1, z_1 точки M (черт. 37), на первоначальныя оси, получимъ формулы

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= x_1 a_1 + y_1 a_2 + z_1 a_3, \\ y &= x_1 b_1 + y_1 b_2 + z_1 b_3, \\ z &= x_1 c_1 + y_1 c_2 + z_1 c_3, \end{aligned}$$

дающія собою формулы преобразованія координатъ x, y, z точки M въ новыя x_1, y_1, z_1. Девять косинусовъ, очевидно, должны удовлетворять слѣдующимъ соотношеніямъ

$$
\begin{aligned}
&a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,\\
&b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1,\\
(2)\qquad &c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1;\\
&a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,\\
&a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0,\\
&b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0,
\end{aligned}
$$

которыя являются слѣдствіемъ того, что обѣ системы координатъ, какъ первоначальная, такъ и новая, образуютъ прямые углы между осями, такъ что имѣютъ мѣсто соображенія §-овъ 29 и 32. Мѣняя роли обѣихъ координатныхъ системъ, можемъ переписать формулы (2) въ такомъ видѣ

$$
\begin{aligned}
&a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,\\
&a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1,\\
(3)\qquad &a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1;\\
&a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,\\
&a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0,\\
&a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Такъ какъ между девятью косинусами существуетъ шесть соотношеній, то три косинуса остаются произвольными. Вообще говоря, можно всѣ девять косинусовъ выразить черезъ три независимыя перемѣнныя.

§ 70. Комбинируя перенесеніе начала координатъ съ поворотомъ системы около начала, мы приходимъ къ преобразованію прямоугольныхъ координатъ самаго общаго вида, когда измѣняется начало координатъ и направленіе осей. Тогда получаемъ на плоскости самый общій видъ преобразованія въ такомъ видѣ

$$
\begin{aligned}
x &= a + x \cos \alpha - y \sin \alpha,\\
y &= b + x \sin \alpha + y \cos \alpha,
\end{aligned}
$$

а въ пространствѣ въ такомъ видѣ

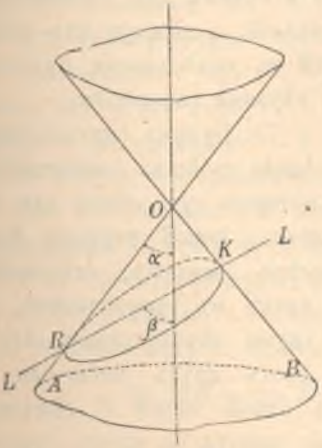
$$
\begin{aligned}
x &= a + x_1 a_1 + y_1 a_2 + z_1 a_3,\\
y &= b + x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_2 b_3,\\
z &= c + x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3.
\end{aligned}
$$

Мы видимъ, что формулы преобразованія прямоугольныхъ координатъ суть формулы первой степени относительно координатъ, какъ первоначальныхъ, такъ и новыхъ.

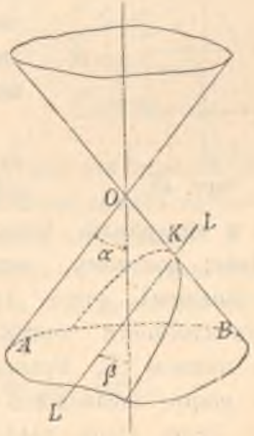
Коническія сѣченія.

§ 71. Теперь мы перейдемъ къ разбору весьма важныхъ по своимъ свойствамъ кривыхъ линій, получающихся при пересѣченіи прямого кругового конуса произвольной сѣкущей плоскостью. При такомъ сѣченіи получаются три различныхъ кривыхъ линіи, такъ называемыя эллипсъ, гипербола, парабола, которыя вмѣстѣ носятъ названіе коническихъ сѣченій. Свойства этихъ линій были извѣстны уже древнимъ грекамъ. Обыкновенно приписываютъ открытіе коническихъ сѣченій Менехму, ученику Платона (350 г. до Р. Х.); такъ, напримѣръ, Эратосѳенъ даетъ этимъ тремъ линіямъ названіе „тріада Менехма". Хотя Эвклидъ и Архимедъ знали уже свойство этихъ линій получаться при сѣченіи конуса, но заслуга полнаго разбора ихъ теоріи принадлежитъ Аполлонію (225 г. до Р. Х.);

§ 74. Возьмемъ нѣкоторый круговой конусъ и расположимъ его ось въ плоскости чертежа, а также возьмемъ сѣкущую плоскость P перпендикулярно къ плоскости чертежа. Тогда конусъ пересѣчется съ плоскостью чертежа по двумъ образующимъ, одинаково наклоненнымъ подъ угломъ α къ оси конуса. Это есть



Черт. 38.



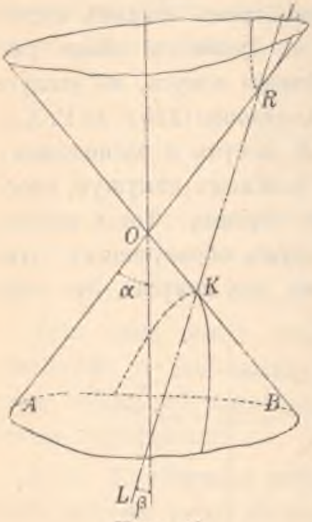
Черт. 39.

уголъ раструба конуса. Пусть OD будетъ ось конуса, его образующія OB и OA, и пусть прямая L будетъ сѣченіе плоскости чертежа плоскостью P, перпендикулярной къ плоскости чертежа. Наклоненіе сѣкущей плоскости P къ оси конуса можно указать угломъ β. Заданный конусъ мы будемъ предполагать полнымъ, т. е. будемъ предполагать, что его образующія продолжены за вершину, такъ что полный конусъ будетъ составлять совокупность двухъ конусовъ, соединяющихся вершинами. Каждую изъ этихъ двухъ частей конуса мы будемъ называть *полою* полнаго конуса.

Если $\beta > \alpha$ (черт. 38), то сѣкущая плоскость пересѣкаетъ одну полу конуса по овальнаго вида кривой, называемой *эллипсомъ*.

Если $\beta = \alpha$ (черт. 39), т. е. сѣкущая плоскость параллельна одной образующей, то эта плоскость пересѣчетъ одну полу конуса по нѣкоторой кривой, имѣющей безконечныя вѣтви и называемой *параболой*.

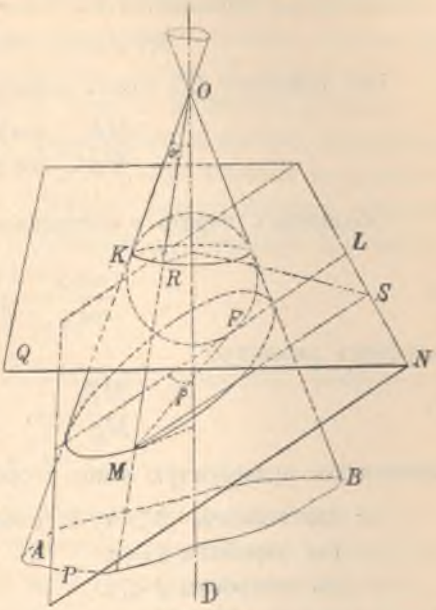
Наконецъ, если $\beta < \alpha$ (черт. 40), то сѣкущая плоскость встрѣчаетъ обѣ полы конуса по двумъ отдѣльно расположеннымъ кривымъ линіямъ. Изъ этихъ кривыхъ каждая распространяется на безконечность вродѣ параболы. Мы будемъ совокупность обѣихъ кривыхъ считать за одно коническое сѣченіе и будемъ это сѣченіе называть *гиперболой*, а каждую изъ составныхъ частей въ отдѣльности будемъ называть вѣтвями гиперболы.



Черт. 40.

§ 73. Будемъ сначала разсматривать такія свойства коническихъ сѣченій, которыя суть общія для эллипса, параболы и гиперболы. Безразлично, какой чертежъ взять для разсмотрѣнія; возьмемъ, напримѣръ чертежъ, относящійся къ эллипсу. Впишемъ (черт. 41) кругъ въ треугольникъ, образованный въ плоскости чертежа двумя образующими AO и BO конуса и прямою L. Вращая этотъ кругъ около оси конуса, получимъ шаръ, касающійся въ одной точкѣ F сѣкущей плоскости P. Этотъ шаръ касается конуса по кругу, расположенному въ плоскости Q, перпендикулярной къ оси конуса. Продолжимъ плоскость Q круга K до пересѣченія съ сѣкущей плоскостью P. Это пересѣченіе совершится по прямой N, перпендикулярной къ плоскости чертежа. Возьмемъ на коническомъ сѣченіи нѣкоторую точку M. Не трудно доказать слѣдующую ѳеорему.

Теорема. *Коническое сѣченіе есть геометрическое мѣсто точекъ M въ плоскости P, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что отношеніе разстояній этихъ точекъ M до точки F и до прямой N есть величина постоянная.*



Черт. 41.

Точка F называется *фокусомъ* коническаго сѣченія, а прямая N его *директрисою*. Мы увидимъ сейчасъ, что это постоянное отношеніе меньше единицы для эллипса, равно единицѣ для параболы и больше единицы для гиперболы.

Проведемъ черезъ точку M образующую конуса; эта образующая коснется шара въ точкѣ R, причемъ точка R будетъ, очевидно, лежать въ плоскости Q. Проведемъ черезъ M въ плоскости P прямую MS, параллельную прямой L. Очевидно, что двѣ прямыя MR и MS имѣютъ одну и ту же проекцію на оси OD конуса; въ самомъ дѣлѣ, оба эти отрѣзка MR и MS имѣютъ одно и тоже начало M, а оба конца лежатъ въ плоскости Q, перпендикулярной къ оси конуса, значитъ оба конца R и S имѣютъ одну и ту же проектирующую плоскость Q, и, значитъ, проекціи концовъ R и S совпадаютъ въ одной и той же точкѣ встрѣчи плоскости Q съ осью конуса. Итакъ

$$\text{пр.}\, MR = \text{пр.}\, MS \text{ (на ось } OD\text{)};$$

отсюда

$$MR \cos(MR, OD) = MS \cos(MS, OD).$$

Но уголъ между MR и OD есть уголъ α наклоненія образующей MR къ оси конуса; уголъ же между MS и OD такой же, какъ и между L и OD, т. е. равенъ углу β, и мы получаемъ, слѣдовательно

$$MR \cos\alpha = MS \cos\beta. \tag{1}$$

Прямыя MR и MF одинаковы по длинѣ, какъ двѣ касательныя, проведенныя къ одному и тому же шару изъ внѣшней точки M, т. е.

$$MR = MF,$$

и уравненіе (1) обращается въ такое:

$$MF\cos\alpha = MS\cos\beta. \tag{2}$$

Это уравненіе (2) можно переписать такъ:

$$\frac{MF}{MS} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Обозначимъ черезъ e постоянное число $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e; \tag{4}$$

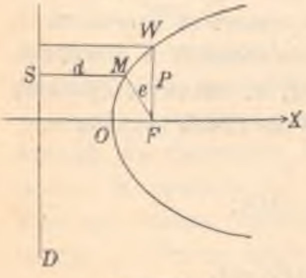
получаемъ равенство

$$\frac{MF}{MS} = e, \tag{5}$$

выражающее приведенную выше теорему.

Для эллипса $\beta > \alpha$, и, слѣдовательно, $e < 1$.
Для параболы $\beta = \alpha$ „ $e = 1$.
Для гиперболы $\beta < \alpha$ „ $e > 1$.

§ 74. Возьмемъ теперь за плоскость чертежа сѣкущую плоскость P (черт. 42). Пусть прямая D будетъ директрисою, а точка F фокусомъ.



Черт. 42.

Проведемъ черезъ фокусъ прямую FX перпендикулярно къ директрисѣ, и пусть точка M будетъ нѣкоторой точкой коническаго сѣченія. Тогда имѣемъ

$$\frac{MF}{MS} = e, \tag{1}$$

гдѣ прямая MS параллельна FX. Будемъ обозначать черезъ r разстояніе точки M отъ фокуса, это такъ называемый *радіусъ-векторъ* точки M; черезъ d обозначимъ разстояніе точки M отъ директрисы. Тогда получаемъ

$$\frac{r}{d} = e. \tag{2}$$

Числа r и d можно называть координатами точки коническаго сѣченія. Мы видимъ, что въ этихъ координатахъ уравненіе коническаго сѣченія имѣетъ видъ (2).

Введемъ въ разсмотрѣніе нѣкоторое положительное число p, которое назовемъ *параметромъ* коническаго сѣченія. Параметръ мы опредѣлимъ, какъ радіусъ-векторъ точки W коническаго сѣченія, параллельный директрисѣ. Черезъ параметръ p легко выразить разстояніе фокуса отъ директрисы, а именно, разстояніе фокуса отъ директрисы есть не что иное, какъ значеніе координаты d для точки W коническаго сѣченія, радіусъ-векторъ которой есть параметръ p. Поэтому, подставляя въ уравненіе (2) вмѣсто r величину параметра p, получимъ

$$\frac{p}{d}=e,$$

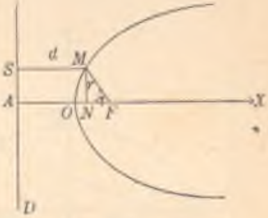
откуда, рѣшая относительно d, получимъ разстояніе фокуса отъ директрисы

$$p=de \text{ и } d=\frac{p}{e},$$

т. е. разстояніе фокуса отъ директрисы есть p, дѣленное на e.

§ 75. Выведемъ теперь уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ, т. е. изъ предыдущихъ кооординатъ r и d оставимъ координату r, а вмѣсто d возьмемъ новую координату φ, уголъ радіуса-вектора съ прямою FX (черт. 43), причемъ будемъ отсчитывать этотъ уголъ отъ направленія этой прямой, идущаго отъ фокуса къ директрисѣ. Обозначимъ черезъ A пересѣченіе директрисы съ прямою FX, а черезъ N основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на прямую AF. Получаемъ

$$d=AF-NF,$$



Черт. 43.

но

$$NF=r\cos\varphi,$$

а въ предыдущемъ §-ѣ мы видѣли, что

$$AF=\frac{p}{e},$$

такъ что

$$d=\frac{p}{e}-r\cos\varphi. \tag{1}$$

Уравненіе (2) § 74 можно переписать такъ

$$r = ed.$$

Вставляя вмѣсто d его значеніе (1), получимъ

$$r = e\left(\frac{p}{e} - r \cos \varphi\right).$$

Это уравненіе и есть искомое уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ. Его можно переписать такъ

$$r = p - re \cos \varphi,$$

или

$$r + re \cos \varphi = p;\ r(1 + e \cos \varphi) = p$$

и, наконецъ,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \tag{2}$$

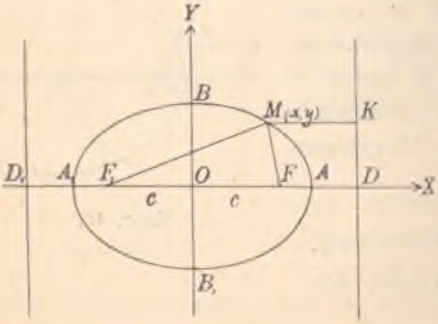
Эллипсъ.

§ 76. Задача. *Найти геометрическое мѣсто точекъ M, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ заданныхъ точекъ F и F_1 есть величина постоянная.*

Чтобы получить формулы въ болѣе простомъ видѣ, возьмемъ (черт. 44) за ось x-овъ прямую, соединяющую заданныя точки F и F_1; за начало координатъ O возьмемъ середину отрѣзка FF_1, а ось y-овъ возьмемъ по перпендикуляру, возставленному къ оси x-овъ изъ точки O. Обозначимъ черезъ c половину разстоянія между заданными точками. Пусть x, y будутъ координаты нѣкоторой точки M искомаго геометрическаго мѣста, причемъ мы не указываемъ, которой именно. Тогда мы получаемъ по опредѣленію геометрическаго мѣста

$$MF + MF_1 = 2a, \tag{1}$$

гдѣ мы черезъ $2a$ обозначаемъ постоянное число, которому должна равняться сумма разстояній точки M отъ двухъ заданныхъ точекъ F и F_1. Такъ какъ сумма двухъ сторонъ треуголь-



Черт. 44.

ника MFF_1 всегда должна быть больше третьей, то должно имѣть мѣсто неравенство

$$2a > FF_1$$

или

$$2a > 2c,$$

то есть

(2) $$a > c.$$

Но мы имѣемъ

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2},$$
$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2};$$

значитъ равенство (1), выражающее свойство точекъ геометрическаго мѣста, обращается въ такое уравненіе

(3) $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

геометрическаго мѣста. Чтобы получить окончательное уравненіе, освобожденное отъ радикаловъ, поступимъ такъ. Перепишемъ уравненіе (3) въ такомъ видѣ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

и возвысимъ обѣ части въ квадратъ. Тогда послѣ надлежащихъ выкладокъ будемъ имѣть

(4) $$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Обозначимъ черезъ e отношеніе $\frac{c}{a}$, такъ что

$$c = ea,$$

мы получимъ

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex.$$

Отсюда мы получаемъ

(5) $$MF = a - ex.$$

Мѣняя въ равенствѣ (4) величину c на $-c$, получимъ

(6) $$MF_1 = a + ex.$$

Остается теперь уничтожить послѣдній радикалъ въ уравненіи (4). Переписывая это уравненіе такъ

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - x\frac{c}{a}$$

и возвышая въ квадратъ, получаемъ

$$(x-c)^2+y^2=a^2+x^2\frac{c^2}{a^2}-2xc.$$

Послѣ упрощеній имѣемъ окончательно

(7) $$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2).$$

На основаніи неравенства (2) мы замѣчаемъ, что a^2-c^2 есть число положительное, которое мы можемъ обозначить черезъ b^2, такъ что получаемъ

(8) $$a^2-c^2=b^2,$$

и мы видимъ, что уравненіе нашей линіи можетъ быть написано окончательно въ такомъ видѣ

(9) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Не трудно убѣдиться, что линія (9) есть линія замкнутая, овальнаго вида. Покажемъ, что эта линія будетъ эллипсомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы возставимъ въ точкѣ D оси x-овъ, имѣющей абсциссу $\frac{a}{e}$, перпендикуляръ и если разсмотримъ разстояніе MK отъ точки геометрическаго мѣста до этого перпендикуляра, то будетъ имѣть мѣсто равенство

(10) $$\frac{MF}{MK}=e,$$

ибо

$$MK=\frac{a}{e}-x,$$

и равенство (10) провѣряется непосредственно на основаніи равенства (5). Итакъ, линія (9) есть коническое сѣченіе. Что эта линія есть эллипсъ, слѣдуетъ изъ неравенства

$$e<1,$$

ибо

$$e=\frac{c}{a}, \text{ а } c<a.$$

Начало координатъ O будетъ, очевидно, центромъ линіи, т. е. такой точкой, въ которой дѣлится пополамъ каждая хорда линіи, проведенная черезъ эту точку. Это слѣдуетъ изъ того соображенія, что уравненіе (9) заключаетъ только квадраты координатъ и, значитъ, представляетъ линію, симметрично расположенную относительно обѣихъ осей.

Равенство (10) показываетъ, что заданная точка F есть фокусъ эллипса (9), а прямая DK директриса его. Изъ указанной симметричности вытекаетъ существованіе второго фокуса, которымъ является другая заданная точка F_1, и второй директрисы. Длина c, выражающая разстояніе фокуса F отъ центра O, носитъ названіе *линейнаго эксцентриситета* эллипса, а отвлеченное число ε, представляющее собою отношеніе c къ a, носитъ названіе *астрономическаго эксцентриситета*.

Полагая въ уравненіи (9)

$$y=0,$$

найдемъ точки встрѣчи эллипса съ осью x-овъ. Получаемъ

$$x^2=a^2,$$

откуда получаются двѣ точки A и A_1 съ координатами

$$x=+a \text{ и } x=-a.$$

Это будутъ такъ называемыя *вершины* эллипса, лежащія на оси, проходящей черезъ фокусы. Разстояніе между этими вершинами, очевидно, будетъ равно $2a$. Совершенно подобнымъ же образомъ ищемъ точки встрѣчи эллипса съ осью y-овъ. Полагаемъ

$$x=0,$$

тогда будетъ

$$y^2=b^2,$$

т. е. получимъ двѣ точки

$$y=+b \text{ и } y=-b.$$

Получаемъ двѣ вершины эллипса B и B_1, лежащія на оси y-овъ. Разстояніе между ними будетъ равняться $2b$.

Такъ какъ существуетъ равенство (8), то мы замѣчаемъ, что длина b должна быть непремѣнно меньше длины a, поэтому ось AA_1, проходящая черезъ фокусы, носитъ названіе большей оси эллипса, а ось BB_1 носитъ названіе меньшей оси эллипса.

Гипербола.

§ 77. Задача. *Требуется найти геометрическое мѣсто точекъ M, разность разстояній которыхъ до двухъ заданныхъ точекъ F и F_1 есть величина постоянная.*

Взявъ такое же расположеніе осей координатъ относительно точекъ F и F_1, какое мы брали въ предыдущей задачѣ, получимъ уравненіе геометрическаго мѣста въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ

$$(1) \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$(2) \qquad \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Такъ какъ изъ элементарной геометріи извѣстно, что разность двухъ сторонъ треугольника должна быть всегда меньше, чѣмъ третья сторона, то мы получаемъ

$$2a<2c$$

или

$$a<c,$$

неравенство, противоположное тому, которое было въ разобранномъ случаѣ эллипса. Посмотримъ, въ чемъ будетъ состоять разница анализа этой новой задачи отъ анализа первой задачи. Прежде всего мы замѣчаемъ, что то обстоятельство, что въ уравненіяхъ (1) и (2) стоятъ передъ корнями знаки —, тогда какъ въ первой задачѣ оба корня были со знакомъ $+$, не имѣетъ никакого существеннаго значенія, такъ какъ мы уничтожаемъ оба радикала послѣдовательнымъ возвышеніемъ въ квадратъ, это же возвышеніе въ квадратъ даетъ одинъ и тотъ же результатъ, какой бы знакъ у радикала ни былъ, $+$ или —. Значитъ, не повторяя выкладки, мы замѣчаемъ, что послѣ уничтоженія радикаловъ въ уравненіяхъ (1) и (2) получается одно и то же уравненіе (7) предыдущаго §-а

$$(3) \qquad x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2).$$

Что касается доказательства того, что линія (3) должна быть коническимъ сѣченіемъ, а именно гиперболой, то это доказательство будетъ проведено такъ же. Если мы разсмотримъ прямую, опредѣляемую уравненіемъ

$$(4) \qquad x=\frac{a}{e},$$

то мы получимъ, какъ и тогда

$$\frac{MK}{MF}=e,$$

причемъ число

$$e = \frac{c}{a}$$

будетъ больше единицы, ибо

$$c > a.$$

Точка F будетъ фокусомъ гиперболы, а прямая (4) ея директрисою.

Мы видѣли уже, что гипербола состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей, которыя мы называли вѣтвями. Не трудно убѣдиться, что уравненія (1) и (2) будутъ уравненіями этихъ двухъ вѣтвей, а именно уравненіе (1) будетъ давать точки на одной вѣтви, уравненіе (2) на другой вѣтви. Посмотримъ, какъ замѣтить, что линія должна состоять изъ двухъ вѣтвей, по уравненію (3). Такъ какъ въ данномъ случаѣ $a^2 - c^2$ есть число отрицательное, то придется положить

$$a^2 - c^2 = -b^2;$$

слѣдовательно, уравненіе (3) окончательно обратится въ такое

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Знакъ — между членами и дѣлаетъ то, что линія состоитъ изъ двухъ различныхъ кусковъ, ибо съ осью x-овъ, имѣющей уравненіе

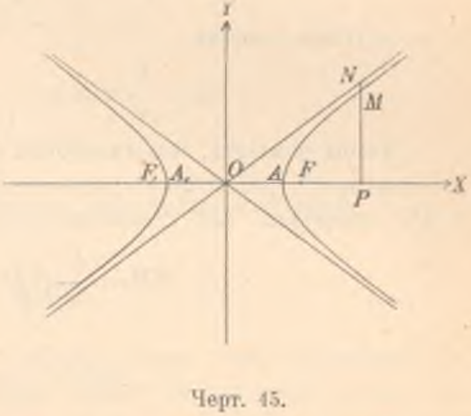
$$y = 0,$$

гипербола пересѣкается въ двухъ вещественныхъ точкахъ A и A_1 (черт. 45), называемыхъ вершинами. Эти вершины будутъ опредѣляться равенствомъ

$$x^2 = a^2,$$

и мы получимъ

$$x = +a \text{ и } x = -a.$$



Черт. 45.

Ось же y-овъ, опредѣляемая уравненіемъ

$$x = 0,$$

не пересѣкаетъ гиперболы, потому что будемъ имѣть

$$y^2 = -b^2,$$

откуда получаются мнимыя значенія для y.

Гипербола симметрична относительно обѣихъ осей координатъ и имѣетъ центръ симметріи въ началѣ координатъ. Изъ этой симметричности вытекаетъ существованіе второго фокуса F_1 и второй директрисы.

§ 78. Покажемъ, что существуютъ двѣ прямыя линіи, называемыя *ассимптотами*, съ которыми безконечныя вѣтви гиперболы стремятся слиться, никогда не достигая этихъ прямыхъ. Уравненіе совокупности ассимптотъ мы получимъ, если въ уравненіи (5) гиперболы замѣнимъ во второй части единицу на нуль, т. е. уравненіе совокупности ассимптотъ будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Послѣднее уравненіе можно переписать такъ

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0,$$

и поэтому мы получаемъ уравненіе ассимптотъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \text{ и } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

т. е. другими словами,

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

Чтобы показать, что гипербола дѣйствительно приближается къ ассимптотѣ, разсмотримъ разность MN ординатъ NP ассимптоты и MP гиперболы. MP равняется y, взятому изъ уравненія (5), т. е.

$$MP = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

а

$$NP = \frac{b}{a}x.$$

Отсюда

$$MN = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

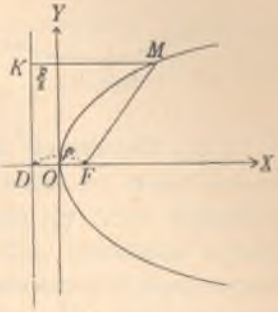
$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Итакъ, мы видимъ, что MN уменьшается до нуля при безпредѣльномъ возрастаніи числа x.

Парабола.

§ 79. Задача. *Найти геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ заданной точки F и отъ заданной прямой D.*

Возьмемъ (черт. 46) за ось x-овъ перпендикуляръ, опущенный изъ заданной точки F на заданную прямую D, и направимъ этотъ перпендикуляръ отъ прямой D къ точкѣ F. Пусть p будетъ представлять разстояніе заданной точки F отъ прямой. Возьмемъ начало координатъ по серединѣ этого разстоянія, а ось y-овъ возьмемъ параллельно заданной прямой. Тогда возьмемъ какую нибудь точку M, принадлежащую къ искомому геометрическому мѣсту, и обозначимъ ея координаты черезъ x, y. Тогда будемъ имѣть равенство



Черт. 46.

$$MK = MF,$$

опредѣляющее свойство точки M геометрическаго мѣста. Мы имѣемъ

$$MK = \frac{p}{2} + x,$$

а

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\ .$$

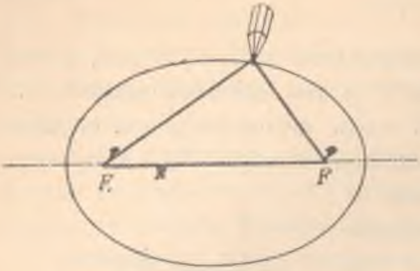
Итакъ, получаемъ уравненіе геометрическаго мѣста

$$(1) \qquad \frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Что это геометрическое мѣсто должно быть параболой, это слѣдуетъ изъ его опредѣленія, потому что въ этомъ случаѣ заданная точка F будетъ фокусомъ, а заданная прямая директрисой параболы. Освобождая уравненіе (1) отъ радикала, получимъ окончательное уравненіе параболы въ такомъ видѣ

$$y^2 = 2\,px.$$

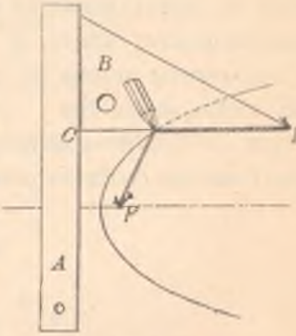
§ 80. На основаніи соображеній предыдущихъ §-овъ можно указать простые пріемы механическаго вычерчиванія коническихъ сѣченій.



Черт. 47.

Построеніе эллипса (черт. 47). Въ заданныхъ фокусахъ F и F_1 укрѣпляются двѣ иглы, вокругъ которыхъ обводится нитка, связанная концами. Если карандашъ держать такъ, чтобы его остріе поддерживало нитку въ натянутомъ состояніи, то передвигая его, мы вычертимъ эллипсъ.

§ 81. *Построеніе параболы* (черт. 48). Линейка A устанавливается вдоль по директрисѣ; треугольникъ B скользитъ вдоль по линейкѣ такъ, что его сторона CD остается постоянно перпендикулярной къ директрисѣ. Берется нитка FD длины, равной сторонѣ CD треугольника, и укрѣпляется концами въ фокусѣ F и концѣ D треугольника B. Если мы будемъ карандашемъ натягивать нитку, прижимая ее постоянно къ треугольнику B, то при движеніи треугольника вдоль по линейкѣ A, карандашъ будетъ описывать параболу.



Черт. 48.

§ 82. Можно указать аналогичное построеніе также для гиперболы; читатель легко самъ найдетъ такой способъ вычерчиванія гиперболы при помощи нитокъ, укрѣпленныхъ въ фокусахъ ея.

§ 83. Мы видимъ, что коническія сѣченія, эллипсъ, гипербола и парабола, опредѣляются уравненіями второй степени относительно координатъ. Эти уравненія суть частные случаи самаго общаго уравненія второй степени относительно координатъ

$$(1) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Линіи, опредѣляемыя уравненіемъ второй степени (1), принято называть линіями *второго порядка.* Оказывается, что кромѣ коническихъ сѣченій не существуетъ другихъ кривыхъ линій второго порядка, но можно считать за линію второго порядка систему двухъ прямыхъ, опредѣляемую уравненіемъ

(2) $$(ax+by+c)(\alpha x+\beta y+\gamma)=0.$$

Уравненіе (2) представляетъ, очевидно, двѣ прямыя

$$ax+by+c=0,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

Систему двухъ прямыхъ потому можно считать линіей второго порядка, что послѣ раскрытія скобокъ въ правой части уравненія (2) получается уравненіе вида (1).

§ 84. Составимъ теперь уравненіе коническаго сѣченія, отнесеннаго къ оси симметріи, проходящей черезъ фокусы, и къ касательной въ вершинѣ. Обозначая черезъ x и y прямоугольныя координаты точки M (черт. 49) коническаго сѣченія, мы получимъ

$$x=OW=OF-WF; y=MW.$$

Но изъ прямоугольнаго треугольника MFW имѣемъ

$$WF=r\cos\varphi,$$
$$WM=r\sin\varphi.$$

Кромѣ того изъ полярнаго уравненія коническаго сѣченія

(1) $$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

Черт. 49.

при $\varphi=0$ получаемъ

$$OF=\frac{p}{1+e}.$$

Отсюда мы имѣемъ

(2) $$x=\frac{p}{1+e}-r\cos\varphi,$$

(3) $$y=r\sin\varphi.$$

Исключая изъ трехъ уравненій (1), (2) и (3) двѣ буквы r и φ, получимъ окончательно

(4) $$y^2=2px+qx^2,$$

гдѣ

$$q=e^2-1.$$

Для эллипса $q<0$.

Для параболы $q=0$.

Для гиперболы $q>0$.

Аналитическое изложеніе геометріи.

§ 85. Представимъ себѣ преподавателя, который придетъ въ аудиторію и начнетъ свои лекціи по геометріи такимъ образомъ:

„Назовемъ точкой совокупность трехъ вещественныхъ чиселъ (x, y, z)“.

Этого преподавателя нельзя остановить, сказавши, что онъ говоритъ неправильно, потому что терминъ „точка“ онъ употребилъ въ первый разъ и, поэтому, имѣетъ право подъ этимъ терминомъ подразумѣвать то, что онъ хочетъ. Если слушателямъ не нравится такое опредѣленіе точки, то они могутъ перестать слушать изложеніе преподавателя, но назвать неправильнымъ изложеніе не могутъ.

При этомъ преподаватель говоритъ, что онъ считаетъ разными двѣ точки, не только отличающіяся числами, но и порядкомъ этихъ чиселъ, такъ что онъ считаетъ двумя различными точками точки

$$(2, 3, 1) \text{ и } (3, 2, 1).$$

Далѣе, преподаватель заявляетъ, что будетъ называть трехмѣрнымъ пространствомъ совокупность всѣхъ точекъ (x, y, z), которыя получатся, если мы будемъ давать числамъ x, y, z всевозможныя вещественныя значенія. Опять терминъ „трехмѣрное пространство“ преподаватель ввелъ въ первый разъ, и, слѣдовательно, нельзя говорить, что трехмѣрное пространство что-то другое. Затѣмъ преподаватель заявляетъ, что онъ будетъ называть разстояніемъ двухъ точекъ (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) число, выражаемое формулой

$$(1) \qquad +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Далѣе, прямую линію, соединяющую двѣ точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), онъ опредѣляетъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ, числа которыхъ удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ первой степени

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Далѣе, на этой прямой онъ считаетъ точку (x, y, z) лежащей между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), если существуютъ неравенства

$$0<\frac{x-x_1}{x_2-x_1}<1 \text{ и т. д.}$$

Читатель уже догадывается на основаніи всего, что онъ прочелъ въ настоящей главѣ, что преподавателю, о которомъ идетъ рѣчь, удастся всю геометрію Эвклида изложить на числахъ и формулахъ безъ помощи чертежа и построенія. Слушатели могутъ добавлять къ изложенію преподавателя какія угодно геометрическія представленія, но преподаватель при своемъ изложеніи фактически не будетъ нуждаться въ этихъ представленіяхъ.

Изъ всего, что здѣсь сказано, я желаю вывести то важное заключеніе, что способъ аналитической геометріи даетъ возможность аналитическаго изложенія геометріи, не зависящаго отъ нашихъ пространственныхъ представленій. Эта независимость аналитическаго изложенія даетъ возможность посмотрѣть, если такъ можно выразиться, со стороны на наши пространственныя представленія; можно отнестись съ критикой къ этимъ представленіямъ. Такая критика сдѣлана была въ первый разъ нашимъ геніальнымъ соотечественникомъ Николаемъ Ивановичемъ Лобачевскимъ (1793—1856), который пришелъ къ выводамъ, въ высшей степени замѣчательнымъ. Оказалось, что внѣшняя природа, изъ которой мы черпаемъ наши пространственныя представленія, не навязываетъ этимъ представленіямъ какой либо вполнѣ опредѣленной формы. Геометрія Эвклида оказывается однимъ только изъ различныхъ видовъ логическихъ схемъ, въ которыя укладываются наши пространственныя представленія. Лобачевскій далъ другую геометрію, отличную отъ геометріи Эвклида, или, лучше сказать, онъ далъ безчисленное множество геометрій, отличныхъ отъ Эвклидовской, строго логичныхъ во всѣхъ своихъ частяхъ и не нарушающихъ нашихъ обычныхъ представленій о точкахъ, прямыхъ линіяхъ, плоскостяхъ и т. д. Геометріи Лобачевскаго оказываются уже не эвклидовскими, т. е. въ нихъ теоремы оказываются другими. Такъ, напримѣръ, сумма угловъ треугольника перестаетъ равняться двумъ прямымъ, она меньше двухъ прямыхъ.

Логичность во всѣхъ своихъ частяхъ геометріи Лобачевскаго обнаруживается въ томъ, что можно дать аналитическое изложеніе геометріи, соотвѣтствующее геометріи Лобачевскаго. Разница съ эвклидовскимъ изложеніемъ будетъ состоять въ томъ, что подъ разстояніемъ двухъ точекъ разсматривается уже не корень квадратный (1), а формула болѣе сложнаго вида.

Если читатель, не вдумавшись достаточно въ предметъ, сдѣлаетъ мнѣ возраженіе, что, по его мнѣнію, внѣшній міръ обязательно требуетъ употребленія геометріи Эвклида, потому что при производствѣ чертежей на бумагѣ мы убѣждаемся въ томъ, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ, то на такое возраженіе читателя нужно будетъ отвѣтить такъ: въ геометріи Лобачевскаго разница суммы угловъ съ двумя прямыми увеличивается по мѣрѣ увеличенія размѣровъ треугольника, малые же треугольники имѣютъ очень малую разницу. Такъ какъ всѣ построенія человѣческія заключаютъ неизбѣжныя ошибки—обыкновенно при практическомъ черченіи нельзя ручаться болѣе, чѣмъ за три цифры послѣ запятой, —то, слѣдовательно, такимъ неточнымъ способомъ, какъ наше построеніе, нельзя уловить разницу суммы угловъ треугольника отъ двухъ прямыхъ въ томъ случаѣ, если она мала, т. е. для малыхъ треугольниковъ. Эта разница можетъ сдѣлаться ощущительной при треугольникахъ со сторонами, равными разстояніямъ между планетами, но разсмотрѣніе такихъ треугольниковъ намъ непосредственно не доступно.

Итакъ, фактъ состоитъ въ томъ, что мы можемъ при нашихъ пространственныхъ представленіяхъ употреблять безразлично обѣ геометріи, Эвклида и Лобачевскаго; такъ какъ обѣ геометріи строго логичны въ всѣхъ своихъ частяхъ, то ошибки отъ приложенія той или другой геометріи быть не можетъ. При приложеніяхъ формулы будутъ разныя, но результаты, очевидно, не должны зависѣть отъ этихъ формулъ. Бóльшая простота геометріи Эвклида при прочихъ равныхъ условіяхъ говоритъ, по моему мнѣнію, за то, что Эвклидовская геометрія будетъ, повидимому, всегда употребляться, какъ болѣе простое орудіе изслѣдованія.

Многомѣрныя геометріи.

§ 86. Изъ всего изложеннаго вытекаетъ, какъ слѣдствіе, что геометрія пространствъ, число измѣреній которыхъ больше трехъ, допускаетъ только аналитическій способъ изложенія. Наши наглядныя пространственныя представленія не могутъ уже служить пособіемъ для умозаключеній. Является поэтому вопросъ, имѣетъ ли серьезное значеніе изученіе многомѣрныхъ геометрій съ большимъ числомъ, чѣмъ три, измѣреній; не будетъ ли такое изученіе простою игрой въ формулы, не имѣющей никакого практическаго значенія? Новыя теченія въ наукѣ показываютъ, однако, важное въ трехъ отношеніяхъ значеніе многомѣрныхъ геометрій. Во первыхъ, въ чисто философскомъ отношеніи, во вторыхъ, разсмотрѣніе многомѣрныхъ геометрій является полезнымъ при изложеніи многихъ математическихъ теорій, въ третьихъ, наука послѣдняго времени показала важность этихъ изслѣдованій для нахожденія новыхъ результатовъ.

Что касается значенія многомѣрныхъ геометрій при редактированіи нѣкоторыхъ математическихъ теорій, то это значеніе можно формулировать такъ. Когда приходится разсматривать теоріи, въ которыхъ формулы заключаютъ рядъ величинъ

$$x_1, x_2, \ldots \ldots x_n,$$

то часто бываетъ полезно называть эти величины координатами нѣкоторой точки въ n-мѣрномъ пространствѣ. Такое геометрическое изложеніе теорій чисто аналитическихъ полезно въ томъ отношеніи, что читатель можетъ повѣрить излагаемую теорію на случаѣ

$$n = 3$$

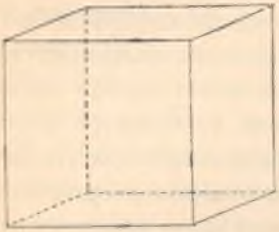
и, такимъ образомъ, для этого случая иллюстрировать теорію при помощи наглядныхъ геометрическихъ образовъ.

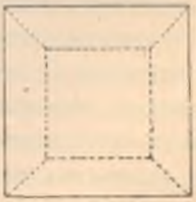
Помимо такого значенія съ точки зрѣнія редактированія изложенія математическихъ теорій, наука послѣдняго времени даетъ цѣлый рядъ фактовъ, обнаруживающихъ большое научное значеніе многомѣрныхъ геометрій. Я обращу вниманіе лишь на два такихъ факта. Первый фактъ относится къ теоріи алгебраическихъ поверхностей. Парижскій академикъ Picard нашелъ полезнымъ для установленія одного важнаго положенія этой теоріи перейти отъ нашего трехмѣрнаго пространства, въ которомъ расположена изучаемая алгебраическая поверхность, къ разсмотрѣнію пространства пятнадцати измѣреній съ тѣмъ, чтобы послѣ нахожденія результатовъ перевести эти результаты опять въ наше трехмѣрное пространство.

Второй фактъ, на которой я считаю своимъ долгомъ обратить вниманіе, состоитъ въ той пользѣ, которую многомѣрныя геометріи приносятъ современной теоріи чиселъ. Въ послѣднее время наука потеряла двухъ первокласныхъ ученыхъ, Вороного, профессора Варшавскаго унивеситета, и Минковскаго, профессора университета въ Геттингенѣ. Эти два ученые достигли результатовъ первостепенной важности въ теоріи чиселъ, причемъ они оба были приведены къ своимъ открытіямъ геометрическими соображеніями, относящимися къ многомѣрнымъ геометріямъ.

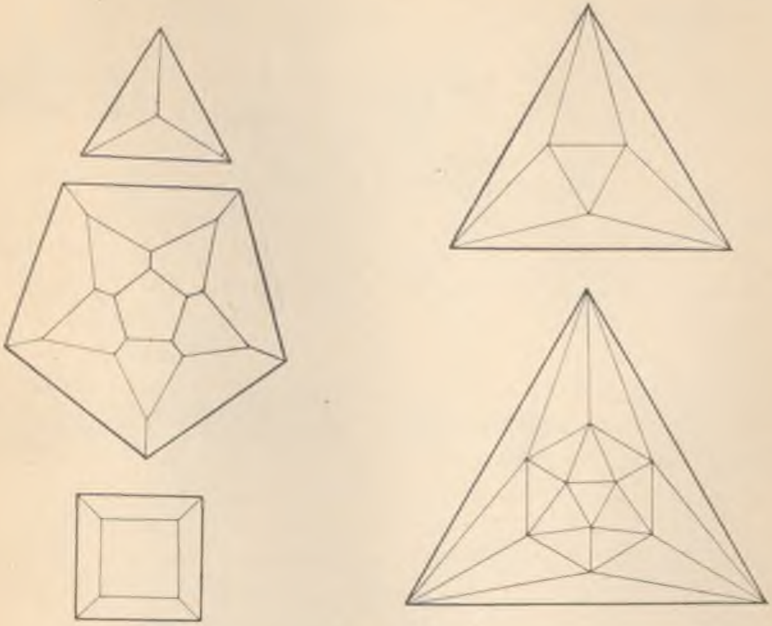
Одинъ изъ математиковъ, занимавшійся теоріей чиселъ, высказалъ такую мысль, что современная теорія чиселъ въ своихъ главныхъ задачахъ изучаетъ симметріи въ многомѣрныхъ пространствахъ. Онъ же высказалъ ту мысль, что современная наука приближается къ тому состоянію, когда долженъ появиться сверхчеловѣкъ, который будетъ отчетливо мыслить въ геометріяхъ съ какимъ угодно числомъ измѣреній. При этомъ, конечно, въ геометріяхъ большого, чѣмъ три, числа измѣреній, этотъ человѣкъ не будетъ употреблять тѣхъ наглядныхъ пріемовъ представленія, которыми онъ пользуется въ трехмѣрной геометріи, ибо такія представленія невозможны, но это отсутствіе наглядныхъ представленій не помѣшаетъ ему оперировать въ многомѣрныхъ геометріяхъ съ тѣмъ же искуствомъ и съ той же увѣреностью, какъ въ трехмѣрной.

Чтобы не быть голословнымъ, я долженъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что правильныя фигуры, такъ называемые правильные многоячейники, для пространства четырехъ измѣреній уже изучены настолько хорошо, что сдѣланы модели проекцій въ наше трехмѣрное пространство всѣхъ правильныхъ многоячейниковъ изъ пространства четырехмѣрнаго. Чтобы въ нѣсколькихъ словахъ намекнуть, въ чемъ дѣло, представимъ себѣ правильные многогранники нашего пространства. Мы знаемъ, что такихъ многогранниковъ существуетъ пять: тетраэдръ, кубъ, октаэдръ, додекаэдръ и икосаэдръ. Возьмемъ сначала какой нибудь одинъ изъ нихъ, напримѣръ кубъ. Чтобы изобразить на плоскости наглядно кубъ, приходится, какъ мы это видимъ на черт. 50, разсматривать часть поверхности куба, какъ переднюю, а часть, какъ заднюю, такъ что кубъ изображается девятью линіями сплошными и тремя пунктирными, лежащими на задней сторонѣ куба. Можно всегда помѣстить глазъ съ передней стороны относительно какой нибудь грани куба настолько близко къ этой грани, чтобы передняя для зрителя часть куба составлялась изъ этой одной ближайшей грани, всѣ же остальныя грани были бы задними, какъ это показано на черт. 51. Если мы хотимъ получить фигуру, наиболѣе симметричную, то придется точку глаза взять на перпендикулярѣ, возставленномъ въ центрѣ передней грани. Если мы такъ поступимъ


Черт. 50.


Черт. 51.

относительно всѣхъ пяти правильныхъ многогранниковъ, то получимъ слѣдующую таблицу пяти фигуръ (черт. 52).



Черт. 52.

Точно такъ же можно поступить и относительно правильныхъ многоячейниковъ пространства четырехъ измѣреній. Оказывается, что такихъ многоячейниковъ существуетъ шесть. Модели проекцій этихъ многоячейниковъ составлены такъ, что роль передней грани играетъ передній многогранникъ трехмѣрнаго пространства; проекціи всѣхъ остальныхъ граней находятся внутри этого многогранника. На прилагаемомъ на слѣдующей страницѣ чертежѣ 53 читатель увидитъ фотографіи нѣкоторыхъ изъ числа этихъ моделей.

ГЛАВА III.

Анализъ безконечно-малыхъ.

§ 1. Изобрѣтеніе аналитической геометріи было началомъ блестящей эпохи математики XVII столѣтія, ознаменовавшейся цѣлымъ рядомъ открытій первостепенной важности. Эти открытія привели къ установленію новыхъ вычислительныхъ пріемовъ, получившихъ названіе *анализа безконечно-малыхъ*. Анализъ безконечно-малыхъ принялъ видъ двухъ исчисленій, весьма важныхъ по своимъ приложеніямъ и тѣсно связанныхъ между собою, такъ называемыхъ *дифференціальнаго* и *интегральнаго* исчисленій.

Основныя идеи анализа безконечно-малыхъ не были идеями совершенно новыми по существу, необходимо признать, что эти идеи, въ зачаточномъ своемъ состояніи, восходятъ еще къ древне-греческому періоду математики. Такъ, напримѣръ, Архимедъ пользовался методами, очень близкими къ методамъ современнаго интегральнаго исчисленія. Исторія математики наводитъ на мысль, что, повидимому, отсутствіе алгебры было главной помѣхой развитію идей анализа безконечно-малыхъ у древнихъ грековъ.

§ 2. Главная честь установленія идей новаго анализа принадлежитъ, несомнѣнно, англійской школѣ математиковъ съ Newton'омъ во главѣ. Newton не только нашелъ алгоритмъ новаго исчисленія, обнявшій большое число единичныхъ изслѣдованій и пріемовъ, употреблявшихся раньше, но и примѣнилъ этотъ алгоритмъ къ рѣшенію большого числа астрономическихъ и механическихъ вопросовъ. Эти приложенія новаго исчисленія Newton изложилъ въ своемъ безсмертномъ сочиненіи „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687). Въ 1684 г. знаменитый нѣмецкій философъ Leibniz опубликовалъ мемуаръ подъ заглавіемъ: „Nova methodus pro maximis et minimis itemqne tangentibus, quae nec fracta nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus". Этотъ мемуаръ замѣчателенъ тѣмъ, что, заключая тотъ же самый алгоритмъ, онъ облекаетъ этотъ алгоритмъ въ характерную форму при помощи удачно придуманныхъ знакоположеній. Несомнѣнно, что знакоположеніямъ Leibniz'а анализъ безконечно-малыхъ во многомъ обязанъ своимъ блестящимъ развитіемъ въ XVIII столѣтии.

§ 3. Особенное значеніе имѣетъ открытіе анализа безконечно-малыхъ главнымъ образомъ потому, что этотъ анализъ открылъ эпоху приложеній математики къ изученію внѣшняго міра. Хотя несомнѣнно, что начала математики вызваны потребностями приложеній въ обыденной жизни человѣка, но долгое время роль математики въ натуральной философіи была не вполнѣ ясна. Тѣмъ не менѣе черезъ всю исторію науки проходитъ вѣра въ особенное значеніе приложеній математики. Начало этой вѣры теряется во мракѣ временъ. Стоитъ вспомнить древнихъ пиѳагорейцевъ, придававшихъ числамъ и геометрическимъ фигурамъ какое то мистическое значеніе. Сочиненіе Newton'а открыло эпоху перехода этой вѣры въ полное внутреннее убѣжденіе. Newton сознавалъ громадное прикладное значеніе новыхъ методъ и потому назвалъ пріемы приложенія этихъ методъ къ изученію природы „математическими принципами натуральной философіи".

§ 4. Книга Newton'а устанавливаетъ начала такъ называемой *аналитической механики*. Можно сказать, что Newton прибавилъ къ прежнимъ двумъ частямъ математики, анализу и геометріи, третью часть, механику, науку о движеніи и о причинахъ этого движенія. Аналитическая механика является, несомнѣнно, частью чистой математики, потому что, подобно анализу и геометріи, она устанавливаетъ рядъ опредѣленій и аксіомъ и изъ этихъ основныхъ положеній выводитъ слѣдствія путемъ математической выкладки и геометрическаго построенія. Подведеніе же изученія движенія, дѣйствительно имѣющаго мѣсто въ природѣ, подъ ту или другую задачу аналитической механики составляетъ предметъ такъ называемой прикладной механики.

Установленная Newton'омъ аналитическая механика получила въ XVIII столѣтіи блестящее развитіе, главнымъ образомъ подъ вліяніемъ изслѣдованій двухъ первостепенныхъ математиковъ, Euler'а и Lagrange'а. Lagrange первый далъ обстоятельный трактатъ по аналитической механикѣ, носящій названіе „Mécanique analytique“ (1788). Прикладная механика также получила блестящее развитіе въ XVIII столѣтіи, къ концу котораго относится появленіе сочиненія Laplace'а „Traité de la mécanique céleste“ (1799), гдѣ Laplace развиваетъ приложенія аналитической механики къ астрономіи.

§ 5. Анализъ безконечно-малыхъ является, такимъ образомъ, той частью математики, которая вызвана къ жизни потребностями приложеній къ натуральной философіи, и все дальнѣйшее движеніе этого анализа впередъ совершается подъ вліяніемъ требованій, которыя ставятъ математикѣ эти приложенія.

§ 6. Обратимъ теперь вниманіе на тѣ новыя понятія, которыя анализъ безконечно-малыхъ беретъ изъ наблюденій окружающей природы.

Окружающая насъ жизнь проявляется въ перемѣнѣ и движеніи; поэтому новый анализъ, желая приблизиться къ возможности объясненія явленій окружающей жизни, долженъ былъ ввести новое понятіе о *перемѣнной величинѣ*. Въ изложеніи Newton'а перемѣнныя числа называются числами текущими, *quantitates fluentes*, причемъ Newton разсматриваетъ скорости, съ которыми текутъ перемѣнныя. Этимъ скоростямъ онъ даетъ названіе *флюксій* (fluxiones). Эти флюксіи и являются основнымъ понятіемъ новаго исчисленія.

§ 7. Второй принципъ, который анализъ безконечно-малыхъ беретъ изъ природы, есть принципъ *непрерывности*.

Наблюдая окружающую насъ жизнь, въ частности наблюдая тѣ движенія и перемѣны, въ которыхъ эта жизнь проявляется, мы изъ опыта приходимъ къ убѣжденію, что эти перемѣны и движенія совершаются безъ скачковъ или, какъ говорятъ въ математикѣ, *непрерывно*.

§ 8. Среди затрудненій, встрѣчающихся при приложеніи математики къ натуральной философіи, существуетъ одно громадное и, повидимому, неустранимое. Это затрудненіе мы назовемъ идеей безконечности. Безконечность проникаетъ во всѣ наши представленія о внѣшнемъ мірѣ. Она простирается въ обѣ стороны, въ сторону безконечно-большихъ, — безконечность пространства, въ которомъ двигаются небесныя тѣла, и въ сторону безконечно-малыхъ, въ сторону тайнъ молекулярнаго строенія матеріи.

Я назвалъ идею безконечности непреодолимымъ затрудненіемъ, ибо исторія математики, повидимому, учитъ, что разумъ человѣческій долженъ быть разсматриваемъ, какъ нѣчто конечное, и что ему дана возможность только косвеннымъ образомъ подходить къ уразумѣнію безконечности. Не имѣя силъ обнять идею безконечности во всемъ ея объемѣ, мы изучаемъ конечные факты, на которыхъ проявляется вліяніе безконечности, и такимъ образомъ мы стараемся составить себѣ понятіе, если не объ идеѣ безконечности въ самой себѣ, то, по крайней мѣрѣ, объ ея проявленіяхъ въ вещахъ конечныхъ.

Я поясню только что сказанное нѣсколькими примѣрами.

Если мы разсмотримъ совокупность конечнаго числа вещественныхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots . a_n,$$

то изъ этихъ чиселъ одно будетъ наименьшее изъ всѣхъ, и будетъ тоже существовать другое наибольшее. Всѣ остальныя числа будутъ заключаться между этими двумя, которыя мы назовемъ крайними.

Совершенно иначе можетъ обстоять дѣло, если въ совокупности безчисленное число элементовъ. Напримѣръ, разсмотримъ совокупность всѣхъ положительныхъ раціональныхъ правильныхъ дробей, т. е. чиселъ вида

$$\frac{m}{n},$$

гдѣ цѣлое число m меньше цѣлаго числа n. Всѣ эти правильныя дроби суть числа, лежащія въ границахъ между числами 0 и 1, причемъ эти послѣднія два числа не принадлежатъ къ совокупности, какъ не подходящія подъ опредѣленіе правильной дроби.

Очевидно, что совокупность правильныхъ дробей не имѣетъ крайнихъ элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, нельзя сказать, что нѣкоторая правильная дробь $\frac{m}{n}$ есть самая большая изъ всѣхъ, ибо можно написать дробь

$$\frac{m+1}{n+1},$$

которая будетъ также правильная и больше предыдущей. Подобнымъ же образомъ никакая дробь $\frac{p}{q}$ не можетъ быть наименьшею, ибо, если бы мы предположили, что дробь $\frac{p}{q}$ наименьшая, то получили бы противорѣчіе, такъ какъ дробь

$$\frac{p}{q+1}$$

еще меньше.

Итакъ, если совокупность вещественныхъ чиселъ состоитъ изъ конечнаго числа элементовъ, то существованіе крайнихъ элементовъ обязательно. При безконечномъ числѣ элементовъ пропадаетъ обязательность существованія крайнихъ элементовъ.

Какъ второй примѣръ, возьмемъ сложеніе чиселъ. Мы знаемъ изъ ариѳметики и алгебры, что сумма конечнаго числа слагаемыхъ не зависитъ отъ порядка сложенія. Совершенно иныя явленія происходятъ при сложеніи безконечнаго числа слагаемыхъ. Въ этомъ случаѣ не всегда сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ. Иногда, производя суммированіе въ различныхъ порядкахъ, можемъ получить различныя суммы. Возможно бываетъ, устанавливая извѣстный порядокъ суммированія членовъ, получить въ видѣ суммы любое заданное число. Наконецъ, бываютъ случаи, когда ни при какомъ порядкѣ сложенія мы не получаемъ опредѣленной суммы.

Отсутствіе крайнихъ элементовъ совокупности и зависимость суммы отъ порядка сложенія, вотъ простые факты совершенно конечнаго характера, въ которыхъ играетъ роль идея безконечности.

Наконецъ, какъ третій примѣръ, припомнимъ, что мы сказали въ § 9 главы I о числахъ ирраціональныхъ. Эти числа находятся въ какихъ то промежуткахъ между числами раціональными. Длина этихъ промежутковъ равна нулю. У насъ нѣтъ никакой возможности представить себѣ ясно промежутокъ съ длиною нуль, между тѣмъ фактъ существованія такихъ промежутковъ налицо.

§ 9. Хотя основные принципы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій были установлены уже Newton'омъ и Leibniz'омъ, тѣмъ не менѣе пріемы изложенія, такъ сказать методика преподаванія этихъ исчисленій, измѣнялись втеченіе столѣтій; можно сказать, что нѣкоторые пункты изложенія получили окончательную формулировку только въ послѣднее время. Въ прежнія времена понятіе о безконечно-малой величинѣ, которое на каждомъ шагу встрѣчается въ дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіи носило нѣсколько метафизическій, чтобы не сказать мистическій характеръ, теперь же изложеніе анализа безконечно-малыхъ значительно упрощено. Поэтому мы совѣтуемъ читателю, приступающему къ чтенію слѣдующихъ §-овъ, посвященныхъ изложенію анализа безконечно-малыхъ, отнестись къ дѣлу возможно проще, не стараться искать какихъ нибудь туманныхъ произвольныхъ представленій, а слѣдить только точно за опредѣленіями, которыя будутъ даны дальше, и за математическими слѣдствіями изъ этихъ опредѣленій. Такъ напримѣръ, читатель долженъ разъ навсегда себѣ замѣтить, что подъ безконечно-малой величиной подразумѣвается перемѣнная величина, имѣющая предѣломъ нуль, и больше ничего.

Поэтому читатель долженъ отличать строго два понятія, только что указанное понятіе о безконечно-малой величинѣ, употребляемое въ анализѣ, и физическое понятіе объ очень малой величинѣ, т. е. о величинѣ малой въ сравненіи съ размѣрами нашего тѣла и съ продолжительностью нашей жизни. Такъ напримѣръ, размѣры нѣкоторой инфузоріи можно считать очень малыми по сравненію съ размѣрами нашего тѣла, но размѣръ тѣла всякой опредѣленной инфузоріи опредѣляется нѣкоторымъ числомъ, хотя и малымъ, но постояннымъ, и, слѣдовательно, не можетъ быть величиною безконечно-малой.

§ 10. Прежде чѣмъ перейти къ систематическому изложенію анализа безконечно-малыхъ, позволю себѣ въ нѣсколькихъ словахъ, хотя и не совсѣмъ строго, характеризовать сущность обоихъ исчисленій, дифференціальнаго и интегральнаго.

На основаніи вышеуказаннаго закона непрерывности мы замѣчаемъ, что жизнь переходитъ отъ всякой своей стадіи въ моментъ A времени къ нѣкоторой новой формѣ, соотвѣтствующей моменту B, при помощи непрерывнаго перехода черезъ всѣ промежуточныя картины.

Пояснимъ сказанное на примѣрѣ. Разсмотримъ ленту картины кинематографа, изображающей какую нибудь сцену изъ жизни, напримѣръ приближеніе поѣзда къ станціи. Извѣстно, что на лентѣ кинематографа находится рядъ большаго числа фотографій желѣзнодорожной станціи, снятыхъ черезъ очень малые промежутки времени, обыкновенно доли секунды. Разсмотримъ ту часть ленты, которая заключаетъ всѣ послѣдовательныя фотографіи отъ того момента, когда станція была пустая, до момента прихода на нее поѣзда. Если мы сравнимъ два рядомъ стоящихъ снимка нашей ленты, то мы въ нихъ почти не замѣтимъ разницы, эта разница очень мала, различіе же двухъ крайнихъ фотографій, пустой станціи и станціи, наполненной пассажирами, выходящими изъ прибывшаго поѣзда, очень значительно. Но не надо забывать, что переходъ отъ первой картины къ послѣдней, значительно отъ нея отличающейся, совершился при помощи ряда малыхъ измѣненій черезъ промежуточныя картины.

Дифференціальное исчисленіе можно характеризовать, какъ такое исчисленіе, которое изучаетъ законы безконечно-малыхъ измѣненій, происходящихъ подъ вліяніемъ тѣхъ или другихъ причинъ въ безконечно-малые промежутки времени. Интегральное же исчисленіе стремится отъ этихъ безконечно-малыхъ измѣненій при помощи ихъ суммированія притти къ выводамъ относительно конечныхъ измѣненій, происходящихъ уже черезъ большіе промежутки времени.

Теорія предѣловъ.

§ 11. Пусть задана нѣкоторая совокупность Σ вещественныхъ чиселъ. Задать совокупность чиселъ, это значитъ указать правила, по которымъ относительно каждаго произвольно взятаго числа можно сказать, принадлежитъ ли оно къ этой совокупности или нѣтъ.

Если мы какое нибудь изъ чиселъ совокупности Σ, не указывая, которое именно, обозначимъ буквою x, то это буква выразитъ такъ называемую *перемѣнную величину*.

Каждое изъ чиселъ совокупности Σ будемъ называть *частнымъ значеніемъ* перемѣнной x.

§ 12. Пусть x_0 будетъ одно изъ частныхъ значеній x'а; мы будемъ говорить, что перемѣнная x получила частное значеніе x_0, если написано равенство

$$x = x_0.$$

§ 13. Обыкновенно устанавливается процессъ измѣненія перемѣнной, т. е. устанавливается послѣдовательность, въ которой перемѣнная принимаетъ свои частныя значенія. Мы устанавливаемъ, какія значенія перемѣнная принимаетъ раньше, какія позже. Такъ, напримѣръ, мы говоримъ, что перемѣнная возрастаетъ, если она принимаетъ бо́льшія значенія послѣ меньшихъ.

Очень часто процессъ измѣненія перемѣнной устанавливается нумерованіемъ частныхъ значеній

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ .\ .\ .\ x_n,\ .\ .\ .$$

Такое нумерованіе, впрочемъ, возможно не всегда; когда оно возможно, то совокупность Σ носитъ названіе *перечислимой* или *нумерованной* (abzählbar).

Итакъ, въ случаѣ перечислимой совокупности

$$\Sigma; (x_1, x_2, \ . \ . \ . \ x_n, \ . \ . \ . \ )$$

процессъ измѣненія перемѣнной можетъ состоять, напримѣръ, въ послѣдовательномъ увеличеніи нумера n.

§ 14. Перемѣнная, всѣ значенія которой одинаковы, носитъ названіе *постоянной* величины. Къ числу постоянныхъ величинъ относится также всякое опредѣленное число.

§ 15. Опредѣленіе. *Постоянное число a называется предѣломъ перемѣнной x, если при нѣкоторомъ процессѣ измѣненія перемѣнной численное значеніе разности*

$$x - a$$

можетъ быть сдѣлано меньше произвольно заданнаго положительнаго числа ε и при дальнѣйшемъ измѣненіи x оно останется меньше ε.

Предѣлъ обозначается знакомъ

$$a = lim\, x.$$

§ 16. Ограничимся во всемъ дальнѣйшемъ тѣмъ случаемъ, когда перемѣнная пробѣгаетъ перечислимую совокупность частныхъ значеній. Опредѣленіе предѣла можно въ этомъ случаѣ формулировать такъ:

Число a есть предѣлъ перемѣнной x_n, если всякому положительному числу ε можно сопоставить нѣкоторое цѣлое положительное число n такое, что при произвольномъ цѣломъ положительномъ числѣ p имѣетъ мѣсто неравенство

$$|x_{n+p} - a| < \varepsilon.$$

§ 17. Какъ слѣдствіе опредѣленія предѣла, получаемъ теорему:

Теорема. *Если перемѣнная x_n стремится къ нѣкоторому предѣлу a, то всякому положительному числу ε можно сопоставить такое цѣлое положительное число n, что при произвольномъ значеніи числа p будетъ*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Для доказательства замѣтимъ, что при достаточно большомъ n численныя значенія

$$x_{n+p} - a, \ x_n - a$$

будутъ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, слѣдовательно будетъ меньше ε численное значеніе разности

$$(x_{n+p} - a) - (x_n - a)$$

или

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

§ 18. Обратная теорема оказывается также справедливой.

Теорема. *Если всякому положительному числу* ε *можно сопоставить такое цѣлое число* n, *что при произвольномъ цѣломъ положительномъ* p *имѣетъ мѣсто неравенство*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \tag{1}$$

то перемѣнная x_n *при возрастаніи* n *стремится къ нѣкоторому предѣлу.*

Эта теорема есть основная теорема всего анализа. Мы будемъ ее называть теоремой Bolzano-Cauchy по имени математиковъ, ее высказавшихъ. Мы не будемъ останавливаться въ нашемъ краткомъ изложеніи на ея доказательствѣ, скажемъ только, что это доказательство основано на фактѣ, указанномъ въ первой главѣ, а именно на томъ фактѣ, что точки, соотвѣтствующія вещественнымъ числамъ, какъ раціональнымъ, такъ и ирраціональнымъ, заполняютъ непрерывнымъ образомъ прямую.*) Понятіе о предѣлѣ играетъ важную роль уже въ элементарной математикѣ, гдѣ, между прочимъ, разсматривается окружность круга, какъ предѣлъ периметра вписаннаго многоугольника при возрастаніи числа его сторонъ.

§ 19. Перечислимъ рядъ основныхъ теоремъ, относящихся къ предѣламъ перемѣнныхъ.

Теорема. *Если перемѣнная* x_n, *возрастающая съ возрастаніемъ значка* n, *остается меньше опредѣленнаго числа* A, *то она стремится къ нѣкоторому предѣлу.*

Допустимъ, что эта перемѣнная не имѣетъ предѣла; тогда основное условіе (1) § 18 существованія предѣла не должно имѣть мѣста, т. е. мы должны отрицать возможность сопоставленія всякому числу ε числа n, другими словами, если не всякому числу ε можно сопоставить число n, то должно существовать по крайней мѣрѣ одно число ε_1, которому нельзя сопоставить требуемаго числа n. Что же значитъ, что числу ε_1 нельзя сопоставить числа

---

*) Для желающихъ познакомиться съ доказательствомъ теоремы Bolzano-Cauchy можно указать книгу: Введеніе въ анализъ. Ирраціональныя числа и предѣлы. Изъ лекцій, читанныхъ на Кіевскихъ Высшихъ Женскихъ Курсахъ профессоромъ Д. А. Граве. Кіевъ. 1910.

n такого, чтобы независимо отъ цѣлаго числа p имѣло мѣсто неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon_1?$$

Это значитъ, очевидно, что какое бы число n мы ни выбирали, будетъ по крайней мѣрѣ при одномъ цѣломъ числѣ p_1 противорѣчіе этому неравенству, т. е. другими словами всякому числу n можно будетъ сопоставить по крайней мѣрѣ одно цѣлое число p_1, при которомъ

$$|x_{n+p_1} - x_n| \geqslant \varepsilon_1.$$

Такъ какъ перемѣнная x_n возрастаетъ, то будетъ также

$$(1) \qquad x_{n+p_1} - x_n \geqslant \varepsilon_1;$$

подобнымъ же образомъ для числа $n+p_1$ можно найти новое число p_2, чтобы было

$$(2) \qquad x_{n+p_1+p_2} - x_{n+p_1} \geqslant \varepsilon_1$$

и т. д., такъ что мы получимъ неравенство

$$(3) \qquad x_{n+p_1+p_2+\ldots+p_k} - x_{n+p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{k-1}} \geqslant \varepsilon_1;$$

отсюда, складывая, получимъ

$$x_{n+p_1+p_2+\ldots+p_k} \geqslant x_n + k\varepsilon_1.$$

Мы видимъ, что при достаточно большомъ k перемѣнная

$$x_{n+p_1+p_2+\ldots+p_k}$$

можетъ сдѣлаться сколь угодно большою, что противорѣчитъ предположенію, что она всегда остается меньше A.

Легко видѣть, что предѣлъ будетъ больше всякаго значенія перемѣнной x_n.

§ 20. Очевидно, что, *если перемѣнная, постоянно убывающая, остается больше нѣкотораго опредѣленнаго числа B, то она стремится къ нѣкоторому предѣлу, который будетъ меньше всякаго значенія перемѣнной.*

§ 21. Очень часто приходится имѣть дѣло съ двумя перемѣнными, имѣющими общій предѣлъ.

Теорема. *Если изъ двухъ перемѣнныхъ x_n, y_n первая постоянно возрастаетъ, а вторая убываетъ, причемъ разность $y_n - x_n$, будучи положительной, имѣетъ предѣломъ нуль, то перемѣнныя стремятся къ нѣкоторому общему предѣлу a.*

По условію теоремы при всякомъ p имѣемъ

$$y_{n+p} < y_n\,,\, x_{n+p} > x_n,$$
$$y_{n+p} > x_{n+p};$$

слѣдовательно

$$x_{n+p} < y_n,$$
$$y_{n+p} > x_n.$$

На основаніи теоремы § 19 перемѣнная x_{n+p} имѣетъ нѣкоторый предѣлъ a, ибо, возрастая съ возрастаніемъ p, она остается постоянно меньше y_n; подобнымъ же образомъ перемѣнная y_{n+p} имѣетъ нѣкоторый предѣлъ b, ибо, убывая, она остается постоянно больше x_n. Очевидно, что $a = b$, ибо невозможно предположить, что, напримѣръ,

$$b > a,$$

ибо тогда при существованіи неравенствъ

$$y_n > b\,,\, x_n < a$$

было бы

$$y_n - x_n > b - a,$$

что противорѣчитъ условію

$$lim\,(y_n - x_n) = 0.$$

§ 22. Разсмотримъ нѣкоторое число m перемѣнныхъ

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_m,$$

стремящихся соотвѣтственно къ предѣламъ

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_m.$$

Тогда можно высказать слѣдующій рядъ теоремъ.

Теорема I. *Предѣлъ алгебраической суммы равенъ суммѣ предѣловъ, т. е.*

$$lim\,(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m) = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m.$$

Для доказательства теоремы представимъ разность

(1) $$(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m) - (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m)$$

въ видѣ суммы разностей

(2) $$x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots\ldots x_m - a_m.$$

Такъ какъ числа a_i суть предѣлы соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ x_i, то каждая изъ разностей (2) можетъ быть сдѣлана по абсолютной величинѣ меньше $\frac{\varepsilon}{m}$, гдѣ ε произвольно малое положительное число. Тогда, очевидно, разность (1) будетъ меньше ε, и справедливость теоремы доказана.

§ 23. Теорема II. *Предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ, т. е.*

$$lim\,(x_1\,x_2\,.\;.\;.\,x_m) = a_1\,a_2\,.\;.\;.\,a_m.$$

Докажемъ сначала теорему для двухъ чиселъ x_1 и x_2 и разсмотримъ для этой цѣли разность

(1) $$x_1\,x_2 - a_1\,a_2.$$

Переписавъ ее въ видѣ

(2) $$x_1\,(x_2 - a_2) + a_2\,(x_1 - a_1),$$

мы замѣчаемъ, что, если черезъ a обозначимъ положительное число, которое больше всѣхъ численныхъ значеній x_1, достаточно близкихъ къ предѣлу a_1, то мы имѣемъ

$$|x_1\,x_2 - a_1\,a_2| < a|x_2 - a_2| + |a_2|\,.\,|x_1 - a_1|.$$

Сколь бы мало ни было число ε, если численныя значенія разностей

$$x_1 - a_1,\; x_2 - a_2$$

сдѣлаются меньше

$$\frac{\varepsilon}{a + |a_2|},$$

то тогда численная величина разности (1) будетъ меньше ε, и теорема доказана.

Доказавъ теорему для двухъ множителей, не трудно ее распространить на произвольное число множителей. Предположимъ, что теорема доказана для $m - 1$ множителей, т. е. что имѣетъ мѣсто равенство

(3) $$lim\,(x_1\,x_2\,.\;.\;.\,x_{m-1}) = a_1\,a_2\,.\;.\;.\,a_{m-1}\,.$$

Покажемъ справедливость равенства

$$lim\,(x_1\,x_2\,.\;.\;.\,x_{m-1}\,x_m) = a_1\,a_2\,.\;.\;.\,a_{m-1}\,a_m\,.$$

Обозначимъ для сокращенія

$$X = x_1\,x_2\,.\;.\;.\,x_{m-1}\,;$$

требуется доказать, что

(4) $$lim\,(X\,x_m) = a_1\,a_2\,.\;.\;.\,a_{m-1}\,.\,a_m\,.$$

Но теорема для случая двухъ множителей доказана, слѣдовательно

$$lim\,(X\,.\,x_m) = lim\,X\,.\,lim\,x_m\,,$$

но

$$\lim x_m = a_m\,,$$

а на основаніи формулы (3)

$$\lim X = a_1 a_2 \,.\;\;.\;\;.\, a_{m-1};$$

отсюда слѣдуетъ справедливость формулы (4), и теорема доказана въ общемъ видѣ.

Примѣчаніе. Относительно теоремы о предѣлѣ суммы и произведенія перемѣнныхъ надо имѣть въ виду, что эти теоремы остаются справедливыми только тогда, когда число слагаемыхъ и множителей предполагается вполнѣ опредѣленнымъ и неизмѣннымъ при процессѣ измѣненія этихъ перемѣнныхъ. Если же число слагаемыхъ и множителей безпредѣльно возрастаетъ при приближеніи ихъ къ предѣламъ, то обѣ теоремы могутъ оказаться несправедливыми. Такъ, напримѣръ, сумма

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;+\frac{1}{m},$$

состоящая изъ m слагаемыхъ, постоянно имѣетъ значеніе равное 1, и, слѣдовательно, сумма имѣетъ предѣломъ 1 при безконечномъ возрастаніи числа m, а каждое изъ слагаемыхъ имѣетъ предѣломъ нуль.

Подобнымъ образомъ выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

составленное изъ n множителей вида

$$\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

не приближается къ предѣлу 1, къ которому приближаются всѣ его множители, ибо это выраженіе остается всегда больше двухъ, какъ это видно изъ разложенія по биному Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\,.\,\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{n^2} +$$

$$+\;.\;\;.\;\;.\;\;. > 1 + n\,.\,\frac{1}{n}\ \text{т. е.} > 2.$$

§ 24. Теорема III. ***Предѣлъ частнаго равенъ частному предѣловъ, т. е.***

$$\lim \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Справедливость теоремы слѣдуетъ изъ тождества

$$\frac{x_1}{x_2}-\frac{a_1}{a_2}=\frac{x_1 a_2 - x_2 a_1}{a_2 x_2}=\frac{(x_1-a_1)\,a_2-(x_2-a_2)\,a_1}{a_2 x_2}.$$

Въ этой теоремѣ предполагается, конечно, отличнымъ отъ нуля предѣлъ a_2, ибо при $a_2=0$ выраженіе $\frac{a_1}{a_2}$ не имѣетъ смысла.

§ 25. Теорема IV. *Предѣлъ степени равенъ степени предѣла, т. е.*

$$lim\left(x^{\alpha}\right)=a^{\alpha}.$$

Если показатель α есть цѣлое число, то теорема есть частный случай теоремы о предѣлѣ произведенія.

Теорема остается справедливою и въ случаѣ дробнаго или ирраціональнаго показателя. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ необходимо ограничиваться, чтобы не вводить въ разсмотрѣніе чиселъ комплексныхъ, такою перемѣнною x, которая остается всегда положительной и имѣетъ положительный предѣлъ a.

§ 26. Теорема. *Если перемѣнныя x и y стремятся соотвѣтственно къ предѣламъ a и b, то, если перемѣнная x постоянно не превосходитъ перемѣнную y, то и предѣлъ a не превосходитъ предѣла b.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное, что

$$a>b,$$

и обозначимъ

$$a-b=k,$$

гдѣ k число положительное. Имѣемъ тождество

$$x-y=x-a-(y-b)+a-b,$$

или

$$x-y=x-a-(y-b)+k.$$

Обѣ разности

$$x-a \text{ и } x-b$$

могутъ быть сдѣланы по числовой величинѣ сколь угодно малыми, и вторая часть получитъ знакъ числа k, т. е. сдѣлается числомъ положительнымъ; выйдетъ $x>y$, что противорѣчитъ предположенію.

§ 27. Примѣнимъ теперь наши свѣдѣнія о предѣлахъ къ разсмотрѣнію одного новаго ирраціональнаго числа, которое мы будемъ называть e и которое составляетъ основаніе такъ называемыхъ натуральныхъ логариѳмовъ. Въ виду того, что логариѳмы въ первый разъ были введены въ разсмотрѣніе извѣстнымъ математикомъ Napier'омъ (1550—1617) въ его сочиненіи „Mirifici logarithmorum canonis descriptio", натуральные логариѳмы носятъ также названіе *неперовыхъ*.

Мы будемъ разсматривать предѣлъ величины

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

гдѣ m безгранично возрастающее цѣлое число. Раскрывая по формулѣ для бинома, получимъ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3}+\ldots=1+1+\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}+$$

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots$$

Такъ какъ въ правой части послѣдняго равенства число членовъ возрастаетъ съ увеличеніемъ m, причемъ всѣ разности

(1) $$1-\frac{1}{m}, 1-\frac{2}{m}, 1-\frac{3}{m}, \ldots$$

также возрастаютъ, и всѣ члены остаются числами положительными, то мы заключаемъ, что перемѣнная

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

сама возрастаетъ съ увеличеніемъ числа m. Не трудно убѣдиться, что при этомъ возрастаніи перемѣнная остается меньше числа 3. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя разности (1) единицами, мы всѣ члены правой части увеличимъ, и получится неравенство

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m};$$

уменьшая знаменатели всѣхъ дробей правой части неравенства замѣною цѣлыхъ чиселъ 3, 4, 5, . . . двойками, мы получимъ справедливое подавно неравенство

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{2^{m-1}}$$

или

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<1+\frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда мы окончательно видимъ, что

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3.$$

Итакъ, наша перемѣнная величина, возрастая, остается постоянно меньше числа 3, значитъ по теоремѣ § 19 она приближается къ нѣкоторому предѣлу, не превосходящему числа 3. Этотъ предѣлъ есть новое важное число анализа. Это число есть ирраціональное; кромѣ того, какъ было сказано въ § 28 главы I, въ послѣднее время выяснилось, что это число, обозначаемое всегда буквой e, есть трансцендентное число. Болѣе точный способъ вычисленія этого числа даетъ для него выраженіе

$$e=2{,}718281828459\ .\ .\ .$$

§ 28. Покажемъ теперь, что предѣлъ выраженія

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

остается числомъ e, какое бы ни было число n, цѣлое или дробное, положительное или отрицательное, лишь бы абсолютная его величина безпредѣльно возрастала.

Итакъ, предположимъ сначала, что n есть безпредѣльно возрастающая положительная величина, проходящая черезъ значенія какъ цѣлыя, такъ и дробныя. Если n число дробное, то оно заключается между двумя послѣдовательными цѣлыми числами m и $m+1$, такъ что

$$m<n<m+1; \tag{2}$$

неравенство $n<m+1$ показываетъ, что съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ числа n цѣлое число m также возрастаетъ. На основаніи неравенствъ (2) будетъ

$$1+\frac{1}{m}>1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{m+1},$$

отсюда подавно

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}.$$

Но

$$lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.\ lim\left(1+\frac{1}{m}\right)=e.1=e,$$

$$lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}=\frac{lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)}=\frac{e}{1}=e,$$

слѣдовательно, перемѣнная

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

заключающаяся между двумя перемѣнными, имѣющими одинъ и тотъ же предѣлъ e, должна имѣть тотъ же предѣлъ, т. е.

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Остается показать теперь, что предѣлъ перемѣнной (1) будетъ e при n отрицательномъ, возрастающемъ по абсолютной величинѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $n=-\nu$, гдѣ $\nu>0$; мы получимъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu}=\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}.\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right).$$

Выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}$$

имѣетъ предѣломъ e, потому что $\nu-1$ безпредѣльно возрастающее положительное число, а

$$lim\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)=1,$$

слѣдовательно

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Если мы обозначимъ черезъ α дробь $\frac{1}{n}$, то при возрастаніи абсолютной величины n до безконечности величина α будетъ приближаться къ нулю, и мы можемъ резюмировать все вышесказанное формулой

$$\lim_{\alpha=0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

причемъ предѣлъ не зависитъ отъ закона, по которому мы приближаемъ α къ нулю.

§ 29. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію предѣла

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

гдѣ x произвольное положительное или отрицательное вещественное число, а n безпредѣльно возрастающее цѣлое число. Обозначимъ $\frac{x}{n}=\alpha$, тогда

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x,$$

отсюда, приближая къ предѣлу, получимъ

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\lim_{\alpha=0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x=e^x.$$

Получаемъ слѣдующую весьма важную теорему, состоящую въ томъ, что трансцендентная величина e^x выражается, какъ предѣлъ алгебраической формулы

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

О предѣлахъ чиселъ комплексныхъ.

§ 30. Будемъ разсматривать перемѣнную x, принимающую комплексныя частныя значенія. Понятіе о предѣлѣ комплексной перемѣнной установимъ совершено такъ же, какъ это было сдѣлано въ § 15 для вещественной перемѣнной. Вся разница будетъ состоять только въ томъ, что вмѣсто словъ *абсолютное значеніе* вещественнаго числа будемъ употреблять слово *модуль* комплекснаго числа. Очевидно, что такимъ образомъ всѣ соображенія о предѣлахъ дѣйствительныхъ чиселъ будутъ частными случаями соображеній о предѣлахъ чиселъ комплексныхъ.

Новобрачные (мужчины и женщины) сгруппированные по возрасту.

Возрастъ новобрачныхъ.	1841—1850.		1856—1865 *).		Отношеніе мужчинъ къ женщинамъ
	Мужч.	Женщ.	Мужч.	Женщ.	
21 годъ и ниже. . .	6,751	25,684	10,319	45,404	0,23
21—25 лѣтъ.	48,974	77.566	67,727	100.578	0,67
25—30 „	97,149	86.250	115.831	97 786	1,18
30—35 „	60.964	47.108	72.751	54,431	1,34
35—40 „	34,022	25.557	40.877	29.363	1,39
40—45 „	19.643	14.296	22.696	16.163	1,41
45—50 „ . . .	10,603	7.511	12.934	8.400	1,53
50—55 „	5.401	3.353	7.481	3,905	1,92
55 60 „	2,896	1.390	4.568	1.713	2,67
60—65 „	1,797	605	2.355	778	3,03
65—70 „	942	288	950	278	3,42
70—75 „	380	105	311	86	3,62
75—80 „	119	16	81	13	6,23
выше 80 „	35	2	16	1	16,00
Всего . . .	289.676		358.899		

Прежде всего замѣчается то, что оба десятилѣтніе періода согласно показываютъ, что наибольшее число браковъ для мужчинъ заключается между 25 и 30 годами. Этотъ періодъ даетъ maximum, вслѣдъ за которымъ число браковъ послѣдовательно уменьшалось до послѣдняго предѣла жизни; уменьшеніе даже довольно быстрое.

Для женщинъ maximum наступаетъ нѣсколько раньше; его можно установить приблизительно около 25 лѣтняго возраста; такимъ образомъ, мужчины вступаютъ въ бракъ двумя или тремя годами раньше женщинъ. Уменьшеніе числа женщинъ, вступающихъ въ бракъ позже этого возраста, выражено такъ-же какъ и для мужчинъ

---

*) Данныя отъ 1851 до 1855 года были приведены вкратцѣ въ введеніи къ „Documents statistiques“, (I-ый т. in 4⁰, 11 стр.), опубликованнымъ въ 1857 г министромъ внутреннихъ дѣлъ; данныя за слѣдующій десятилѣтній періодъ, отъ 1856 до 1865 года также появились въ книгахъ того-же сборника, публиковавшагося ежегодно.

Новобрачные (мужчины и женщины) сгруппированные по возрасту.

Возрастъ новобрачныхъ.	1851 до 1855	1856 до 1860	1861 до 1865	1851 до 1855	1856 до 1860	1861 до 1865
21 годъ и ниже. . .	16.350	29.670	26.053	530	822	730
21--25 лѣтъ. . .	63.233	83.625	84.680	2 048	2,316	2.373
25—30 „	100,860	125.080	108.587	3,267	2,911	3,042
30—35 „	59.542	65,757	61.427	1.929	1,821	1.722
35—40 „	31.950	35.509	34.731	1.035	983	973
40—45 „	17.456	19.423	19.436	565	538	545
45—50 „	9.737	10,892	10.442	315	302	293
50—55 „	5 219	5.693	5,693	170	158	160
55—60 "	2,475	3.200	3,081	80	89	86
60 65 "	1,135	1.420	1 713	37	39	48
65—70 "	497	527	701	16	15	20
70—75 „	190	176	221	6	5	6
75—80 "	56	36	58	2	1	2
больше 80 лѣтъ. . .	12	8	9	0	0	0
Всего . . .	308.712	361.016	356.782	10.000	10.000	10.000

и даже еще болѣе рѣзко. Столбцы напечатанной выше таблицы легко показываютъ это.

Такимъ образомъ, до 25 лѣтъ вообще вступаетъ въ бракъ меньше мужчинъ, чѣмъ женщинъ: около этого времени число вступающихъ въ бракъ почти одинаково, затѣмъ число мужчинъ превосходитъ число женщинъ, возрастая до конца жизни, когда этотъ перевѣсъ становится даже довольно значительнымъ. Несмотря на столь незначительную величину населенія, какъ Бельгійское, число новобрачныхъ каждаго возраста опредѣляется достаточно вѣрно, даже въ теченіе одного пятилѣтія, для котораго легко установить вліяніе возраста на вступающихъ въ бракъ. Ясно также, что между 60 и 75 годами число мужчинъ, вступающихъ въ бракъ, превосходитъ больше чѣмъ въ три раза число женщинъ, а послѣ этого времени это число еще больше увеличивается *).

---

*) Этотъ законъ, касающійся возраста, когда вступаютъ въ бракъ, заслуживаетъ вниманія, такъ какъ онъ представляетъ обстоятельство,

Уменьшеніе числа вступающихъ въ бракъ мужчинъ и женщинъ, происходитъ чрезвычайно правильно, начиная съ максимальнаго пункта. Въ общемъ, линія, отличающая сперва увеличеніе, а затѣмъ уменьшеніе числа индивидуумовъ обоего пола, вступающихъ въ бракъ, доказываетъ самой своей правильностью, что здѣсь существуетъ вполнѣ опредѣленный законъ (см. сл. таблицу).

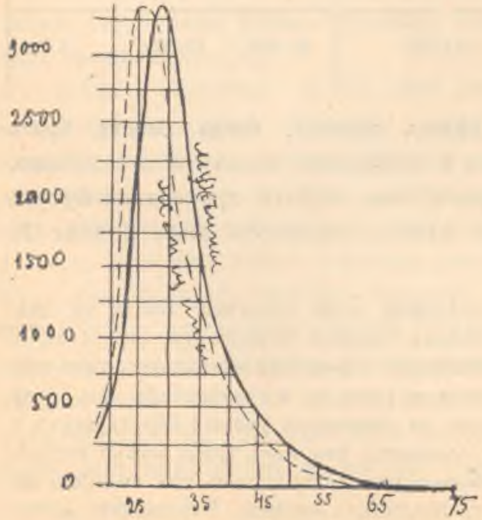
Возрастъ.	Браки сгруппированные по возр. 1841—55.		Брачная таблица приведенная къ 10.000.		
	Мужч.	Женщ.	Мужч.	Женщ.	Отношеніе
21 годъ и ниже. . .	9.710	39.075	219	880	0,25
21—25 лѣтъ.	75.145	116.628	1.647	2.626	0,63
25—30 „	150.355	153.904	3.386	3.016	1,12
30—35 „	94.141	73.473	2.120	1.655	1,28
35—40 „	52.431	39.098	1.181	880	1,34
40—45 „	29.729	21.666	669	488	1,37
45—50 „	16.394	11.457	369	258	1,42
50—55 „	8.821	5.152	199	116	1,71
55—60 „	4,645	2.116	105	48	2,19
60—65 „	2.605	932	59	21	2,79
65—70 „	1.312	360	30	8,1	3,64
70—75 „	533	142	11	3,2	3,75
75—80 „	167	24	4	0,6	6,96
80 и выше	44	5	1	0,1	8,80
Всего	444.032		10.000	10.000	1,00

Труднѣе становится дѣлать выводы, когда хотятъ брать каждый полъ въ отдѣльности и сравнивать абсолютныя величины. Посмотримъ сперва, что будетъ, если періоды времени не будутъ тѣ-же: дѣйствительно, 1-ый классъ включаетъ лишь моложе 21

вполнѣ якобы зависящее отъ свободной воли человѣка. Когда въ дѣйствительности разсматривать только годовой періодъ (см. стр. 142), то узнаемъ, что религіозныя и соціальныя учрежденія оставляютъ такъ сказать отпечатокъ и играютъ главную роль; но если упустимъ изъ виду эти учрежденія и годовой періодъ, то физическія условія берутъ верхъ и отражаются самымъ рѣзкимъ образомъ; это безъ труда можно видѣть, построивъ общую кривую, показывающую число браковъ для *каждаго возраста*, какъ это и показываетъ послѣдняя таблица. Невозможно достаточно надивиться этой поразительной правильности измѣненій кривой, въ то время какъ въ *годовой* кривой брачности наблюдается обратное.

года; второй—отъ 21 до 25 лѣтъ. третій—отъ 25 до 30 лѣтъ и т. д. Эти періоды почти не допускаютъ точныхъ сравненій, потому что, кромѣ того что они неодинаковой длины, они не представляютъ одинаковой возможности брака, такъ какъ уже до 21 года болѣе или менѣе значительное число индивидуумовъ вступило въ бракъ. Въ началѣ 25-го года, число вступающихъ въ бракъ также значительно увеличилось, по крайней мѣрѣ въ Бельгіи, вслѣдствіе нѣкоторыхъ перемѣнъ въ законодательствѣ о возрастѣ милиціонеровъ. Понятно стало быть, что невозможно точно сравнивать лицъ разныхъ классовъ и предполагать, чти они находятся въ одинаковыхъ условіяхъ въ отношеніи ихъ предрасположенія къ браку.

Въ спеціальной таблицѣ, названной нами *брачной таблицей*, мы вычислили время, когда заключаются браки. Изъ данныхъ пятнадцатилѣтнихъ наблюденій видно, что числа мало измѣнялись. Какъ мы уже сказали, изъ нихъ слѣдуетъ, что больше всего браковъ заключается для мужчинъ между 25 и 30 годами и до 25-тилѣтняго возраста для женщинъ. Еще лучше можно будетъ судить о времени вступленія въ бракъ, бросивъ взглядъ на слѣдующую фигуру, отмѣчающую прогрессивное расположеніе къ вступленію въ бракъ того и другого пола, въ зависимости отъ возраста



Фиг. 9.

Для того, чтобы сдѣлать болѣе удобопонятнымъ законъ брачности, относительно возраста, мы считали нужнымъ изслѣдовать одновременно браки 5 группъ, какъ это сдѣлано въ слѣдующей таблицѣ. Впрочемъ, этотъ законъ такъ ясенъ, что достаточно было-бы данныхъ за одинъ годъ, чтобы сдѣлать его очевиднымъ: это легко увидѣть изъ слѣдующей таблицы, резюмирующей данныя, собранныя по пятилѣтіямъ *). Числовыя отношенія отличаются величайшимъ постоянствомъ; мы должны тутъ-же повторить, что это постоянство сохраняется только до тѣхъ поръ, пока не измѣняются государственные законы и мѣстныя условія. Измѣнить ихъ не можетъ человѣческая воля, если только эта воля не исходитъ отъ высшей власти, которая можетъ измѣнять общія условія, напр., измѣненіемъ военныхъ законовъ. Такъ, когда въ Бельгіи подверглись набору 19-лѣтніе, вмѣсто 18-лѣтнихъ, эта перемѣна проявилась въ числѣ браковъ милиціонеровъ этого возраста.

Такъ какъ мы разсматриваемъ здѣсь спеціально математическіе законы, наблюдаемые въ отношеніи числа браковъ, то было-бы интересно установить другой выводъ, который мы въ состояніи были такъ-же точно изучать въ другое время, хотя-бы статистическія данныя были менѣе полны и менѣе вѣрны, чѣмъ въ настоящее время: таковъ тотъ выводъ, который относится къ гражданскому положенію и возрасту супруговъ въ моментъ ихъ вступленія въ бракъ. „Казалось“, говорили мы 20 лѣтъ тому назадъ **), „что существуютъ какія-то законодательныя распоряженія, допускающія только извѣстное число браковъ для разныхъ возрастовъ,—такая правильность царитъ въ этомъ отношеніи. Такъ, между 25 и 30 годами насчитываютъ наибольшее число браковъ въ городахъ. Въ теченіе пяти лѣтъ отъ 1841 до 1845 ***) ихъ число для мужчинъ было: 2.681, 2.655, 2.516, 2.698 и 2.698; а для женщинъ: 2.119, 2.012, 1.981, 2.120 и 2.133. Надо сознаться, что если-бы эти числа были заранѣе установлены, то не пришлось бы слишкомъ жаловаться на нарушенія этого правила. То-же относится къ другимъ возрастамъ; между данными существуетъ аналогичное сходство“.

Интересно было-бы узнать, что произошло съ тѣхъ поръ, и рѣшить, представляютъ-ли новыя данныя нѣкоторое сходство съ

---

*) Мы ограничимся здѣсь числами 5 періодовъ по 5 лѣтъ каждый, такъ какъ годовыя числа для 25-лѣтняго періода были уже даны въ отдѣльности во многихъ нашихъ работахъ, каковы „Memoire sur l'influence du libre arbitre de l'homme“, III-й т. Bulletin de la Commission centrale de statistique, 1847 г., стр. 143 и сл. въ VIII т. 457 стр.

**) „*Du système social et des lois qui le regissent*“. 1 т. in 8⁰. Paris, Guillaumin, 1848, 67 и сл. стр.

***) Числа приведены въ примѣчаніяхъ цитированной выше работы: „Du système social et des lois qui le regissent“, 314 стр.

прежними результатами; это можно увидѣть изъ слѣдующихъ таблицъ, содержащихъ на ряду съ числами отъ 1854 до 1865, г. прежнія данныя отъ 1841 г. до 1850, въ общей таблицѣ для Бельгіи.

Общая таблица браковъ по возрастамъ въ Бельгіи отъ 1841 до 1865 г.

Возрастъ мужа.	Возрастъ жены.	Вступл. въ бракъ на 10.000.					Общая средняя.
		1841— —1845	1846 —1850	1851— 1855	1856— —1860	1861— —1865	
30 лѣтъ и ниже	30 лѣтъ и ниже.	4.377	4.544	4.304	4.583	4.711	4.504
	30—45 лѣтъ . .	857	766	862	763	685	787
	45—60 „ . .	39	32	37	32	27	33
	60 и больше .	2	1	2	1	1	1
30—45 лѣтъ .	30 лѣтъ и ниже.	2.011	2.002	2.021	1.981	2.009	2.005
	30—45 лѣтъ . .	1.800	1.696	1.796	1.693	1.613	1.719
	45 60 „ . .	177	153	172	143	148	159
	60 и больше .	6	6	6	6	6	6
45—60 „ .	30 лѣтъ и ниже.	124	141	149	143	132	138
	30—45 лѣтъ . .	317	370	371	374	365	360
	45—60 „ . .	155	177	178	179	173	172
	60 и больше .	9	13	12	12	14	12
60 лѣтъ и >	30 лѣтъ и ниже.	14	13	12	12	14	13
	30—45 лѣтъ . .	46	37	34	34	43	39
	45—60 „ . .	49	37	32	34	45	39
	60 и больше .	17	12	12	10	14	13
	Всего .	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

Такого рода данныя начинаютъ собирать въ нѣкоторыхъ странахъ; мы приведемъ тѣ, которыя собраны въ Пруссіи, благодаря стараніямъ доктора Энгеля, въ теченіе 1859—1861 годовъ: они напечатаны на 318 стр. „Statistique internationale“, population, 4-аго тома, появившемся въ 1865 году, въ Брюсселѣ. Желательно было-бы, чтобы такого рода изслѣдованія могли развиваться и дальше. (См. табл. на 151 стр.)

Ясно, что относительно возраста, браки заключаются въ Бельгіи почти, какъ и въ Пруссіи. Только три четверти браковъ заключаются до 45 лѣтъ для мужчинъ и до 30 лѣтъ для женщинъ. Число такихъ-же браковъ до того-же возраста въ Бельгіи

Возрастъ мужа.	Возрастъ жены.	Среднія за 1859—61.	Среднія, приведенныя къ 10.000.	
			Пруссія.	Бельгія.
45 лѣтъ и ниже	30 лѣтъ и ниже	338.261	7,527	6 509
	30—45 лѣтъ . .	79.337	1.765	2.506
	45 и больше .	4.859	108	199
45—60 лѣтъ .	30 лѣтъ и ниже.	6.330	141	138
	30—45 лѣтъ . .	11.722	261	360
	45 и больше . .	4.955	110	184
60 л. и больше	30 лѣтъ и ниже.	543	12	13
	30—45 лѣтъ .	1.442	32	39
	45 и больше . .	1.959	44	52
	Всего .	449.408	10,000	10,000

меньше; послѣ этого возраста оно больше, а затѣмъ оно почти равно каждому числу для Пруссіи.

Приводя самыя раннія бельгійскія данныя, отъ 1841 до 1845 года, самыя раннія, какія только извѣстны для этой эпохи, и говоря о будущихъ данныхъ, мы не побоялись сказать слѣдующее: „Вѣроятность будетъ меньше для 1847 г. и будетъ уменьшаться по мѣрѣ того, какъ мы будемъ распространять наши данныя. Понятно, что повтореніе однихъ и тѣхъ-же слѣдствій зависитъ отъ существованія одинаковыхъ причинъ, а чѣмъ больше мы удаляемся отъ настоящаго момента, тѣмъ сильнѣе измѣняются соціальныя отношенія и тѣмъ больше измѣняются обстоятельства, вліяющія на брачность“ *). Мы живемъ въ такую эпоху, когда соціальныя измѣненія, какъ и внутренняя жизнь людей, испытываютъ величайшія колебанія; однако мы видимъ, что́ происходитъ съ однимъ изъ явленій, наиболѣе какъ будто-бы зависящимъ отъ свободной воли человѣка; мы находимъ даже большую правильность, чѣмъ въ порядкѣ земныхъ явленій и въ физическихъ явленіяхъ, гдѣ свободная воля человѣка не оказываетъ никакого вліянія. Тогда-же въ другой работѣ я писалъ слѣдующее (что мнѣ остается только повторить съ такимъ-же убѣжденіемъ, послѣ 25-лѣтняго изу-

---

*) Въ работѣ: „Du système social et des lois. qui le regissent“, 76 и сл. стр. in 8⁰, Paris, chez Guillaumin.

ченія этого важнаго вопроса): „Поистинѣ, мы не знаемъ другого, болѣе любопытнаго и вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе поучительнаго статистическаго документа, чѣмъ представленный выше. Видя почти неизмѣнное повтореніе однихъ и тѣхъ-же чиселъ изъ года въ годъ, нельзя подумать, что подобныя размѣщенія—дѣло случая; въ этомъ кроется нѣчто таинственное, смущающее нашъ умъ. Безъ сомнѣнія, молодого человѣка, моложе 30 лѣтъ, женившагося на женщинѣ, которой больше 60 лѣтъ, не понуждала къ этому браку ни судьба ни слѣпая страсть; онъ лучше всякаго другого въ состояніи былъ разсуждать и проявить свою свободную волю во всей ея полнотѣ; однако, онъ уплачиваетъ свою дань этому бюджету, опредѣляющемуся обычаями и потребностью нашего соціальнаго организма; и здѣсь, опять таки, этотъ бюджетъ уплачивался съ бóльшей правильностью, чѣмъ тотъ, который уплачивается государственной казнѣ“ *). Любопытно видѣть, какъ человѣкъ, гордо называющій себя *Царемъ природы* и полагающій, что всѣмъ управляетъ его свободная воля, подчиняется, не вѣдая того, строже всякаго другого живого созданія, извѣстнымъ законамъ. Эти законы такъ мудро установлены, что они даже ускользаютъ отъ его вниманія.

Глава 5-я.

О ВЛІЯНІИ ЕСТЕСТВЕННЫХЪ ПРИЧИНЪ НА СМЕРТНОСТЬ.

I. Вліяніе мѣстности.

Относительно рождаемости мы обладаемъ меньшимъ количествомъ данныхъ, чѣмъ о смертности, такъ какъ человѣкъ, безъ сомнѣнія, меньше интересуется тѣмъ, какъ онъ вступилъ въ жизнь, чѣмъ тѣмъ, какъ онъ можетъ разстаться съ нею. То, что относится къ законамъ рождаемости, кажется ему только любопытнымъ, знаніе же того, какъ велики его шансы на жизнь и смерть, имѣетъ для него большее значеніе. Однако, при изслѣдованіяхъ о смертности слѣдуетъ поступать съ величайшей осторожностью и

---

*) „De l'influence du libre arbitre de l'homme sur les faits sociaux etc“, Bulletin de la Commission centrale de statistique, т. III, 143 стр. in 4⁰, 1847.

не придавать одинаковаго значенія всѣмъ числамъ, какія только удастся собрать, какъ это дѣлали очень многіе авторы.

Вообще смертность опредѣляется отношеніемъ числа смертныхъ случаевъ къ количеству населенія. Но если трудно установить при помощи записей какой-нибудь страны точное число смертныхъ случаевъ, то еще труднѣе точно опредѣлить число индивидуумовъ, составляющихъ населеніе. Перепись—чрезвычайно трудная операція, которую можно производить только отъ времени до времени и которая даетъ довольно различные результаты, въ зависимости отъ того, насколько внимательно ее производятъ и какъ относятся къ своимъ обязанностямъ выполняющіе ее регистраторы. Въ тѣхъ странахъ, напримѣръ, гдѣ населеніе можетъ быть заинтересовано въ уклоненіи отъ переписи, счисленіе населенія будетъ, естественно, слишкомъ слабо и, вслѣдствіе этого, вычисленіе смертности выйдетъ преувеличеннымъ: слѣдовательно, надо быть очень осторожнымъ, сравнивая одну страну съ другой или одну и ту же страну въ разныя эпохи.

Прежде всего должно, кажется, привлечь наше вниманіе то вліяніе, которое оказываетъ на смертность человѣческаго рода различіе климата. Климатологія, понимаемая въ самомъ широкомъ смыслѣ,—еще слишкомъ мало развитая наука, и намъ не приходится здѣсь заниматься ею *); если бы мы и захотѣли изучать внѣевропейскія страны или даже европейскія, гдѣ политическія науки еще мало развиты, то намъ недостало бы данныхъ, особенно такихъ, которыя можно сравнивать. Мы не въ состояніи были-бы оцѣнить съ извѣстной степенью точности сравнительное дѣйствіе болѣе или менѣе высокой температуры въ ея соотношеніи съ влажностью и континентальностью, съ направленіемъ вѣтровъ, направленіемъ рѣкъ и т. д.

Поэтому мы должны будемъ при первомъ обзорѣ отвлечься отъ этихъ послѣднихъ обстоятельствъ и заняться только самыми главными выводами.

Если мы изучимъ на первыхъ порахъ только Европу и раздѣлимъ эту часть свѣта только на три области, чтобы исключить,

---

*) Относительно Англіи см. изслѣдованія г. I. Clarck'a: *„L'Influence du climat sur les maladies chroniques"* (Annals d'Hygiène, апрѣль 1830). См. также *„Philosophie de la statistique"* Melchior Gioja, 2 t. in. 4^{o}, 1826 г.

Въ концѣ этой главы мы попытаемся показать успѣхи статистики въ теченіе истекшей трети вѣка.

поскольку возможно, вліяніе случайныхъ причинъ, то мы получим первыя данныя для рѣшенія занимающей насъ проблемы. Слѣдуетъ также брать только данныя послѣднихъ лѣтъ, чтобы получить болѣе сравнимыя числа.

Страны.	Періоды.	1 смертный случай на:	Авторы.
Сѣв. Европа.			
Швеція и Норвегія	1820	41,1	Маршалъ.
Данія	1819	45,0	Моро де Жонесъ, *).
Россія	Около 1829	27,0	Сэръ Д'Иверного **).
Англія	1821—1831	51,0	Porter и Rickmann.
Центр Европа.			
Пруссія	1816—1823	36,2	Babbage.
Польша	1829	44,0	Моро де Жонесъ.
Германія	1825—1828	45,0	„
Бельгія	1825—1829	43,1	*Annuaire de l'observ. de Bruxelles.*
Франція	1817—1831	39,7	*Annuaire du Bureau des Longit.*
Голландія . . .	1815—1825	38,0	*Rech. statistiq. sur les Pays-Bas.*
Австр. Имперія .	1828	40,0	Моро де Жонесъ.
Швейцарія . . .	1827—1828	40,0	„
Южная Европа.			
Португалія . . .	1815—1819	40,0	„
Испанія	1801—1826	40,0	„
Италія	1822—1828	30,0	„
Греція	1828	30,0	„
Евр. Турція . .	1828	30,0	„
Корол. Обѣихъ Сицилій	1822—1824	32,0	Bisset Hawkins.

Такъ какъ многіе изъ упомянутыхъ авторовъ ограничивалис приведеніемъ отношеній, не указывая чиселъ, изъ которыхъ он были выведены, то я вынужденъ брать здѣсь среднія однихъ отношеній, а не самыхъ чиселъ, что было-бы точнѣе. Я полагаю

---

*) Числа Моро де Жонеса взяты изъ замѣтки" *sur la mortalit dans les différentes contrées de l'Europe*". Надо жалѣть о томъ, что автор не указалъ источника, какимъ онъ пользовался.

**) *Bibliothèque universelle*, октябрь 1833 г., 154 стр.

однако, что мало уклонюсь отъ истины, если выражу смертность слѣдующими числами:

	1 смертный случай на:
Въ сѣверной Европѣ . . .	41,1 жителя
„ централ. „ .	40,8 „
„ южной „ . . .	33,7 „

Каково бы ни было недовѣріе, которое должны внушать числа, относящіяся къ смертности и собранныя 30 лѣтъ тому назадъ, мнѣ кажется, можно допустить, что смертность въ южной Европѣ больше, чѣмъ въ сѣверной или центральной, не высказывая впрочемъ никакихъ предположеній относительно причины этого различія, кроется ли она въ политическихъ учрежденіяхъ или въ особенности климата. Англія особенно даетъ перевѣсъ въ пользу сѣверной Европы; если не считаться съ показателемъ ея смертности, то центральная Европа дала бы наименьшую смертность.

Если мы выйдемъ теперь за предѣлы Европы и разсмотримъ наиболѣе близкія къ экватору мѣста, отличающіяся крайними температурами *), то согласно Моро де Жонесу получимъ:

Широта	Мѣстность	1 смерт. сл. на:
6°10′	Батавія	26 жителей
10°10′	Тринидадъ	27 „
13°54′	Св. Луція	27 „
14°44′	Мартиника	28 „
15°59′	Гваделупа	27 „
18°36′	Бомбей	20 „
23°11′	Гаванна	33 „

Эта послѣдняя таблица доказываетъ, кажется, что съ приближеніемъ къ экватору смертность возрастаетъ. Однако эти числа должно брать съ недовѣріемъ, такъ какъ среди названныхъ мѣстъ есть нѣсколько городовъ, а смертность въ городахъ, какъ мы увидимъ ниже, вообще больше, чѣмъ въ деревняхъ. Впрочемъ, мы обладаемъ еще очень немногими точными данными для мѣстъ близкихъ къ экватору. Согласно г. Thomas'у смертность бѣлыхъ на островѣ Бурбона равна только 1 на 44,8; а согласно доку-

---

*) Въ Исландіи, отъ 1825 до 1831 года, насчитывали 1 смертный случай на 30 жителей; это показываетъ, что сильный холодъ такъ-же вреденъ для человѣка, какъ и жара. „*Bibliothèque universelle*", окт. 1833 года, 177 стр.

ментамъ, опубликованнымъ въ Англіи въ 1826 году, по постановленію палаты общинъ, смертность на мысѣ Доброй Надежды была еще меньше *).

Среди мѣстныхъ причинъ, оказывающихъ вліяніе на большее или меньшее число смертныхъ случаевъ, я уже имѣлъ случай указать на проживаніе въ городѣ и деревнѣ: это вліяніе довольно ясно. Вотъ, напримѣръ, данныя за время, предшествовавшее 1833 году:

	Населеніе	Среднее чис. смер. сл.	1 см. случай на
Города	998.118	27,026	36,9 жит.
Деревни	3,066,091	65,265	46.9 „

Изъ этого видно, что коэффиціентъ смертности былъ почти 37—и—47. Эта разница будетъ особенно чувствительна, если мы изслѣдуемъ смертность въ главныхъ европейскихъ городахъ. (См. табл. на 157 стр.)

Сравнивая эту таблицу съ предыдущей, легко замѣтить, что смертность въ городахъ вообще гораздо больше смертности тѣхъ странъ, въ которыхъ они находятся. Я думаю, что этотъ фактъ вполнѣ достаточно установленъ, для того чтобы можно было довѣриться ему, несмотря на неточности, связанныя съ такого рода вычисленіями.

Что же касается даже предыдущей таблицы, относящейся къ смертности и рождаемости, то данныя столь различны, что почти невозможно прійти къ вполнѣ опредѣленному заключенію. Ниже мы сможемъ лучше рѣшить вопросъ о томъ, насколько наука развилась и на сколько эти отношенія покоятся на солидномъ базисѣ.

Если разсматривать каждую страну въ отдѣльности, то можно найти огромнѣйшія различія, въ зависимости отъ мѣстности. Такъ, во Франціи департаментъ Орны даетъ ежегодно 1 смертный случай на 32,4 жителя, а департаментъ Финистерры — 1 случай на 30,4,—разница значительная для такихъ близкихъ мѣстностей. Въ древнемъ Нидерландскомъ королевствѣ въ теченіе десятилѣтія съ 1815 по 1824 годъ, область Зеландія насчитывала 1 смертный случай на 28,5 жителей, а область Намуръ—только на 21,8 жителей. Замѣчательно, что большая смертность почти всегда сопро-

---

*) Elements of medical statistics, 51 стр.

Города	Жителей на 1 смертный случай по:		Жителей на 1 рожденіе по:	
	Czoernig'y.	Bisset-Hawkins'y.	Czoernig'y.	Bisset-Hawkins'y.
Сѣв. Европа.				
Лондонъ	51,9	40,0	40,8	29,5 *).
Глазговъ	„	46,8	-	27,7
С.-Петербургъ . . .	34,9	37	46,7	„
Москва	33,0	„	28,5	„
Копенгагенъ . .	30,8	„	30,0	„
Стокгольмъ	24,3	24,9	27,0	24,8
Центр. Европа.				
Ліонъ	32,3	32,0	27,5	„
Амстердамъ	31,0	24,0	26,0	„
Парижъ	30,6	32,5	27,0	„
Бордо	29,0	„	24,0	„
Гамбургъ	30,0	„	25,5	„
Дрезденъ	27,7	„	23,0	„
Брюссель	25,5	26,0	21,0	„
Берлинъ	25,0	34,0	21,0	„
Прага	24,5	24,4	23,8	„
Вѣна	22,5	22,5	20,0	„
Южная Европа.				
Мадридъ	36,0	35,0	26,0	„
Ливорно	35,0	31,0	25,5	„
Палермо	38,0	„	24,0	„
Лиссабонъ	31,1	28,2	28,3	52,5
Неаполь	29,0	52,0	24,0	25,0
Барселона	27,0	24,8	27,0	„
Римъ	24,1	„	31,0	23,6
Венеція	19,4	„	26,5	„
Бергамо	18,0	„	20,0	30,2

---

*) „*Topographisch-Historische Beschreibung von Reichenberg*". См. Bulletin des sciences géographiques, апрѣль 1833 г. Вотъ годовое число рожденій и смертныхъ случаевъ, какъ и средняго населенія Лондона, Миддльсекса, Сюррея и Кента по Фарру въ его превосходномъ трудѣ „*Statistique de l. Angleterre de l'Ecosse et de l'Irlande*", напечатанномъ въ Statistique internationale *(poputation)*, изданной въ Брюсселѣ при сотрудничествѣ оффиціальныхъ статистиковъ разныхъ европейскихъ государствъ и Америк. Соед. Штатовъ, г-дъ Кетле и Гейшлинга (см, 6 и 23 стр. этого сборника). Въ среднемъ находятъ для 1841—1850 г.

	Рожденій	Смерт. случ.	Среднее нас.	Жителей на	
				1 см,сл.	1рож.
Лондонъ . . .	67.379	52.910	2 155.326	40,7	32,0

вождается большой плодовитостью. Въ названныхъ, напримѣръ, мѣстностяхъ приходилось:

Страны.	Жителей.		
	На 1 рожд.	На 1 бракъ.	На 1 см. сл.
Департаментъ Орны	44,8	147,5	52,4
„ Финистерры . .	26,0	113,9	30,4
Провинція Намуръ	30,1	141,0	51,8
„ Зеландія	21,9	113,2	28,5

Такимъ образомъ, Зеландія и департаментъ Финистерры давали много браковъ, рожденій и смертныхъ случаевъ, между тѣмъ какъ въ департаментѣ Орны и провинціи Намуръ наблюдалось противоположное. Сознаюсь, я часто пытался объяснить столь большія несходства ошибочнымъ опредѣленіемъ величины населенія; однако болѣе внимательныя изслѣдованія заставили меня повѣрить, что это положеніе вещей связано съ мѣстными причинами. Въ провинціи Зеландіи, напримѣръ, всецѣло окруженной влажной атмосферой, распространена лихорадка и другія болѣзни, вызывающія отмѣченную нами крайнюю смертность; затѣмъ, населеніе, непрерывно стремящееся къ уровню своихъ средствъ существованія, даетъ излишекъ рожденій и браковъ. Явленіе, наблюдаемое нами въ этихъ провинціяхъ—можетъ быть замѣчено и въ другихъ странахъ, гдѣ на ряду съ большей смертностью наблюдается большая плодовитость и наоборотъ. Англія и республика Гуанахуато въ Мексикѣ даютъ поразительные примѣры; такъ насчитываютъ:

Государства.	Жителей на:		
	1 бракъ.	1 рожденіе.	1 см. случ.
Въ Англіи	134,00	35,00	58,00
Въ Гуанахуато *).	69,76	16,08	19,70

---

*) По г. D'Ivernois *(Bibliothèque universelle de Genève*, 1833 г.)

Это такъ сказать, двѣ крайнихъ границы въ лѣстницѣ населенія, и можно-бы прибавить, можетъ быть, въ лѣстницѣ цивилизаціи.

Можно сказать, что страна тогда переходитъ къ лучшему состоянію, когда она даетъ жизнь меньшему количеству гражданъ, но лучше сохраняетъ ихъ. Приростъ населенія для нея безусловно выгоденъ; ибо, если плодовитость тамъ меньше, то полезныхъ людей будетъ больше, а поколѣнія возобновляются не такъ быстро, въ ущербъ націи.

Въ теченіе первыхъ лѣтъ жизни человѣкъ живетъ на счетъ общества; онъ становится его должникомъ, и долженъ въ будущемъ уплатить этотъ долгъ; а если онъ умираетъ, не успѣвши сдѣлать этого, то его существованіе становится скорѣе бременемъ для его согражданъ, чѣмъ благомъ. Желательно знать, во что это обходится?

Возьмемъ самыя низкія цѣны: я нахожу, что отъ рожденія до 12—16-лѣтняго возраста всѣ расходы на содержаніе одного ребенка въ пріютахъ Нидерландскаго королевства доходили въ 1821 году, въ среднемъ, до 1,100 франковъ приблизительно; пусть даже только 1.000 франковъ, и эта сумма конечно не преувеличена, даже для Франціи. Всякій человѣкъ, вышедшій изъ дѣтскаго возраста, является стало быть нѣкотораго рода должникомъ, долгъ котораго равенъ по меньшей мѣрѣ 1.000 франковъ, суммѣ, уплачиваемой обществомъ за содержаніе ребенка, ввѣреннаго его благотворительности. И вотъ, во Франціи ежегодно родится больше 960.000 дѣтей, изъ которыхъ $^9/_{20}$ умираетъ раньше, чѣмъ они стали полезными; эти 432.000 несчастныхъ могутъ быть разсматриваемы какъ такое-же количество иностранцевъ, пришедшихъ безъ состоянія и занятій принять участіе въ потребленіи и затѣмъ уйти, не оставивъ никакихъ слѣдовъ своего прихода, кромѣ печальнаго „прости“ и вѣчныхъ сожалѣній.

Расходы, вызванные этимъ, не считая времени, посвященнаго имъ, представляютъ колоссальную сумму въ 432 милліона франковъ, minimum! Если разсмотрѣть, съ другой стороны, горе причиняемое подобными потерями, горе, которое нельзя возмѣстить никакой другой жертвой, то станетъ ясно, насколько этотъ вопросъ стóитъ размышленій государственнаго человѣка и философа, истиннаго друга ближнихъ. Мы будемъ неустанно повторять, что благосостояніе государствъ не въ увеличеніи населенія, а скорѣе въ сохраненіи составляющихъ его индивидуумовъ.

Нѣсколько примѣровъ показали уже намъ, что большая смертность вообще встрѣчается наряду съ большой плодовитостью Это утвержденіе кажется на первыхъ порахъ противорѣчащимъ наблюденіямъ Сэдлера; но не слѣдуетъ смѣшивать брачной плодовитости съ плодовитостью населенія; это привело-бы къ тяжкимъ ошибкамъ; я даже показалъ, что при прочихъ равныхъ условіяхъ, большая смертность должна повлечь за собой меньшую брачную плодовитость, такъ какъ учащаются браки, заключаемые во второй и третій разъ, и продолжительность браковъ вообще уменьшается.

Для изученія занимающаго насъ вопроса, надо сравнивать абсолютное число рожденій и смертныхъ случаевъ съ количествомъ населенія.

Вотъ нѣкоторые результаты, которые я беру для разныхъ уже названныхъ странъ, располагая ихъ по величинѣ смертности *).

Государства.	Жителей.			
	на 1 смерт. случ.		на 1 рожденіе.	
Англія	51,0	51,0	35	35,0
Швеція	47,0	45,0	27	28,5
Бельгія	43,1		30	
Франція	39,7	36,5	31,6	26,5
Голландія	38,0		27,0	
Пруссія	36,2		23,3	
Обѣ Сициліи	32,0		24,0	
Гуанахуато	19.7	19,7	16,1	16,1

---

*) Вообще слѣдуетъ остерегаться еще и теперь существующей во многихъ странахъ неосвѣдомленности относительно истинной величины населенія: предположимъ, напримѣръ, что въ области Гуанахуато величина населенія плохо опредѣлена и указана только половина его истинной величины, а при этомъ для исчисленія взято истинное число рожденій и смертныхъ случаевъ; тогда, какъ мы указали выше, насчитывали-бы 39,4 жителей на 1 смертный случай и 32,2 жителя на 1 рожденіе, почти такъ-же, какъ въ то-же время было и во Франціи, Бельгіи, Голландіи и даже Швеціи. Ясно, въ какія ошибки можно впасть, принимая плохо установленную величину населенія.

Я сожалѣю о томъ, что современное состояніе статистики (1835) не позволяетъ мнѣ привести наблюденій для большаго числа странъ. Я думаю однако, что приводимыя мною данныя показываютъ, что существуетъ довольно тѣсное отношеніе между смертностью и плодовитостью. Какъ я указалъ выше, такое-же отношеніе существуетъ между разными провинціями одной и той же страны.

Располагая города по величинамъ смертности, получимъ по приведеннымъ выше среднимъ числамъ, (кромѣ С.-Петербурга, относительно котораго очевидно произошла ошибка) слѣдующее:

Города.	Жителей.			
	на 1 смертн. сл.		на 1 рожденіе.	
Лондонъ	46,0	46,4	40,8	35,2
Глазговъ	46,8		29,5	
Мадридъ	36,0	32,3	26,0	27,0
Ливорно	35,0		25,5	
Москва	33,0		28,5	
Ліонъ	32,2		27,5	
Палермо	32,0		24,5	
Парижъ	31,4		27,0	
Лиссабонъ	31,1		28,3	
Копенгагенъ	30,3		30,0	
Гамбургъ	30,0		25,5	
Барселона	29,5	26,6	27,0	24,2
Берлинъ	29,0		21,0	
Бордо	29,0		24,0	
Неаполь	28,6		23,8	
Дрезденъ	27,7		23,0	
Амстердамъ	27,5		26,0	
Брюссель	25,8		21,0	
Стокгольмъ	24,6		27,0	
Прага	24,5		23,3	
Римъ	24,4		30,6	
Вѣна	22,5		20,0	
Венеція	19,4	18,7	26,5	23,2
Бергамо	18,0		20,0	

Всѣ приведенныя сейчасъ числа показываютъ стало быть, что существуетъ прямая связь между интенсивностью смертности и плодовитости или, другими словами,—число рожденій регулируется числомъ смертныхъ случаевъ *) Это вполнѣ подтверждаетъ мнѣнія

---

*) Предыдущее было написано въ 1835 году, но санитарное состояніе съ тѣхъ поръ очевидно улучшилось, какъ мы это увидимъ ниже.

экономистовъ, признающихъ, что населеніе всегда стремится къ извѣстному уровню, опредѣляемому количествомъ потребляемыхъ продуктовъ. Такимъ образомъ, въ тѣхъ мѣстностяхъ, гдѣ существуютъ частныя причины большей смертности, тамъ и поколѣнія болѣе коротки и быстрѣе смѣняются.

Можно было замѣтить, что въ странахъ, которыя мы сравнивали, число смертныхъ случаевъ меньше числа рожденій; то-же самое мы видимъ и въ городахъ, кромѣ Рима, Венеціи и Бергамо. Легко также замѣтить, что эти числа тѣмъ болѣе стремятся къ равенству, чѣмъ больше смертность, исключая Англіи и ея городовъ; въ самомъ дѣлѣ:

	Отношеніе рожденій къ смертн. случ.
въ Англіи	1,46
„ Швеціи и Бельгіи	1,58
„ Франціи, Голландіи, Пруссіи и обѣихъ Сициліяхъ	1,37
„ области Гуанахуато	1,23
„ городахъ, насчитывающихъ 40 жит. на 1 см. сл.	1,15
„ „ „ отъ 30 до 40 „ „ „ . . .	1,20
„ „ „ „ 20 „ 30 „ „ „ . . .	1,10
„ „ „ меньше 20 „ „ „ . . .	0,81

Изучая вліяніе мѣстности въ менѣе широкомъ масштабѣ и сравнивая разныя части одной и той-же области, довольно часто находятъ несхожіе результаты; такъ, смотря по тому, равнина ли данная страна или гориста, покрыта лѣсомъ или болотами, числа, представляющія смертность, могутъ различаться очень замѣтно. Босси привелъ въ своей *„Statistique du départament de l' Ain“* поразительный примѣръ такого рода; онъ имѣлъ въ виду лучше изучить это вліяніе мѣстностей, раздѣливъ округъ на четыре части, и получилъ согласно даннымъ 1802, 1803 и 1804 года слѣдующіе результаты:

	1 годов. см. случ. на	1 годов. бракъ на	1 годовое рожден. на
Въ горныхъ общинахъ	38,3 жит.	179 жит.	34,8 жит.
„ приморскихъ „	26,6 „	145 „	28,8 „
На равнинахъ, засѣян. хлѣбомъ	24,6 „	135 „	27,5 „

	1 годов. см.	1 бракъ.	1 рожденіе.
Въ озерныхъ и болотистыхъ странахъ . .	20,8 „	107 „	26,1 „

Эти замѣчательные результаты даютъ новое подтвержденіе того, что было сказано относительно прямого соотношенія, существующаго вообще между смертностью, брачностью и рождаемостью. Въ то же время ясно, насколько гибельна близость болотъ и стоячихъ водъ. Виллермэ приводитъ очень поразительный примѣръ вліянія болотъ.

„Въ Варэджіо, говоритъ этотъ ученый,*) въ Лукскомъ княжествѣ жителей незначительное количество; живя въ плачевной нищетѣ и варварствѣ, они ежегодно съ незапамятныхъ временъ и всегда въ одно и тоже время страдали отъ перемежающихся лихорадокъ; но въ 1741 году построили шлюзы для стока болотной воды въ море и задержанія притока морскихъ водъ во время прилива и бурь. Это сооруженіе, непрерывно уничтожавшее окончательно болота, истребило и лихорадку. Брэфъ, округъ въ Варэджіо, представляетъ въ настоящее время самый здоровый, промышленный и богатый край Тосканы; многія семейства, невѣжественные предки которыхъ погибли, не сумѣвъ защитить себя отъ эпидемій (*aria cattiva*), отличаются такимъ здоровьемъ, силой, долговѣчностью и нравственнымъ характеромъ, какого прежде никогда не знали“. Подобныя же эпидеміи распространены были періодически и на берегахъ Шельды; тамъ назывались они болотной лихорадкой (fievres des polders), эта лихорадка является слѣдствіемъ сильныхъ жаровъ и привела къ тому, что Зеландія находится въ положеніи близкомъ къ положенію Варэджіо и другихъ „болотистыхъ“ странъ, какъ назвалъ ихъ Босси.

Виллермэ указалъ мнѣ новый примѣръ увеличенія смертности, вызваннаго вліяніемъ болотъ **). Такъ, на островѣ E'ly, въ Англіи, въ теченіе періода отъ 1813 до 1830 года включительно, на 10.000 смертныхъ случаевъ отъ рожденія до самаго поздняго возраста, насчитывали 4.731 случай на возрастъ до 10 лѣтъ; между тѣмъ какъ во всѣхъ другихъ земледѣльческихъ округахъ королевства вмѣстѣ насчитывали только 3,505. На томъ же островѣ Ely заре-

---

*) *Des épidémies (Annales d'Hygiène*, январь, 1833 г. стр. 9).

**) См. письмо Виллермэ, напечатанное въ *Bulletin de l'Académie de Bruxelles*, № 23, за іюнь 1834 г.

гистрировали 3.712 случаевъ отъ 10 до 48 лѣтъ на 1000 случаевъ отъ 10 лѣтъ до глубокой старости; и только 3.142 въ другихъ земледѣльческихъ областяхъ, но не болотистыхъ, какъ островъ Е'Іу.

Виллермэ написалъ также интересный мемуаръ о смертности въ Парижѣ и большихъ городахъ: *) главные выводы этого труда показываютъ, что богатство, достатокъ и нищета являются при современномъ положеніи вещей и для жителей разныхъ округовъ Парижа главными причинами, которыми слѣдуетъ объяснить наблюдаемыя крупныя различія въ смертности. Отдаленность же и близость Сены, характеръ почвы, склонъ ея на востокъ или западъ, высоты, ограничивающія Парижъ съ сѣвера и юга, особенное положеніе нѣкоторыхъ кварталовъ, различная вода, которой пользуются, и всѣ обстоятельства, могущія въ общемъ измѣнить нѣкоторымъ образомъ климатъ города въ какой нибудь его части, не вызываютъ замѣтныхъ различій. Чтобы сдѣлать эти выводы болѣе очевидными, я приведу въ одной таблицѣ главные выводы Виллермэ; числа относятся къ періоду, отъ 1822 до 1826 года. Насколько цѣннѣе были бы всѣ эти числа, если-бы ихъ величины внушали полное довѣріе!

Части **).	Жителей на 1 смертный случай въ данномъ домѣ.	Поверхность, занимаемая постройками.	Поверхность занимаемая 1 человѣкомъ въ домахъ.	Квартиры не обложенныя налогомъ ***). См примѣчаніе.	Средняя стоимость квартиръ.	Квартиры обложенныя:	
						одним̆ъ личнымъ налогомъ	торговой пошлиной больше 30 франковъ.
			Mét.		fr.		
2-ая .	71	0,75	26	0,11	605	0,40	0,47
3-ая .	67	0,55	15	0,07	426	0,38	0,44
1-ая .	66	0,57	65	0,11	498	0,49	0,35
5-ая .	64	0,46	19	0,22	226	0,28	0,36
4-ая .	62	0,59	7	0,15	328	0,23	0,49
11-ая .	61	0,55	22	0,19	258	0,39	0,32
7-ая .	59	0,82	11	0,22	217	0,29	0,35
6-ая .	58	0,62	13	0,21	242	0,20	0,45
9-ая .	50	0,60	16	0,31	172	0,26	0,30
10-ая .	49	0,53	46	0,23	285	0,46	0,24
8-ая .	46	0,46	47	0,32	173	0,25	0,31
12-ая .	44	0,64	37	0,38	148	0,19	0,29

---

*) *Annales d'Higiène,* іюль 1830 г.

**) 2-я часть охватываетъ слѣдующіе кварталы: Chaussée d'Antin,

2. Вліяніе пола.

Вліяніе пола крайне рѣзко проявляется во всемъ, относящемся къ смертности; оно уже даетъ себя знать даже, раньше чѣмъ ребенокъ родится. Въ теченіе 4 лѣтъ (1827 по 1830 годъ), насчитывали въ Западной Фландріи 2.597 мертворожденныхъ, изъ которыхъ 1517 было мужскаго пола, а 1080—женскаго; это даетъ отношеніе 3 : 2 приблизительно. Это—значительная разница, и такъ какъ она повторяется въ таблицахъ ежегодно, то ее должно приписать специальной причинѣ.

Впрочемъ смерть предпочтительно поражаетъ дѣтей мужескаго пола, не только до рожденія, но почти также въ теченіе 10—12 мѣсяцевъ, слѣдующихъ за нимъ, т. е. почти все время кормленія грудью, какъ это видно изъ слѣдующихъ данныхъ, относящихся къ *Западной Фландріи.* (См. табл. на 166 стр.)

Слѣдовательно, несомнѣнно, *существуетъ особая причина, поражающая преимущественно дѣтей мужеского пола до ихъ рожденія и непосредственно вслѣдъ за нимъ.* Дѣйствія ея таковы, что отношеніе смертности до рожденія равно 3 : 2; въ теченіе первыхъ двухъ слѣдующихъ мѣсяцевъ приблизительно 4 : 3, въ теченіе 3-го, 4-го и 5-го мѣсяцевъ—5 : 4; а послѣ 8-го или 10-го мѣсяца разница почти ничтожна.

Неравенство числа смертныхъ случаевъ для дѣтей обоего пола, въ моментъ рожденія и въ близкое къ нему время—замѣ-

---

Palais-Royal, Feydeau и предмѣстье Montmartre; 3-яя Montmartre, предмѣстье Poissonnière, Saint Eustache et Mail; 1-ая—Roule, Champs-Elysées, place Vendôme et Tuileries; 4-ая Saint-Honoré, Louvre, Marchés et Banque; 5-ая предмѣстье Saint-Denis, porte Saint-Martin, Bonne-Nouvelle et Montorgueil; 11-ая—Luxembourg, Ecole de Médecine, Sorbonne et Palais de Justice; 7-ая Sainte-Avoie, Mont-de-Piété, Marché Saint-Jean et Arcis; 6-ая—porte Saint-Denis, Saint-Martin-des-Champs, Lombards et Temple; 9-ая Ile Saint-Louis, Hôtel-de-Ville, Cité et Arsenal; 10-ая—Monnaie, Saint-Thomas d'Aquin, Invalides и предмѣстье Saint-Germain; 8-ая—Saint-Antoine, Quinze-Vingts, Marais et Popincourt; 12-ая—Jardin-du-Roi, Saint-Marcel, Saint-Jacques et Observatoire.

***) Всѣ помѣщенія каждой городской части, или участка (arrondissements) приведены къ величинѣ 100 такъ, чтобы можно было видѣть, сколько изъ общаго числа такихъ, которые не платятъ никакого налога сколько платящихъ одну подушную подать и сколько платящихъ патентный сборъ. Квартиры необложенныя принадлежатъ бѣднякамъ.

Возрастъ (Фландрія зап.).	Города.		Отношеніе.	Деревни.		Отношеніе.
	Мальч.	Дѣвоч.		Мальч.	Дѣвоч.	
0-1 мѣс.	3.717	2.786	1,33	8,180	5.769	1,42
1—2 „	930	682	1,36	2,012	1.699	1,25
2—3 „	607	500	1,21	1 480	1.161	1,27
3-4 „	532	382	1,39	1.192	984	1,22
4—5 „	403	322	1,25	968	774	1,25
5—6 „	346	329	1,05	831	707	1,18
6-8 „	569	508	1,12	1.331	1.117	1,20
8—12 „	1.148	1.030	1,11	2 505	2.453	1,02
1—2 года	2.563	2.409	1,06	4.994	4 920	1,02
2—3 „	1.383	1.387	1,03	2.927	2.879	1,02
3—4 „	908	908	1,00	1.606	1.748	0,92
4—5 „	556	583	0,96	1.200	1.184	0,99

чательный фактъ въ естественной исторіи человѣка и заслужи ваетъ вниманія физіологовъ. Невозможно объяснить это перевѣ сомъ мужскихъ рожденій надъ женскими, такъ какъ отношені этихъ послѣднихъ едва равно отношенію 20 къ 19; это отношені могло, самое большее, служить объясненіемъ разницы въ смерт ности для возрастовъ болѣе старшихъ, чѣмъ первый годъ.

Вліяніе пола проявляется болѣе или менѣе любопытно въ разные возрасты; представленіе объ этомъ можно себѣ составит по слѣдующей таблицѣ, составленной по даннымъ, собранным въ *разныхъ провинціяхъ Бельгіи*. (См. табл. на 167 стр).

Эта таблица показываетъ отношеніе между смертными слу чаями среди обоихъ половъ для каждаго возраста, безотносительн къ населенію. Числа для деревни могутъ разсматриваться, как вѣрно изображающія величину относительной смертности, так какъ въ деревняхъ число индивидуумовъ обоего пола одинаковаг возраста почти одинаково, чего не наблюдается въ городахъ, п крайней мѣрѣ для стариковъ. Отношеніе для городовъ (принима во вниманіе населеніе) въ общемъ очень велико для старших возрастовъ; оно представляетъ такую же измѣнчивость въ увели ченіи и уменьшеніи, какъ и отношеніе, вычисленное для деревень

Итакъ, приблизительно въ моментъ рожденія и близкое врем послѣ него умираетъ больше мужчинъ чѣмъ женщинъ; окол двухъ лѣтъ смертность обоихъ половъ становится почти одина ковой; для женщинъ она увеличивается затѣмъ и становится очен

Возрасты въ Бельгіи.	Мужскихъ смертныхъ случаевъ на 1 женскій.	
	Города.	Деревни.
Мертворожденные	1,33	1,70
Отъ 0 до 1 мѣсяца	1,33	1,37
„ 1 „ 2 „	1,37	1,20
„ 2 „ 3 „	1,22	1,21
„ 3 „ 6 „	1,24	1,16
„ 6 „ 12 „	1,06	1,03
„ 1 „ 2 года	1,06	0,97
„ 2 „ 5 „	1,00	0,94
„ 5 до 14 „	0,90	0,93
„ 14 „ 18 лѣтъ	0,82	0,75
„ 18 „ 21 „	0,98	0,92
„ 21 „ 26 „	1,24	1,11
„ 26 „ 30 „	1,00	0,86
„ 30 „ 40 „	0,88	0.63
„ 40 „ 50 „	1,02	0,83
„ 50 „ 60 „	1,07	1,18
„ 60 „ 70 „	0,96	1,05
„ 70 „ 80 „	0,77	1,00
„ 80 „ 100 „	0,68	0,92

замѣтной между 14 и 18 годами, т. е. послѣ періода годового развитія; между 21 и 26 годами, т. е. въ періодъ самыхъ бурныхъ страстей, смертность мужчины превосходитъ смертность женщины: отъ 26 до 30 лѣтъ, время вступленія въ бракъ, смертность почти одинакова для обоихъ половъ, но она очень значительна среди женщинъ въ теченіе всего времени, когда онѣ способны къ дѣторожденію; когда онѣ перестаютъ рожать, эта смертность уменьшается; затѣмъ оба пола вымираютъ въ пропорціи, соотвѣтствующей той, въ которой смерть оставляла ихъ въ живыхъ.

Большая смертность деревенскихъ женщинъ въ теченіе періода плодовитости можетъ быть связана съ характеромъ тяжелыхъ работъ, которыя онѣ выполняютъ тогда, когда необходима величайшая осторожность. Напротивъ того, эти-же работы, благодаря своей регулярности, далеко не такъ губительны для мужчинъ. Вообще же развратъ и легкость, съ которой мужчины въ городѣ предаются страстямъ, становятся очень гибельными для мужчинъ, живущихъ въ городахъ.

3. Вліяніе возраста.

Изъ всѣхъ причинъ, измѣняющихъ смертность человѣка, нѣтъ ни одной, которая оказывала-бы большее вліяніе чѣмъ возрастъ. Это вліяніе всѣмъ извѣстно, и его оцѣнка является одной изъ первыхъ задачъ, которыми занималось вычисленіе вѣроятностей со времени своего появленія *). Первая таблица смертности появилась въ 1693 году; мы ею обязаны англійскому астроному Галлею, который построилъ ее на основаніи данныхъ города Бреславля. Подобныя таблицы составлялись съ тѣхъ поръ для главныхъ европейскихъ странъ; однако среди нихъ мало такихъ, въ которыхъ проведено различіе половъ. Общества страхованія продолжаютъ основывать свои вычисленія на той гипотезѣ, будто смертность обѣихъ половъ одинакова **).

Для того, чтобы изучить общую смертность, разсматривали общество въ цѣломъ, не заботясь о раздѣленіи членовъ, составляющихъ его и не интересуясь ихъ относительнымъ положеніемъ. Проблема эта бралась во всей ея цѣлости, какъ и слѣдуетъ поступать, когда хотятъ изучить въ общемъ какое-нибудь тѣло и сравнить его съ другими соціальными тѣлами.

Однако смертность извѣстныхъ частей общества заслуживаетъ особаго вниманія; такъ напримѣръ, военное сословіе, зажиточные классы, рабочій классъ и т. д. Эти отдѣльныя изслѣдованія могутъ привести къ выводамъ, представляющимъ огромный интересъ; но они меньше отвѣчаютъ цѣли, которую мы поставили себѣ въ этой работѣ: они не допускаютъ сравненія народовъ между собою и не позволяютъ судить о представляемыхъ ими различіяхъ. Они составляютъ задачу обществъ страхованія, основывающихъ свои расчеты на спеціальныхъ таблицахъ, указывающихъ болѣе быстрое или болѣе медленное вымираніе населенія, смотря по принятымъ

---

*) Первыя статистическія понятія восходятъ къ отдаленнымъ временамъ: доказательство мы встрѣчаемъ даже въ Библіи, гдѣ можно найти подробности о величинѣ еврейскаго населенія и о способѣ производства переписей.

**) Немного спустя послѣ появленія этой работы, г. Демонферранъ опубликовалъ въ 1838 году очень обширныя таблицы смертности, различая полъ и принимая во вниманіе опасности, которымъ подвергаются главные классы общества.

способамъ страхованія. Однимъ словомъ, тамъ точностью таблицъ интересуются меньше, чѣмъ барышами общества, вычисляющаго ихъ.

Подобныя спеціальныя таблицы представляютъ иногда огромныя различія между собою; между тѣмъ общія таблицы разныхъ странъ отличаются, какъ мы увидимъ ниже, меньшими неравенствами, особенно послѣ первыхъ лѣтъ дѣтства.

Пользу такихъ таблицъ понимали; но часто оставляли въ сторонѣ математическую часть, которая должна была служить имъ опорой и обезпечивать самые барыши. Въ частности останавливали вниманіе на томъ, что слѣдуетъ называть административной статистикой, медицинской статистикой, коммерческой, финансовой и т. д.; и теряли даже изъ виду принципы, на которые должно опираться; большинство новыхъ статистиковъ, не посчитавшись со всѣми трудностями, представляемыми этой новой наукой, иногда производятъ неточныя вычисленія и приходятъ къ несогласнымъ результатамъ.

Лапласъ и Фурье, два выдающихся ума Франціи, написали въ послѣднее время спеціальныя работы по этой удивительной отрасли новой науки; въ Германіи, знаменитый Гаусъ занималъ не менѣе выдающееся мѣсто въ развитіи этой науки: теорія вѣроятностей, служившая истинной основой изслѣдованій этого рода, особенно усиленно занимала эти великіе умы.

Числа, относящіяся къ смертности, значительно измѣняются, особенно въ періодъ, недалекій отъ времени рожденія. Разница этихъ чиселъ такъ велика, что многіе опытные статистики полагали, что нужно начинать таблицы населенія только съ 4—5-лѣтняго возраста. Результаты, добытые къ этому времени, дѣйствительно необыкновенно расходятся, вслѣдствіе-ли недостатка въ необходимомъ уходѣ за раннимъ дѣтствомъ, вслѣдствіе-ли нерадивости родителей или вслѣдствіе мѣстныхъ трудностей, встрѣчающихся при точномъ опредѣленіи смертности раннихъ возрастовъ.

Я остановился на разборѣ этой стороны предмета въ своей статьѣ „*Tables de mortalité*“ въ „Dictionnaire d'économie politique“ Франціи *). Я старался указать на значительную разницу, встрѣчающуюся тамъ, особенно въ раннемъ дѣтствѣ, смотря по тому,

---

*) „*Dictionnaire de l'économie politique*“ статья Tables de mortalité, т. II-ой, 700 и сл. стр. in 8⁰, Paris, Guillaumin et c⁰, 1853.

соединяютъ-ли всѣ классы общества, дѣлятъ-ли ихъ по профессіямъ, степени зажиточности, по поламъ и странамъ.

Интересно провѣрить мнѣніе, высказанное извѣстнымъ Гауссомъ по тому-же вопросу: въ немъ мы находимъ человѣка, привыкшаго къ точности и находящаго вѣрные пункты отправленія въ своихъ изслѣдованіяхъ. Особенно интересно видѣть, какъ онъ изслѣдуетъ числа, полученныя въ Бельгіи, гдѣ, какъ онъ справедливо полагаетъ, они собраны со всей желательной тщательностью. Съ нимъ можно согласиться во всемъ, относящемся къ рождаемости, брачности и смертности: немногія государства, думаю я, обладаютъ такими точными и полными данными, благодаря своему незначительному пространству.

Познакомимся съ нѣкоторыми его выводами. „Я позволилъ себѣ въ своемъ письмѣ къ тайному совѣтнику Коллэну высказать нѣкоторыя мнѣнія, а именно, что смертность дѣтей въ ранніе годы можетъ быть раздѣлена на болѣе короткіе періоды. Побудило меня высказать это мнѣніе—сдѣланное мною уже давно замѣчаніе, что данныя А. Кэтлэ (таблица въ его Annuaire 1844 г., 193 стр. и 1846 г. 185 стр.) могутъ опредѣлить ее для первыхъ шести мѣсяцевъ формулой, съ почти чудесной точностью. Я прибавилъ въ письмѣ другое предположеніе, которое я могъ-бы измѣнить нѣсколько, такъ какъ я не знаю точно, на какихъ фактахъ основываются данныя автора. Окончивъ письмо и запечатавши его, я нашелъ въ сочиненіи Кэтлэ „Sur l'homme etc." на 144 стр. нѣмецкаго перевода Рикэ числа, относящіяся къ западной Фландріи, которыя кажется и служили основой цифръ въ „Annuaire". Я не хотѣлъ однако раскрывать и измѣнять свое письмо *).

„Вамъ интересно будетъ можетъ быть посмотрѣть на эту формулу, если я приведу ее здѣсь. Послѣдній членъ представленъ для первыхъ шести мѣсяцевъ выраженіемъ

$$10{,}000 - A\sqrt[3]{n},$$

(гдѣ $\lg A = 3{,}98273$, а n представляетъ число мѣсяцевъ); она составлена съ такой точностью, какая не встрѣчается въ обыкновенныхъ таблицахъ смертности. Затѣмъ, отъ 1 до 4 лѣтъ эта

---

*) Briefwechsel zwischen C.-F Gauss und H. C. Schumacher.—Correspondance de Gauss et Schumacher, publiée par C.-A.-F. Peters, 5 т. 325 стр. in 3^0, 1863, Altona.

формула даетъ числа, превышающія табличныя числа; наоборотъ, послѣ 5 лѣтъ—меньшія. Я объяснилъ-бы большую точность для первыхъ 6-ти мѣсяцевъ, въ томъ случаѣ если-бы она встрѣчалась и въ другихъ странахъ (конечно при другихъ постоянныхъ) тѣмъ, что въ теченіе этого періода наблюдается сравнительно меньшая запутанность причинъ смерти; затѣмъ перевѣсъ числа смертныхъ случаевъ, вычисленныхъ по формулѣ надъ дѣйствительнымъ числомъ смертныхъ случаевъ объясняется появленіемъ новыхъ причинъ смертности, дѣтскихъ болѣзней, начинающихъ проявляться только во второмъ полугодіи. Наконецъ, отклоненія въ противоположную сторону, отъ 5 лѣтъ, кажутся мнѣ просто доказательствомъ того, что эта формула не представляетъ естественнаго закона, а только сильно приближается къ этому закону, при небольшихъ значеніяхъ n.

„Впрочемъ, замѣчу, что Мозеръ далъ формулу подобную вышеприведенной, но вмѣсто кубическаго корня поставилъ корень четвертой степени. Тогда можно безъ сомнѣнія получить достаточную точность для болѣе длиннаго ряда лѣтъ, но прекрасное совпаденіе для перваго полугодія теряется“.

Эти соображенія, высказанныя однимъ изъ величайшихъ математиковъ нашего времени, доказываютъ въ достаточной мѣрѣ, что составленіе таблицъ смертности не такъ легко, какъ это думаютъ вообще люди. Мы опубликуемъ здѣсь общую таблицу смертности, какъ намъ дала ее общая перепись всей Бельгіи *).

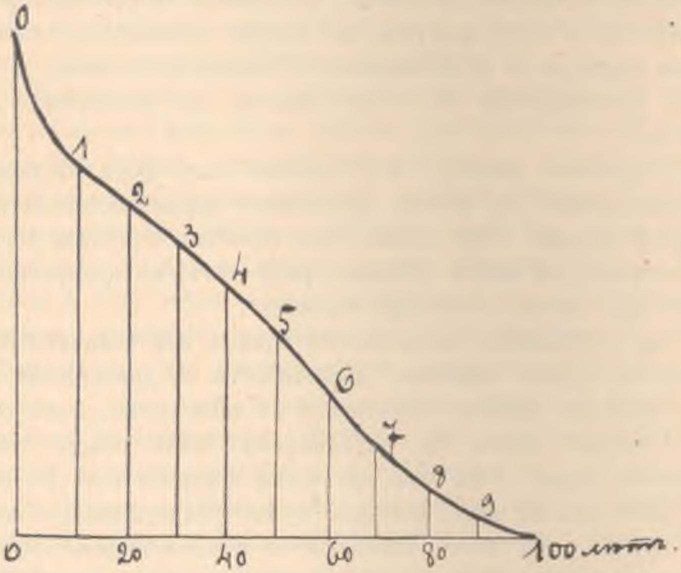
Единственный путь, котораго нужно придерживаться въ данномъ случаѣ, это взять населеніе въ самомъ широкомъ смыслѣ при какой бы то ни было численности: это—надежный путь для повѣрки, хотя можетъ быть и нѣсколько длинный; онъ состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить дѣйствительную смертность для каждаго возраста, сравнивая число смертныхъ случаевъ съ количествомъ индивидуумовъ каждаго возраста по переписи; этотъ

---

*) Первая таблица для 1846 года была составлена на основаніи данныхъ бельгійской переписи того-же года; ее мы и приводимъ здѣсь. Она была представлена 5 дек. 1851 года центральной королевской статистической коммиссіи (см. 19 стр. V т., *Bulletin*'а этой коммиссіи). Вторая таблица—по даннымъ переписи 1856 г. была напечатана въ VIII т. того-же Bulletin. Она послужила только для повѣрки таблицы 1846 года, которая была вычислена со всей необходимой въ подобныхъ случаяхъ тщательностью.

методъ, принятый нами, защитилъ насъ отъ вякихъ предразсудковъ; простое вычисленіе показало намъ затѣмъ, что отношеніе между числомъ, полученнымъ непосредственно переписью для каждаго возраста, и числомъ смертныхъ случаевъ по возрастамъ же позволяетъ предположить, что населеніе ежегодно возрастаетъ приблизительно какъ геометрическая прогрессія, по крайней мѣрѣ въ настоящій моментъ.

Ниже мы приводимъ таблицу смертности для Бельгіи, предпосылая ей чертежъ, показывающій движеніе чиселъ.



Фиг. 10.

Теперь мы выведемъ изъ этой таблицы смертности (стр. 174) продолжительность *вѣроятной жизни* въ главные періоды жизни *). Вмѣстѣ съ тѣмъ мы укажемъ продолжительность вѣроятной жизни

---

*) S. Lacroix въ своемъ „Traité élémentaire des probabilités (3-ье изд. 196 стр., Paris. 1833 г.), какъ и всѣ математики, опредѣлилъ вѣроятную продолжительность жизни слѣдующимъ образомъ: „Ищутъ также, говоритъ онъ, какова продолжительность *вѣроятной жизни* въ опредѣленномъ возрастѣ; подъ этой продолжительностью понимаютъ число лѣтъ, послѣ которыхъ вѣроятность существованія такова-же, какъ и вѣроятность несуществованія, и слѣдовательно равна ½. Очевидно, это имѣетъ мѣсто

для Англіи по Фарру *) для Швеціи по Бергу, для Нидерландовъ по Баумгауэру, и для Баваріи по Герману.

Эти самыя новыя таблицы были напечатаны въ Брюсселѣ въ появившемся въ 1865 году томѣ „*Statistique internationale*“. Собирая данныя, представленныя намъ нашими коллегами по общему статистическому конгрессу, мы были далеки отъ того, чтобы предполагать, что они сходны съ найденными нами впослѣдствіи результатами. Сперва мы были смущены явнымъ несходствомъ чиселъ, но, приведя ихъ къ общему основанію, мы были удивлены ихъ сходствомъ. Вся Европа, какъ это можно видѣть изъ слѣдующихъ таблицъ, слѣдуетъ почти одному и тому-же закону смертности, а незначительныя различія, которыя можно найти между результатами, начиная съ юности, связаны съ частными благопріятными условіями, представляемыми извѣстнымъ достаткомъ и вообще болѣе правильнымъ образомъ жизни. Никакія другія изслѣдованія не даютъ такого удовлетворенія, какъ попытка провѣрить по даннымъ таблицамъ населенія таблицы вѣроятности жизни въ разные возрасты. При этомъ изслѣдованіи дѣйствительно подмѣчаются для каждаго возраста опредѣленные шансы на жизнь, разумѣется, если не принимать во вниманіе осложняющихъ вліяній.

Я полагаю, что нѣтъ надобности напоминать способъ построенія этихъ таблицъ: онъ указанъ впрочемъ въ примѣчаніи на

тогда, когда число лицъ возраста, о которомъ идетъ рѣчь, сократилось на половину“. Для сравненія мы предпочтемъ выраженію средней жизни— выраженіе *вѣроятной жизни*, такъ какъ вычисленіе ея безконечно легче и можетъ быть произведено просто на глазъ.

*) Въ послѣднее время появилась довольно обширная работа относительно таблицъ смертности, заслуживающая во всѣхъ отношеніяхъ вниманія друзей науки: „*English life tables* или *Tables of lifetimes annuities and premiums, with an introduction*“, опубликованная отъ имени государства Вильямомъ Фарромъ, членомъ королевскаго общества и т. д. 605 стр. съ введеніемъ въ 155 стр. Обширность этого труда объясняется той тщательностью, съ какой написалъ его ученый авторъ, для того, чтобы освободить отъ вычисленій, пользующихся имъ; таблицы страхованія также даютъ всѣ возможные варьянты, т. е. при наличности разныхъ интересовъ и разныхъ возрастовъ, предполагая страхованіе одного или обоихъ супруговъ и принимая во вниманіе всѣ возможныя между ними различія возраста

Таблица смертности для Бельгіи.

Возрастъ.	1846.			Возрастъ.	1846.		
	Муж. и жен.	Мужч.	Женщ.		Муж. и жен.	Мужч.	Женщ.
0	1,000	1,000	1,000	51	432	427	437
1	850	836	864	52	424	420	428
2	788	775	801	53	415	412	419
3	758	746	770	54	406	403	410
4	759	727	750	55	397	394	401
5	725	714	735	56	387	384	391
6	716	706	726	57	377	373	382
7	707	698	716	58	367	362	373
8	700	691	708	59	356	349	363
9	694	686	702	60	345	336	354
10	689	681	696	61	334	323	345
11	683	675	690	62	322	309	336
12	678	670	686	63	310	294	326
13	675	665	680	64	297	279	315
14	668	660	675	65	284	264	304
15	663	655	670	66	271	249	293
16	657	649	664	67	258	234	281
17	652	644	659	68	244	220	268
18	647	639	653	69	230	207	253
19	641	634	647	70	216	195	237
20	635	630	640	71	201	182	220
21	629	625	633	72	186	168	203
22	623	620	625	73	170	154	186
23	616	614	618	74	154	140	169
24	610	608	611	75	139	126	152
25	604	602	605	76	125	113	137
26	597	596	599	77	112	101	123
27	591	589	594	78	99	89	109
28	585	582	589	79	87	78	96
29	579	575	583	80	75	68	83
30	573	568	578	81	65	58	72
31	567	561	572	82	55	49	61
32	561	555	566	83	46	41	51
33	555	548	562	84	38	34	43
34	549	542	556	85	31	27	36
35	543	536	550	86	25	21	29
36	537	530	543	87	20	17	24
37	530	522	538	88	16	13	19
38	524	514	534	89	12	10	15
39	518	508	528	90	9	7	11
40	511	502	520	91	7	5	8
41	504	496	512	92	5	4	6
42	497	489	505	93	4	3	5
43	490	482	498	94	3	»	»
44	483	475	491	95	2	»	»
45	476	468	484	96	1,3	»	»
46	469	461	477	97	0,9	»	»
47	462	454	470	98	0,5	»	»
48	455	447	462	99	0,3	»	»
49	448	441	454	100	0,1	»	»
50	440	434	446	—	—	—	—

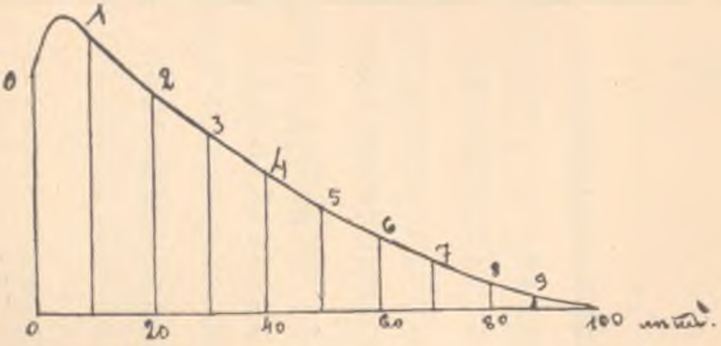
предыдущей страницѣ; я ограничусь выводомъ продолжительности вѣроятной жизни для обоихъ половъ взятыхъ вмѣстѣ. Этихъ выводовъ будетъ, я надѣюсь, достаточно для поставленной мною цѣли.

Продолжительность вѣроятной жизни обоихъ половъ.

Возрастъ.	Швеція. Berg.	Англія. Farr.	Бельгія. Кэтлэ.	Нидерланды Baumhauer.	Баварія. De Hermann.	Общая средняя.
Рожденіе .	51	45	42	34	27	40
5 лѣтъ .	56	55	53	53	53	54
10 „ . .	53	51	50	50	50	51
15 „ . .	48	47	46	46	45	46
20 „ . .	43	43	43	42	41	42
25 „ . .	39	39	39	38	38	39
30 „ . .	35	35	35	34	34	35
35 „ . .	31	31	31	30	29	31
40 „ . .	27	27	27	26	26	27
45 „ . .	23	23	23	23	22	23
50 „ . .	19	20	20	19	18	19
55 „ . .	16	17	16	16	15	16
60 „ . .	13	13	13	12	12	18
65 „ . .	10	10	10	9	9	10
70 „ . .	7	8	7	7	7	7
75 „ . .	5	6	5	5	5	5
80 „ . .	4	4	4	3	4	4

Значительныя различія замѣчаются относительно смертности въ моментъ рожденія: причины этихъ различій были найдены уже давно; онѣ зависятъ въ особенности отъ многочисленныхъ улучшеній относительно заявленій о новорожденныхъ во время самой переписи. Въ пятилѣтнемъ возрастѣ смертность очень мало разнится въ разныхъ странахъ; она представляетъ двѣ крайности: 1 — 56 въ Швеціи и другую — 53 въ Бельгіи, въ Нидерландахъ и Баваріи; эти два наибольшія уклоненія очень незначительны и еще больше уменьшаются для слѣдующихъ возрастовъ. Измѣнчивость показателей для возрастовъ близкихъ къ раннему дѣтству въ достаточной мѣрѣ указываетъ на то, что общество обязано проявить особую заботливость для сохраненія жизни будущихъ своихъ членовъ.

Въ пятилѣтнемъ возрастѣ, человѣкъ достигаетъ *maximum'a* вѣроятной жизни, которая равна въ среднемъ 54 годамъ, т. е. если ему удастся прожить еще 50 лѣтъ, то у него будутъ такіе-же шансы на жизнь, какъ и на смерть послѣ 54-лѣтняго возраста. Послѣдній столбецъ предыдущей таблицы показываетъ намъ кромѣ того, что во время рожденія человѣкъ обладаетъ вѣроятной жизнью, равной 40 годамъ; эта вѣроятная жизнь на пятомъ году жизни удлиняется и въ среднемъ достигаетъ своего *maximum'a*; затѣмъ она уменьшается до самаго поздняго возраста.



Фиг. 11.

Могутъ пожелать узнать, какова вѣроятная жизнь по самымъ извѣстнымъ старымъ таблицамъ: слѣдуя тому-же порядку, который мы приняли, мы найдемъ въ слѣдующей таблицѣ двѣ таблицы Дювильяра и Депарсьё, которыми пользуются еще во Франціи, таблицы Моргана и Мильна—для Англіи, а также таблицы Керсебума для Голландіи иВаргентина для Швеціи. (См. таб. на 177 стр.)

Обѣ французскія таблицы, какъ и обѣ англійскія, принадлежатъ, такъ сказать, къ двумъ крайнимъ классамъ въ отношеніи смертности: между ними послѣдовательно расположены числа, вытекающія изъ пяти главныхъ таблицъ, представленныхъ на статистическомъ конгрессѣ. Двѣ хорошо извѣстныя таблицы Керсебума и Варгентина еще больше приближаются къ послѣднимъ, особенно таблица Варгентина, которая даетъ почти такія-же величины какъ, и Нидерландская и Баварская таблицы.

Впрочемъ, какъ мало сходны между собою таблицы смертности, видно, когда вмѣсто того, чтобы брать всю націю въ цѣломъ, изслѣдуютъ только смертность одного изъ составляющихъ

Продолжительность вѣроятной жизни мужчинъ и женщинъ *).

Возрастъ.	Франція.		Англія.		Голландія.	Швеція.	Европа.
	Duvillard	Deparcieux.	Morgan.	Milne.	Kersseboom.	Wargentin.	Общая таблица.
Рожденіе .	20	„	8	41	31	33	38,5
5 лѣтъ .	46	54	41	57	47	51	53,3
10 „ . .	43	52	40	53	45	49	50,3
15 „ . .	39	48	37	49	41	45	46,0
20 „ . .	36	44	34	45	38	41	42,2
25 „ . .	33	41	31	40	35	37	38,5
30 „ . .	29	37	28	36	32	33	34,5
35 „ . .	26	33	26	33	29	29	30,5
40 „ . .	23	29	23	29	26	25	26,5
45 „ . .	20	25	20	25	23	22	23,2
50 „ . .	17	21	17	21	20	19	19,2
55 „ . .	14	18	15	18	17	15	16,0
60 „ . .	11	14	12	14	14	12	12,7
65 „ . .	8,5	11	9	11	11	9	9,5
70 „ . .	6,5	8	8	8	8	7	7,2
75 „ . .	5	6	6	6	6	5	5,2
80 „ . .	3,5	4	4	4,6	4,5	3,5	3,7

ее классовъ. Во время рожденія наибольшее различіе между вѣроятной продолжительностью жизни, по пяти приведеннымъ на 175 стр. таблицамъ, замѣчается между 51 и 27 годами; а въ шести слѣдующихъ таблицахъ между 41 и 8 годами, что составляетъ съ одной стороны разницу въ 24 года, и въ 33—съ другой. Но если перейти къ пятилѣтнимъ періодамъ возрастовъ, то наибольшая разница выйдетъ только въ 3 года съ одной стороны, между тѣмъ какъ съ другой стороны она равна 16 годамъ; Затѣмъ эти предѣлы все больше и больше суживаются съ обѣихъ сторонъ.

Когда различаютъ бельгійскихъ мужчинъ и женщинъ, то для извѣстныхъ возрастовъ числа представляютъ значительныя различія, какъ этого и можно было ожидать. Ранній возрастъ довольно гибеленъ для дѣтей мужского пола: выше мы видѣли, что

---

*) Эти числа вычислены въ статьѣ „*Tables de mortalité*“. А. Кэтлэ, на 704 и 705 стр. II-го тома. „*Dictionnaire de l'économie politique*“, изд. Coquelin'a и Guillaumin'a 2 т. in 8, Paris, 1853.

мертворожденныхъ среди нихъ безконечно больше; съ самаго начала находятъ, что вѣроятная жизнь равна только 37 годамъ для мужчинъ, между тѣмъ какъ для женщинъ она равна 43 годамъ.

Продолжительность вѣроятной жизни мужчинъ.

Возрастъ.	Швеція. Berg.	Англія. Farr.	Бельгія. Quetelet.	Нидерланды Baumhauer	Баварія. De Herman.	Общая средняя.
Рожденіе .	48	44	40	31	22	37
5 лѣтъ .	54	54	58	51	53	53
10 „ . .	50	51	49	49	50	50
15 „ . .	45	47	46	44	46	46
20 „ . .	41	43	42	40	41	41
25 „ . .	37	39	38	37	38	38
30 „ . .	33	35	34	33	34	34
35 „ . .	29	31	30	29	30	30
40 „ . .	25	27	26	25	26	26
45 „ . .	22	23	22	22	22	22
50 „ . .	18	20	18	18	18	18
55 „ . .	15	16	15	15	15	15
60 „ . .	12	13	12	12	12	12
65 „ . .	9	10	10	9	9	9
70 „ . .	7	8	7	7	7	7
75 „ . .	5	6	5	5	5	5
80. „ . .	3	4	4	3	3	3

Разница смертности, столь крупная въ моментъ рожденія, удерживается, еще въ теченіе перваго года; затѣмъ она исчезаетъ Однако женщины постоянно пользуются замѣтнымъ преимуществомъ, безъ сомнѣнія, благодаря ихъ болѣе правильному и менѣе подверженному трудамъ и заботамъ образу жизни. Тѣмъ не менѣе онѣ переживаютъ критическій возрастъ, на которомъ легко наблюдать вліяніе разныхъ періодовъ жизни, особенно періода дѣторожденія, вызывающаго ослабленіе организма. Однако разность для обоихъ половъ меньше, чѣмъ это можно было-бы предполагать, принимая во вниманіе различныя положенія, которыя приходится переживать мужчинѣ въ соціальномъ строѣ.

Разница въ вѣроятной жизни ощущается уже съ самаго рожденія, и въ это время даже сильнѣе, чѣмъ во всякое другое время жизни, какъ мы это могли уже замѣтить: эта разница существуетъ также между разными странами. Наибольшая продолжительность вѣроятной жизни рождающихся мальчиковъ—наблюдается въ среднемъ въ Швеціи: она здѣсь равна 48 годамъ и только 22 годамъ въ Баваріи; разница равна стало быть 26 годамъ. Для рождающихся дѣвочекъ, въ разсматриваемыхъ странахъ, вѣроятная жизнь при появленіи на свѣтъ измѣняется отъ 55 до 32 лѣтъ, что даетъ разницу въ 23 года, вмѣсто 26 лѣтъ, найденныхъ нами для мужчинъ.

Продолжительность вѣроятной жизни женщинъ.

Возрастъ.	Швеція. Berg.	Англія. Farr.	Бельгія. Quetelet.	Нидерланды Baumhauer.	Баварія. De Hermann.	Общая средняя.
Рожденіе .	55	46	43	36	32	43
5 лѣтъ .	59	56	54	54	53	55
10 „ . .	55	52	51	51	49	52
15 „ . .	50	48	47	47	45	47
20 „ . .	46	44	43	43	41	43
25 „ . .	42	40	40	39	37	40
30 „ . .	37	36	36	34	33	35
35 „ . .	33	32	32	31	29	31
40 „ . .	29	29	28	27	26	28
45 „ . .	25	25	25	24	22	24
50 „ . .	21	21	21	20	18	20
55 „ . .	17	17	17	16	15	16
60 „ .	13	14	13	12	11	13
65 „ . .	10	11	10	9	9	10
70 „ . .	7	8	7	7	7	7
75 „ . .	5	6	6	5	5	5
80 „ . .	4	4	4	3	4	4

Если посмотримъ, какова продолжительность вѣроятной жизни обоихъ половъ, по 1-ой таблицѣ (стр. 175), то разница менѣе замѣтна при переходѣ отъ одной страны къ другой; она больше выражена въ таблицѣ на стр. 178, составленной только для мужчинъ. Вообще разногласія этой послѣдней таблицы крупнѣе всѣхъ: это можетъ быть говоритъ не въ пользу воздержанности и заботъ мужчинъ о сохраненіи своего здоровья. Жизнь женщинъ наоборотъ правильнѣе, и смертность между ними гораздо менѣе измѣнчива въ разныхъ странахъ.

При вычисленіи вѣроятной жизни женщинъ, нельзя считать первыхъ лѣтъ, слѣдующихъ за рожденіемъ, такъ какъ наши свѣдѣнія въ этомъ отношеніи еще слишкомъ мало точны: но уже съ пятаго года наибольшая разность равна только 6 годамъ для странъ, дающихъ наибольшую разницу. Въ общемъ, средняя для женщинъ въ возрастѣ 5-ти лѣтъ равна 55 годамъ. Баварія даетъ 53 года, Нидерланды и Бельгія 54, Англія — 56 и Швеція 59. Если не принять во вниманіе шведской величины, то вѣроятная жизнь была бы равна 54 годамъ: наибольшее уклоненіе дала бы Англія—2 года сверхъ указанныхъ 54 и Баварія—1 годъ ниже указанныхъ, а Бельгія и Нидерланды представляли-бы среднее. Можно сказать, что начиная съ этого возраста, Англія, Бельгія и Нидерланды даютъ почти въ точности одинаковую смертность для женщинъ. Швеція сохраняетъ незначительное преимущество до 45-лѣтняго возраста; затѣмъ, какъ и эти послѣднія страны, она почти не уклоняется отъ средней.

Можно было-бы слѣдовательно сказать, что таблица смертности женскаго пола можетъ быть представлена средней таблицей Бельгіи, которая, начиная съ 5-лѣтняго возраста, дѣйствительно почти не отличается больше чѣмъ на единицу отъ среднихъ таблицъ для всѣхъ возрастовъ. Надо впрочемъ замѣтить, что разница въ 1 годъ гораздо важнѣе въ концѣ жизни, чѣмъ въ началѣ: такъ, въ Англіи, въ 60 лѣтъ вѣроятная жизнь больше чѣмъ въ другихъ странахъ приблизительно на 1 годъ, до конца жизни, но одинъ лишній годъ жизни при трехъ, составляющихъ продолжительность жизни этого возраста, составляетъ значительное преимущество.

Изъ этого слѣдуетъ, что смертность, разсматриваемая въ общемъ, далека отъ печальныхъ различій, представляемыхъ часто таблицами смертности, составленными спеціально для разныхъ странъ и для разныхъ классовъ людей, болѣе или менѣе подверженныхъ смертности.

Мы сдѣлаемъ здѣсь замѣчаніе, заслуживающее разсмотрѣнія: знаменитый Галлей, построившій первую таблицу смертности, безъ сомнѣнія, зналъ, уже тогда, въ 1693 году, что смертность ранняго дѣтства представляетъ слишкомъ мало признаковъ вѣроятности, чтобы быть принятой въ соображеніе при построеніи таблицы смертности: онъ не пользовался ею и началъ свои таблицы послѣ перваго возраста. Еслибъ воспользовались этимъ методомъ, то не замедлили-бы овладѣть множествомъ драгоцѣнныхъ свѣдѣній, которыя могли-бы измѣнить наши взгляды во многихъ отношеніяхъ, и доставили-бы намъ точныя свѣдѣнія относительно данныхъ, о которыхъ мы въ состояніи судить теперь только очень неточно.

Вслѣдъ за этими первыми соображеніями послѣдуетъ болѣе внимательное изслѣдованіе разныхъ критическихъ возрастовъ мужчинъ и женщинъ, а также и различныхъ степеней живучести.

Прежде всего должна остановить на себѣ наше вниманіе большая смертность дѣтей послѣ рожденія: для того, чтобы составить себѣ правильное представленіе объ этомъ, достаточно принять во вниманіе то, что въ городахъ, какъ и въ деревняхъ, въ теченіе перваго мѣсяца послѣ рожденія умираетъ дѣтей въ 4 раза больше, чѣмъ въ теченіе 2-го мѣсяца (см. стр. 166 и почти столько же, сколько въ теченіе двухъ лѣтъ, слѣдующихъ за первымъ годомъ, хотя смертность и тогда еще достаточно сильна. Таблица смертности дѣйствительно показываетъ, что *почти десятая часть дѣтей умираетъ съ перваго мѣсяца, слѣдующаго за рожденіемъ.* Это число равно числу оставшихся въ живыхъ, которые умираютъ между 7-мъ и 34-мъ годами или между 24 и 41 годомъ, или еще лучше—числу оставшихся въ живыхъ послѣ 78 лѣтъ. Мильнъ Эдвардъ и Виллермэ произвели интересныя изслѣдованія смертности новорожденныхъ дѣтей: Тоальдо объясняетъ это явленіе въ Италіи въ значительной мѣрѣ обычаемъ, согласно которому дѣтей должно приносить въ церковь сейчасъ же послѣ рожденія, часто въ очень суровые холода, и погружать ихъ затѣмъ въ купель совершенно нагими.

Смертность, особенно для дѣтей мужского пола, такъ велика, что черезъ три года послѣ рожденія число ихъ сокращается уже на четверть. Пятилѣтній возрастъ очень замѣчателенъ, такъ какъ смертность, очень большая до тѣхъ поръ, довольно рѣзко останавливается и становится чрезвычайно незначительной до періода зрѣлости. До этого возраста, въ 5 лѣтъ, вѣроятная жизнь и достигаетъ своего *maximum'а*, т. е. человѣкъ можетъ тогда расчитывать на самое долгое вѣроятное существованіе.

Время, предшествующее зрѣлости, для городовъ—13 лѣтъ, а для деревень—14, такъ же точно заслуживаетъ нашего вниманія: оно тоже представляетъ особаго рода *maximum*; его можно было-бы назвать *maximum'омъ живучести*; въ эту пору человѣкъ можетъ считать свое существованіе наиболѣе обезпеченнымъ; тогда онъ можетъ успѣшнѣе всего побиться объ закладъ, что онъ не умретъ въ ближайшій моментъ.

Послѣ возраста зрѣлости смертность усиливается, особенно среди женщинъ; это увеличеніе женской смертности довольно значительно даже въ деревняхъ.

Около 24 лѣтъ является особенное обстоятельство для мужчинъ, —это maximum, не наблюдаемый въ кривой смертности женщинъ. Время этого *maximum'a* совпадаетъ съ тѣмъ временемъ, когда человѣкъ обнаруживаетъ наибольшую склонность къ преступленію; это — бурный періодъ страстей, занимающій чрезвычайно рѣзкое мѣсто въ нравственной жизни мужчины. Затѣмъ, смертность незамѣтно уменьшается и достигаетъ для городскихъ и деревенскихъ мужчинъ новаго *maximum'a* около 30 лѣтъ.

Причина, вслѣдствіе которой не наблюдаютъ этого *maximum'a* и *minimum'a* въ кривой смертности женщинъ, проистекаетъ безъ сомнѣнія изъ того, что дѣйствіе, которое могло-бы оказать развитіе страстей, связано съ дѣйствіемъ, вытекающимъ изъ опасностей материнства, ибо послѣ 24 лѣтъ число смертныхъ случаевъ среди женщинъ продолжаетъ увеличиваться, а отъ 28 до 45 лѣтъ превосходитъ число смертныхъ случаевъ среди мужчинъ. Эта разница даже довольно значительна между 30 и 40 годами *).

Періодъ жизни отъ 60 до 65 лѣтъ—не менѣе замѣчательный; здѣсь жизнеспособность въ значительной мѣрѣ теряетъ свою энергію, т. е. вѣроятность жизни становится чрезвычайно слабой.

Наконецъ, казалось, что жизнь человѣка ограничивается однимъ вѣкомъ. Мало людей переживаютъ этотъ срокъ; къ 1 января 1831 года, изъ 16 столѣтнихъ старцевъ, насчитывавшихся въ Бельгіи, 14 находились въ трехъ провинціяхъ: Гентѣ, Намюрѣ и Люксембургѣ; въ Лимбургѣ и восточной Фландріи ихъ было по одному; ни одного не было въ провинціяхъ Брабантѣ, Антверпенѣ,

---

*) Долгое время думали, что переходный возрастъ вызываетъ среди женщинъ болѣе сильную смертность, чѣмъ въ другіе періоды жизни; но Бэнуастонъ де-Шатонэфъ показалъ неосновательность этого мнѣнія въ „Memoire sur la mortalité des femmes de l'âge de 40 à 50 ans, Paris 1822.

западной Фландріи и Льежѣ. Тремъ самымъ старшимъ индивидуумамъ изъ этихъ столѣтнихъ старцевъ было 104, 110 и 111 лѣтъ; они принадлежали Люксембургской провинціи; другимъ не было больше 102 лѣтъ.

Изъ этихъ 16 столѣтнихъ старцевъ было девять мужчинъ; ни одинъ изъ нихъ не служилъ въ военной службѣ; надо замѣтить, что всѣ они были прежде женаты или еще и въ моментъ переписи имѣли женъ, и что вообще они жили при очень посредственныхъ условіяхъ. Съ другой стороны считали установленнымъ что среди мужчинъ больше 100-лѣтнихъ старцевъ, чѣмъ среди женщинъ, хотя въ среднемъ жизнь послѣднихъ продолжительнѣе.

Одинъ нѣмецкій физіологъ, Бурдахъ, опубликовалъ любопытныя сравненія смертности съ періодами человѣческой жизни *). Этотъ ученый дѣлитъ жизнь на 10 періодовъ по 400 недѣль каждый, и вычисляетъ такимъ образомъ годы молочныхъ зубовъ, юношества, молодости и т. д.; въ первомъ періодѣ находится другой второстепенный въ 40 недѣль, періодъ кормленія грудью.

Законъ продолжительности болѣзней, выраженный въ недѣляхъ и частяхъ недѣли, далъ Виллермэ въ „*Annales d' Hygiène*“ за январь 1830 года, по даннымъ человѣколюбиваго общества „*Highland society of Scotland*“.

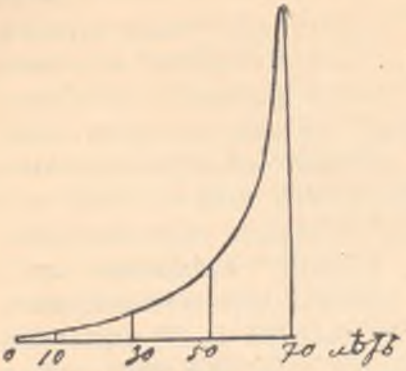
Возрастъ.	Недѣль болѣзней на 1 человѣка.	Возрастъ.	Недѣль болѣзней на 1 человѣка.
21-й годъ	0,575	55-й годъ	1,821
25 „	0,585	57 „	2,018
30 „	0,621	60 „	2,246
35 „	0,675	63 „	3,100
40 „	0,758	65 „	4,400
45 „	0,962	67 „	6,000
50 „	1,361	70 „	40,701

Коммиссія шотландскаго общества, собравшая эти данныя, думаетъ, что ниже 20 лѣтъ средняя годовая продолжительность болѣзни должна быть опредѣлена въ 3 дня или почти такъ; а свыше 70 лѣтъ, какъ и для рабочаго класса почти 4 мѣсяца или 16 недѣль съ половиной.

---

*) Die Zeitrechnung des menschlichen Lebens, 1829, Leipzig.

Слѣдующая фигура указываетъ своими уклоненіями отъ горизонтальной линіи вверхъ, продолжительность болѣзней по возрасту.



Фиг. 12.

Виллермэ занимался также изслѣдованіемъ закона смертности по возрастамъ во время эпидемій *) и пришелъ къ заключенію, что онъ *кажется* совпадаетъ съ общимъ закономъ смертности по возрастамъ, т. е. тѣ, которые при прочихъ равныхъ условіяхъ обладаютъ меньшей вѣроятностью жить, легче всего погибаютъ, если подвергаются эпидеміи: такъ, иная эпидемія особенно сильно свирѣпствуетъ среди дѣтей, а другая среди стариковъ. Или еще лучше, при одномъ и томъ-же числѣ больныхъ всякаго возраста, если это дѣти, смертность тѣмъ сильнѣе, чѣмъ они ближе къ рожденію, а если это старики, то—чѣмъ они старше.

Это наблюденіе было подтверждено изслѣдованіями Дювильяра о смертныхъ случаяхъ, вызванныхъ оспой; данными, собранными послѣ крапивной лихорадки, эпидемически распространившейся въ 1821 году въ департаментѣ Уазы, и еще многими другими данными, какія приводитъ Виллермэ.

„По единогласнымъ извѣщеніямъ, полученнымъ изъ разныхъ частей Германіи, говоритъ этотъ ученый **), извѣщеніямъ, вполнѣ подтверждающимъ оффиціальный докладъ объ опустошеніяхъ, произведенныхъ холерой въ Парижѣ и Сенскомъ департаментѣ, дѣти моложе 4—5 лѣтъ и очень пожилые старики, заболѣвши этой болѣзнью, почти всѣ умираютъ, если можно такъ выразиться, между тѣмъ какъ молодые люди умираютъ отъ нея менѣе часто.

„Наконецъ, сдѣланныя мною изслѣдованія о вліяніи болотъ показываютъ тоже самое для лихорадокъ и другихъ эпидемическихъ болѣзней, вызываемыхъ ими, ибо, при равномъ числѣ боль-

---

*) *Annales d'Hygiène*, январь 1833 г., 31 стр.

**) *Annales d'Hygiène*, январь 1833 г., 34 стр.

ныхъ, маленькихъ дѣтей умираетъ больше другихъ, а за ними слѣдуютъ старики.

„Эпидемія гриппа или катарральной лихорадки, господствовавшей въ большей части Франціи въ теченіе весны и лѣта 1831 года и особенно поражавшей взрослыхъ и стариковъ, по крайней мѣрѣ въ Парижѣ, была главнымъ образомъ гибельна для очень старыхъ людей.

„Всѣ эти случаи, относящіеся къ столь различнымъ болѣзнямъ, дѣлаютъ чрезвычайно вѣроятнымъ то, что смертность, вызываемая эпидеміями, слѣдуетъ обыкновенно, для больныхъ пораженныхъ ими, какъ уже сказано, общему закону смертности по возрастамъ.

„Отсюда тотъ выводъ, что эпидеміи, особенно поражающія обѣ крайности жизни, оказываются самыми смертельными, если принять во вниманіе разницу лѣтъ“.

4. Вліяніе годовъ.

Замѣтили, что годовое число смертныхъ случаевъ можетъ, при извѣстныхъ обстоятельствахъ, сильно измѣняться вслѣдствіе неурожая, войны или другихъ какихъ-нибудь бѣдствій.

Вліяніе неурожаевъ было уже давно установлено; однако, въ послѣднее время, Сэдлеръ предполагалъ, что въ числахъ, относящихся къ Англіи, онъ нашелъ почти обратное тому, что нашли его предшественники. Подобныя разногласія между результатами наблюденій часто побуждали поверхностныхъ людей доказывать небольшое значеніе статистическихъ изслѣдованій, вмѣсто того чтобы искать истинной причины получающихся противорѣчій. Для того, чтобы освѣтить наблюдаемое здѣсь затрудненіе, важно прежде всего замѣтить, что смертность увеличивается не въ тотъ самый моментъ, когда хлѣбъ начинаетъ дорожать; значительная смертность вызывается только болѣзнями и всякими лишеніями, которымъ должны подвергаться бѣдные во время неурожая; такимъ образомъ, очень часто вліяніе какого-нибудь бѣдствія становится очевиднымъ, благодаря метрическимъ записямъ, только черезъ нѣсколько мѣсяцевъ, а иногда и черезъ годъ послѣ ихъ появленія. Кромѣ того послѣдствія эти не прекращаются внезапно: цѣна хлѣба можетъ стать обыкновенной или даже понизиться, между тѣмъ какъ избытокъ смертныхъ случаевъ еще очень значителенъ.

Неправильно также допускать, что самыя малыя колебанія цѣнъ воспроизводятся пропорціонально въ числѣ смертныхъ случаевъ: среди большого количества причинъ, измѣняющихъ смертность, необходимо чтобы та была очень сильна, которая оставляетъ слишкомъ ясные слѣды. Недостаточно, стало быть, какъ это дѣлалъ Сэдлеръ, придавать одинаковое значеніе всѣмъ годамъ начиная съ того, какъ цѣна зерновыхъ хлѣбовъ превысила нѣсколько среднюю: надо считаться съ тѣми годами, когда голодъ дѣйствительно имѣлъ мѣсто; и въ особенности не слѣдуетъ считать смертность измѣняющейся пропорціонально цѣнѣ съѣстныхъ припасовъ. Чтобы подтвердить примѣромъ то, что сейчасъ сказано, достаточно будетъ бросить взглядъ на таблицу движенія бельгійскаго населенія, въ теченіе 12 лѣтъ, съ 1815 по 1826 годъ включительно. Изъ нея видно, что цѣны на пшеницу и рожь достигли своего *maximum'a* въ 1816 году; однако, результаты голода замѣтны въ числѣ смертныхъ случаевъ и рожденій только въ слѣдующемъ году. Напротивъ, по способу разсужденій Сэдлера этотъ 1816 годъ, столь очевидно несчастный, долженъ былъ бы быть причисленъ къ счастливымъ годамъ, такъ какъ онъ далъ мало смертныхъ случаевъ, сравнительно съ другими годами.

Вотъ какъ столь убѣдительная таблица, данная намъ оффиціальными данными 1815—1819 года, привела къ выводамъ, совершенно противоположнымъ полученнымъ нами.

Нужно быть вообще слишкомъ осторожнымъ въ выводахъ, дѣлаемыхъ на основаніи статистическихъ данныхъ, и въ выборѣ употребляемыхъ методовъ. Нужна величайшая осторожность при опредѣленіи степени важности каждаго вліяющаго элемента: даже самые опытные люди приходили иногда къ нелѣпымъ выводамъ, приписывая извѣстнымъ причинамъ вліяніе, оказываемое другими причинами, которыхъ они не приняли во вниманіе.

Гибельное вліяніе 1816 и 1817 годовъ отмѣчено не только на общихъ результатахъ смертности для всей Бельгіи, но, какъ это было замѣчено *), и на частныхъ результатахъ смертности въ пріютахъ для подкидышей и въ домахъ призрѣнія нищихъ.

---

*) 35 стр. *Recherches sur la population, les naissances etc. dans le royaume des Pays Bas*" par A. Quetelet. См. также о смертности въ 1817 г. „*Statistique nationale*" de M. Ed. Smits.

Эту нѣсколько увеличившуюся смертность должно приписать тому, что лица, принятыя въ пріюты и дома призрѣнія нищихъ, уже пострадали отъ послѣдствій неурожая, а не тѣмъ лишеніямъ, которымъ они подвергаются съ самыхъ учрежденіяхъ. Число принятыхъ подкидышей, не превышающее 3.000 въ обыкновенный годъ, возрасло въ 1817 году до 3.945 въ одномъ Брюссельскомъ пріютѣ; это и могло усилить смертность, такъ какъ эти дѣти, подкинутыя въ такое критическое время, безъ сомнѣнія уже носили въ себѣ зародышъ смерти *)

Другое наблюденіе, которое можно вывести изъ предыдущихъ чиселъ, это ужасная смертность въ домахъ призрѣнія нищихъ, которая была сильнѣе смертности въ наименѣе здоровыхъ провинціяхъ Бельгіи приблизительно въ 4—5 разъ; то же можно сказать относительно пріютовъ для подкидышей. Это подтверждаетъ очень основательныя замѣчанія, сдѣланныя Виллермэ и Бэнуастономъ де-Шатонэфъ въ *„Annales d'Hygiène“* о неодинаковой смертности богатыхъ и бѣдныхъ. Смертные случаи въ бельгійскихъ тюрьмахъ были несравненно менѣе численны, чѣмъ въ домахъ призрѣнія нищихъ: въ Вильвордѣ насчитывали въ 1824, 1825 и 1826 гг.—1 случай на 28 жителей; въ Сенъ-Бернардѣ 1 на 22 въ 1826 году и въ Гандѣ около того-же времени 1 на 44 только; это отношеніе нѣсколько меньше, чѣмъ для всего королевства. Между тюрьмами и домами призрѣнія должно установить то различіе, что лица, вступающія въ эти послѣднія учрежденія, остаются тамъ только 7—8 мѣсяцевъ: они приходятъ туда обыкновенно, какъ было сказано, съ здоровьемъ, подорваннымъ лишеніями и болѣзнями; напротивъ, вступающіе въ тюрьмы, подвергнувшись уже суду, вообще находятся при болѣе благопріятномъ состояніи здоровья, а средняя продолжительность пребыванія тамъ не менѣе 5 лѣтъ **).

Изслѣдуя вліяніе военнаго и мирнаго времени, ввели въ изслѣдованія не меньше неясностей. Во время войны страна дѣйствительно страдаетъ, потому что ея мужское населеніе съ одной стороны погибаетъ или въ сраженіяхъ или вслѣдствіе изнуренія и лишеній, а съ другой стороны шансы на воспроизведеніе уменьшаются; эта страна страдаетъ или отъ того, что ея промышлен-

---

*) Gioja въ своей *„Filosofia della Statistica“* взялъ тѣ же 1815, 1816 и 1817 годы, какъ примѣръ вліянія голода на смертность.

**) *„Annales d'Hygiène“*.

ность и вся дѣятельность задерживается или отъ того, что ввозъ всякаго рода, особенно зерновыхъ хлѣбовъ, уменьшается; но народъ можетъ вести войну, и не испытывая измѣненій въ сферѣ земледѣльческой и промышленной жизни; поэтому обманулся бы тотъ, кто сталъ бы искать слѣдовъ этихъ измѣненій въ цифрахъ смертности. Вотъ почему Сэдлеръ отрицаетъ вліяніе военнаго времени, пользуясь цифрами Англіи, но не изслѣдуя при этомъ, измѣняется ли состояніе средствъ существованія, ввозъ и вывозъ, и лишилась ли нація въ это время большей части мужского населенія, чѣмъ въ другое время. Я думаю, что это вліяніе можно было бы лучше оцѣнить въ такой странѣ, какъ Голландія или Бельгія, многія провинціи которыхъ ведутъ большую морскую торговлю и порты которыхъ были долгое время закрыты. Такъ, я сравню числа, полученныя въ теченіе двухъ десятилѣтнихъ періодовъ, до 1814 года и послѣ него; одинъ охватываетъ годы 1804—1813 включительно, и мы можемъ его разсматривать какъ періодъ войны; другой—годы 1815—1824 включительно, и составляетъ періодъ мира*). (См. таб. на 189 стр.)

Эта таблица показываетъ намъ прежде всего, что во всѣхъ провинціяхъ, безъ исключенія, число рожденій во время десятилѣтняго періода мира было больше, чѣмъ въ періодъ войны; число смертныхъ случаевъ было, напротивъ, менѣе повышено, исключая внутреннихъ провинцій, каковы Гельдръ, Оверисель, Дрентъ, Южный Брабантъ, Гэннэгау, Льежъ и Намюръ; затѣмъ разница для многихъ изъ нихъ можетъ находиться въ связи съ приростомъ населенія. Надо кромѣ того замѣтить, что эти провинціи по большей части земледѣльческія, а Гэннэгау, Намюръ и Льежъ энергично занимались обработкой земли или изготовленіемъ оружія. Что касается браковъ, то ихъ число мало измѣнялось въ теченіе того и другого періода.

Очень чувствительно пострадали отъ смертности въ особенности тѣ провинціи, которыя вели морскую торговлю и порты которыхъ оставались долгое время въ бездѣйствіи. Такъ, обѣ Голландіи и Зеландія были доведены до того, что давали смертныхъ случаевъ больше чѣмъ рожденій. Это положеніе вещей прекратилось въ моментъ заключенія мира. Выводы, заключающіеся въ

---

*) О вліяніи войнъ Французской имперіи см. наблюденія D'Ivernois, результаты которыхъ были приведены выше на стр. 107.

Провинціи.	Смертн. случ.		Рожденія.		Браки.	
(Бельгія).	1-ый періодъ	2-ой періодъ.	1-ый періодъ.	2-ой періодъ	1-ый періодъ.	2-ой періодъ.
Брабантъ Сѣв.	75.771	69.507	89.488	100.863	21,210	20.380
„ Южн	118,356	119.109	145.256	169.181	30.862	36.423
Лимбургъ .	75.679	70.549	91.397	101.781	20.453	22.960
Гельдръ . .	53.764	59.818	67,308	90 862	15.627	19.337
Льежъ . . .	74.683	82.698	102 949	113.623	22.671	24.387
Фландрія Вост.	169.966	162.834	207,334	218.830	42.549	43.120
„ Зап.	144.726	141.310	179,099	191.139	37.668	37.882
Гэннэгау . .	110.344	118.289	158.762	183.198	37.093	39.591
Голландія Сѣв.	143.108	121.725	122.275	145.744	33.533	34.789
„ Южн.	136.457	123.850	135.703	165.741	32.498	34.942
Зеландія . .	46.237	42.436	45.805	55.331	10.731	10.645
Намюръ . .	30.519	34.134	48.557	58.690	11.406	12.592
Антверпенъ.	87.126	70.623	96.058	101.471	21.579	23.075
Утрехтъ . .	31.150	29.928	36.065	41 038	8.674	8.982
Фрисландія.	45.387	38.219	49.351	65.565	14.186	15.327
Оверисель .	31.483	37.479	43.114	51.951	9.960	11.629
Гронингенъ.	37.026	30.539	41.592	51.673	11.940	11.492
Дрентъ . .	9.418	9.859	13.254	16.724	3.691	3.954
Люксембургъ.	66.406	58.695	91.809	92.242	20.412	18.740
Всего. .	1.487.606	1.421.600	1.765.179	2.015.646	406.743	430.247

этой таблицѣ такъ убѣдительны, какъ можно только желать, и показываютъ, насколько войны вліяютъ на смертность: онѣ тормозятъ дѣятельность городовъ и вредятъ ихъ промышленности.

Здѣсь можно было бы найти явное противорѣчіе съ тѣмъ, что сказано было выше. Я замѣтилъ, что вообще учащеніе смертныхъ случаевъ увеличиваетъ также число браковъ и рожденій; но препятствіе къ увеличенію числа браковъ заключалось въ самой войнѣ, вліяніе которой я хотѣлъ опредѣлить, войнѣ, лишавшей общество большей части молодыхъ людей. Тѣмъ не менѣе число браковъ было почти одинаковымъ въ оба періода; и въ этомъ я нахожу новое подтвержденіе моихъ предположеній. Большая смертность должна была сократить продолжительность браковъ и увеличить число заключаемыхъ во 2-й и 3-й разъ, которые по той-же причинѣ были менѣе плодовиты и дали меньше рожденій. Я особенно настаиваю на этомъ фактѣ, который кажется мнѣ замѣчательнымъ, а именно, что брачная плодовитость въ первый изъ указанныхъ періодовъ была несравненно меньше.

Почти подобныя же замѣчанія можно сдѣлать относительно вліянія неурожайныхъ лѣтъ. Здѣсь противорѣчіе кажется еще болѣе рѣзкимъ. Большее число смертныхъ случаевъ сопровождается обыкновенно меньшимъ количествомъ браковъ; это происходитъ оттого, что нужда, приводящая къ смерти, заставляетъ опасаться новыхъ предпріятій сватанья, а также оттого, что изъ состоянія вдовства не выходятъ тотчасъ-же. То, что было замѣчено относительно смертныхъ случаевъ, что при ихъ увеличеніи увеличивается и число браковъ и рожденій, должно, стало быть вообще примѣняться только къ странамъ, не подвергающимся случайнымъ причинамъ (causes accidentelles) какъ войны, эпидеміи, голодъ и т. п.

5. Вліяніе временъ года *).

Число смертныхъ случаевъ, какъ и рожденій, испытываетъ очень замѣтныя измѣненія, въ зависимости отъ разныхъ мѣсяцевъ года. Много изслѣдованій было уже произведено по этому интересному вопросу, при чемъ узнали, что въ нашемъ климатѣ зимніе холода въ общемъ гибельны для человѣческаго рода. Слѣ-

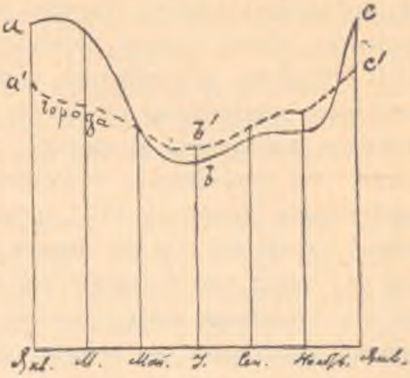
Мѣсяцы. 1815—1826 (Бельгія).	Смертные случаи.		Отношеніе.	
	Города.	Деревни.	Города.	Деревни.
Январь	59,892	116,129	1,158	1,212
Февраль	56,267	114.758	1,088	1,198
Мартъ	54,277	114.244	1,050	1,192
Апрѣль	51.818	107,264	1,002	1,120
Май	48.911	93.714	0,946	0,978
Іюнь	46.607	84.464	0,901	0,882
Іюль	45.212	77.555	0,874	0,809
Августъ	47.032	78.802	0,910	0,822
Сентябрь	50.191	85.131	0,971	0,888
Октябрь	51.649	89.514	0,999	0,934
Ноябрь	52.908	89 585	1,024	0,935
Декабрь	55.631	98.705	1,076	1,030
Въ среднемъ .	51,700	95,822	1,000	1,000

---

*) Большая часть слѣдующихъ выводовъ взята изъ мемуара: *Sur l'influence des saisons et des âges sur la mortalité*, который я представилъ Королевской Академіи этическихъ и политическихъ наукъ французскаго института, въ 1833 году. Я уже опубликовалъ наблюденія по этому вопросу въ первыхъ томахъ моей „*Correspondance matématique et physique*".

дующая таблица, составленная на основаніи бельгійскихъ данныхъ и по тѣмъ же правиламъ, какія были указаны для рожденій, представитъ 1-й примѣръ вліянія временъ года на смертность.

Замѣтимъ здѣсь-же, что вліяніе временъ года болѣе рѣзко выражено въ деревняхъ, чѣмъ въ городахъ, гдѣ представляется больше средствъ предохранить себя отъ измѣненій температуры. Въ городахъ смертность протекаетъ также болѣе правильно, хотя и менѣе замѣтно.



Фиг. 13.

Время *maximum'a* и *minimum'a* не наступаетъ одновременно во всѣхъ климатахъ; они даже перемѣстились, кажется, благодаря цивилизаціи, уничтожившей мѣстныя причины эпидемій. Эти эпидеміи появляются въ особенности вслѣдствіе сильныхъ жаровъ въ болотистыхъ мѣстностяхъ или окрестностяхъ городовъ. Виллермэ привелъ очень поразительный примѣръ такого рода для Парижа (*Annales d'Hygiène*), въ слѣдующей таблицѣ, гдѣ мѣсяцы расположены, для разныхъ временъ, по возрастающимъ числамъ смертныхъ случаевъ средняго дня.

13 лѣтъ въ концѣ XVII вѣка.	20 лѣтъ до 1722 года, включая 13 лѣтъ предыдущаго столбца.	20 лѣтъ. Отъ 1723 до 1742.	20 лѣтъ. Отъ 1743 до 1762.	20 лѣтъ. Отъ 1763 до 1782.	10 лѣтъ, кончая 1817 г. (исключая 1814 годъ.	10 лѣтъ. Отъ 1817 до 1826.
Сентябрь	Февраль.	Апрѣль.	Апрѣль.	Апрѣль.	Апрѣль.	Апрѣль.
Декабрь.	Сентябрь	Мартъ.	Мартъ.	Мартъ.	Мартъ.	Мартъ.
Январь.	Апрѣль.	Май.	Февраль.	Февраль.	Февраль.	Май.
Ноябрь.	Январь.	Февраль.	Май.	Январь.	Январь.	Январь.
Мартъ.	Мартъ.	Январь.	Январь.	Май.	Май.	Февраль.
Май.	Май.	Декабрь.	Іюнь.	Декабрь.	Декабрь.	Іюнь.
Августъ.	Октябрь.	Іюнь.	Декабрь.	Іюнь.	Іюнь.	Сентябрь
Февраль.	Ноябрь.	Сентябрь	Ноябрь.	Октябрь.	Сентябрь	Декабрь.
Октябрь.	Декабрь.	Августъ.	Октябрь.	Сентябрь	Ноябрь.	Августъ.
Апрѣль.	Августъ.	Октябрь.	Сентябрь	Ноябрь.	Октябрь.	Октябрь.
Іюнь.	Іюнь.	Ноябрь.	Іюль.	Іюль.	Августъ.	Ноябрь.
Іюль.	Іюль.	Іюль.	Августъ.	Августъ.	Іюль.	Іюль.

Эта таблица составлена на основаніи двухъ милліоновъ смертныхъ случаевъ. „Изъ нея слѣдуетъ", говоритъ Виллермэ, „что благодаря прогрессивному уменьшенію эпидемій, такъ часто опустошавшихъ нѣкогда Парижъ, время годового maximum'а смертности въ этомъ городѣ перемѣстилось. Въ теченіе тѣхъ годовъ XVII столѣтія, относительно которыхъ имѣются свѣдѣнія, этотъ *maximum* приходился на осень, а теперь—на весну. Нѣкогда *minimum* наблюдался въ началѣ лѣта, а въ наши дни—нѣсколько позже. Это окончательно убѣждаетъ насъ въ томъ, что съ конца царствованія Людовика XIV, продолжаетъ тотъ-же ученый, произошли улучшенія или въ самомъ санитарномъ положеніи Парижа или въ участи или поведеніи его жителей, ибо можно утверждать что установленныя нами перемѣны находятся въ связи съ увеличеніемъ смертности въ теченіе того времени года, которое даетъ въ настоящее время *maximum*, а съ уменьшеніемъ смертности въ теченіе времени года, насчитывавшаго нѣкогда больше всего смертныхъ случаевъ".

Виллермэ замѣтилъ, что эпидеміи, являющіяся слѣдствіемъ голода, особенно сильно производятъ свои опустошенія въ тѣ годы, когда продуктовъ очень мало, и они трудно добываются, когда сильно размножаются болѣзни, зависящія отъ тяжелыхъ условій жизни для большого числа людей; послѣ жатвы, приносящей изобиліе, онѣ прекращаются. Въ древнемъ Нидерландскомъ королевствѣ, напримѣръ вслѣдствіе плохого урожая въ 1816 году увеличеніе смертныхъ случаевъ было очень замѣтно въ слѣдующемъ году, и особенно въ теченіе мѣсяца, предшествовавшаго новой жатвѣ.

Что-же касается эпидемій, независящихъ отъ неурожая, то онѣ вообще связаны кажется съ лѣтомъ или жарами и первой половиной осени, по крайней мѣрѣ въ нашемъ климатѣ. Это въ особенности ясно изъ изслѣдованій Фридлендэра о Лондонѣ, Данцигѣ, Мальтѣ, Лявалеттѣ и Алеппо *).

По Варгентину *maximum* смртности въ Стокгольмѣ наблюдается въ августѣ мѣсяцѣ; то-же самое и для Монпелье, по Mourgue'у. Не связано-ли перемѣщеніе *maximum'a* въ этихъ городахъ съ мѣстными причинами? По крайней мѣрѣ изъ примѣра большинства европейскихъ странъ видно, что *maximum* смертныхъ

---

*) *Des épidemies, etc.* (*Annales d'Hygiéne*, стр. 27).

случаевъ довольно регулярно наблюдается въ концѣ зимы, а *minimum*—около середины лѣта.

Но это наблюденіе было слишкомъ обще, и нужно было попытаться изслѣдовать частные факты, которые оно охватываетъ. Интересно было-бы изслѣдовать, одинаково-ли гибельны зимнія стужи для всѣхъ возрастовъ, и приходятся-ли *maxima* и *minima* смертныхъ случаевъ неизмѣнно въ одни и тѣ-же мѣсяцы, въ разные періоды жизни, или они измѣняются въ зависимости отъ этихъ періодовъ.

Я тщательно изслѣдовалъ этотъ трудный вопросъ, несмотря на длинныя и скучныя вычисленія, которыми мнѣ пришлось заняться. Для того, чтобы дополнить, поскольку возможно, мои изслѣдованія, я принялъ во вниманіе проживаніе въ городѣ и деревнѣ и различіе половъ, такъ что мною составлены таблицы смертности для разныхъ мѣсяцевъ, для мужчинъ и женщинъ, для города и деревни *). Я не думаю, чтобы этотъ вопросъ былъ когда либо такъ широко охваченъ: существовало однако нѣсколько спеціальныхъ работъ и въ частности о смертности новорожденныхъ дѣтей. Виллермэ и Мильнъ Эдвардсъ замѣтили, что смертность новорожденныхъ усиливается при лѣтнихъ жарахъ и еще больше при зимнихъ стужахъ **); но ихъ числа, относящіяся къ тремъ слѣдующимъ за рожденіемъ мѣсяцамъ, не устанавливаютъ различія ни между отдѣльными мѣсяцами, въ частности, ни между болѣе поздними.

Согласно произведеннымъ въ Бельгіи изслѣдованіямъ, лѣтній maximum смертности незначителенъ въ теченіе перваго мѣсяца послѣ рожденія, но съ этой поры онъ появляется въ августѣ мѣсяцѣ и рѣзче выраженъ около середины перваго года возраста; оба *minimum'а* смѣшивавшіеся въ теченіе перваго мѣсяца, отдѣляются потомъ одинъ отъ другого все больше и больше до образованія 5—6-мѣсячнаго промежутка между ними, и одинъ наступаетъ въ апрѣлѣ, а другой—въ ноябрѣ; затѣмъ они вновь сбли-

---

*) Эти изслѣдованія основаны на оффиціальныхъ данныхъ, переданныхъ мнѣ статистическимъ бюро, учрежденнымъ при министрѣ внутр. дѣлъ. Они охватываютъ около 400.000 наблюденій, относящихся къ различнымъ возрастамъ, ко всей Бельгіи и къ 5 годамъ, съ 1827 по 1831. Однако занятіе Мэстрихта и Люксембурга оставило пробѣлъ въ таблицахъ, составленныхъ для восточной части королевства.

**) *Annales d'Hygiène, 1829.*

жаются и еще разъ сливаются послѣ перваго года, образуя одинъ только minimum въ сентябрѣ. Этотъ особенный результатъ повторяется, когда разсматриваютъ въ отдѣльности таблицы смертности обоихъ половъ; онъ повторяется также, когда различаютъ города и деревни; но лѣтній maximnm наступаетъ въ городахъ послѣ первыхъ мѣсяцевъ, слѣдующихъ за рожденіемъ.

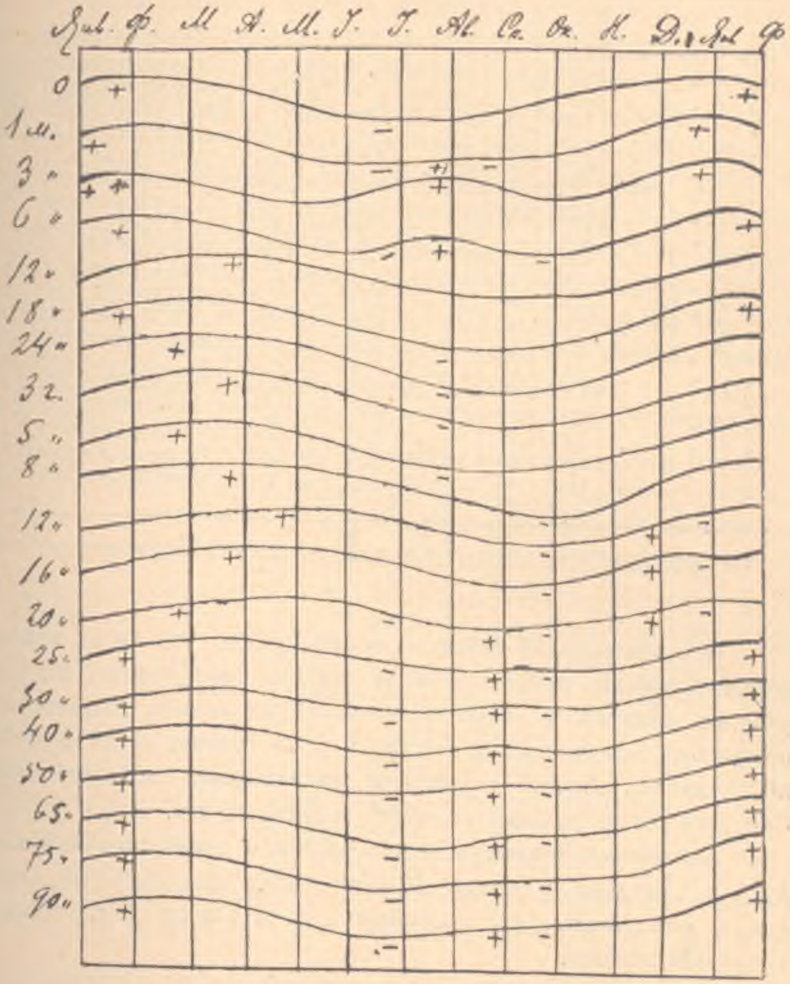
Когда разсматриваютъ число смертныхъ случаевъ, слѣдующихъ за рожденіемъ, необходимо принимать во вниманіе избытокъ рожденій, наблюдаемый послѣ зимы; но и принимая во вниманіе этотъ избытокъ, находятъ, что онъ не оказываетъ замѣтнаго вліянія на указанные раньше выводы. Слѣдовательно, вѣрно все-же то, что наибольшая смертность въ первый годъ послѣ рожденія наблюдается въ теченіе зимы; весной она уменьшается; въ теченіе лѣтнихъ жаровъ нѣсколько увеличивается и затѣмъ испытываетъ новое уменьшеніе до наступленія зимы; такимъ образомъ, умѣренная температура наиболѣе благопріятна для ранняго дѣтства, а чрезмѣрная жара и особенно холодъ гибельны для него, потому что эти крайности непосредственно вліяютъ на еще очень слабый организмъ, или потому что они вліяютъ черезъ посредство матери, являющейся кормилицей. *(Смотрите слѣдующую діаграмму).*

Послѣ перваго года смертность дѣтей совершенно измѣняется: наблюдается одинъ только maximum и одинъ единственный minimum: maximum наступаетъ послѣ зимы, а minimum—лѣтомъ. Около 8—12 лѣтъ эти моменты перемѣщаются нѣсколько и уходятъ впередъ, по порядку мѣсяцевъ, до періода зрѣлости, такъ что maximum смертности наблюдается уже въ маѣ, а minimum—въ октябрѣ. По наступленіи возраста зрѣлости, maximum отодвигается назадъ до 25-лѣтняго возраста, и остается неизмѣнно на февралѣ мѣсяцѣ, до самаго поздняго возраста. Что-же касается minimum'а, то онъ не оставляетъ больше октября мѣсяца; но въ іюлѣ устанавливается другой, который остается тамъ такъ-же до конца жизни человѣка, такъ что между этими двумя *minimum*'ами, находящимися на разстояніи 3 мѣсяцевъ, замѣчается второстепенный, правда слабо выраженный maximum, въ сентябрѣ мѣсяцѣ.

Такимъ образомъ и мужчины и женщины, достигши своего физическаго развитія (25—30 лѣтъ), какъ и дѣти въ теченіе перваго года, наиболѣе подвержены смертности послѣ лѣтнихъ жаровъ и въ особенности послѣ зимнихъ холодовъ.

Слѣдующая таблица сдѣлаетъ болѣе понятными всѣ эти выводы и ихъ числовую цѣнность. Слѣдуетъ предупредить, что въ этихъ вычисленіяхъ я принималъ во вниманіе неодинаковую длину мѣсяцевъ, а сумма смертныхъ случаевъ каждаго года равна 12.

Линіи указываютъ смертность въ различные возрасты.



Фиг. 14.

Знаки + и — обозначаютъ точки *maximum'a* и *minimum'a* каждой линіи смертности.

Таблица, показывающая вліяніе возраста и временъ года на смертность.

Годы.	Январь.	Февраль.	Мартъ.	Апрѣль.	Май.	Іюнь.	Іюль.	Августъ.	Сентябрь.	Октябрь.	Ноябрь.	Декабрь.
Отъ 0 до 1 мѣс.	1,39	1,28	1,21	1,02	0,93	0,83	0,78	0,79	0,86	0,91	0,93	1,07
„ 1 „ 3 „	1,39	1,18	1,15	0,95	0,89	0,82	0,83	0,94	0,83	0,92	0,97	1,13
„ 3 „ 6 „	1,24	1,06	1,02	0,90	0,95	0,95	0,99	1,06	0,99	0,94	0,86	1,02
„ 6 „ 12 „	1,28	1,21	1,27	1,18	1,06	0,84	0,76	0,87	0,81	0,82	0,86	1,03
„ 12 „ 18 „	1,10	1,11	1,24	1,30	1,25	1,03	0,88	0,81	0,74	0,77	0,78	1,98
„ 18 „ 24 „	1,23	1,18	1,21	1,18	1,03	0,84	0,80	0,76	0,75	0,81	1,01	1,18
„ 2 „ 3 лѣтъ.	1,22	1,13	1,30	1,27	1,12	0,94	0,82	0,73	0,76	0,78	0,91	1,01
„ 3 „ 5 „	1,23	1,16	1,26	1,29	1,13	0,94	0,78	0,74	0,73	0,79	0,89	1,03
„ 5 „ 8 „	1,20	1,17	1,32	1,24	1,20	0,96	0,78	0,74	0,76	0,75	0,85	1,02
„ 8 „ 12 „	1,08	1,06	1,27	1,34	1,21	0,99	0,88	0,82	0,81	0,76	0,80	0,96
„ 12 „ 16 „	0,95	0,95	1,14	1,14	1,19	1,04	0,97	0,95	0,96	0,81	0,86	1,04
„ 16 „ 20 „	0,93	0,94	1,07	1,18	1,15	1,03	1,00	0,99	0,89	0,87	0,95	1,01
„ 20 „ 25 „	0,97	1,00	1,09	1,02	1,09	0,96	0,90	0,92	0,96	0,95	1,03	1,11
„ 25 „ 30 „	1,05	1,04	1,11	1,06	1,02	1,02	0,91	0,96	0,95	0,93	0,97	0,97
„ 30 „ 40 „	1,11	1,13	1,11	1,04	0,99	0,92	0,85	0,94	0,99	0,95	0,94	1,08
„ 40 „ 50 „	1,17	1,15	1,13	1,05	0,99	0,86	0,86	0,94	0,93	0,87	0,95	1,11
„ 50 „ 65 „	1,30	1,22	1,11	1,02	0,93	0,85	0,77	0,85	0,89	0,90	1,00	1,15
„ 65 „ 75 „	1,43	1,32	1,18	0,99	0,91	0,77	0,71	0,80	0,88	0,86	0,98	1,17
„ 75 „ 90 „	1,47	1,39	1,16	1,01	0,87	0,77	0,67	0,75	0,84	0,84	1,00	1,21
„ 90 и свыше.	1,58	1,48	1,25	0,96	0,84	0,75	0,64	0,66	0,76	0,74	1,03	1,29
Въ среднемъ.	1,26	1,20	1,17	1,08	1,00	0,88	0,80	0,84	0,86	0,86	0,94	1,09

Изъ предыдущей таблицы можно видѣть, что ни въ какомъ возрастѣ вліяніе временъ года не замѣтно такъ сильно, какъ въ раннемъ дѣтствѣ и старости; и что ни въ какомъ возрастѣ оно не бываетъ меньше, чѣмъ между 20 и 25 годами, когда физическій человѣкъ вполнѣ развитъ и наслаждается полнотой силы. Смотрите также таблицы *рожденій* и *браковъ*, стр. 134 и 142.

Абсолютные *maximum*'ы и *minimum*'ы очень выражены между 1 и 5 годами и послѣ 40—50 лѣтъ, такъ какъ они даютъ числа, находящіяся въ отношеніи 1 къ 2 или къ $2^1/_2$, особенно послѣдній періодъ.

Не то приходится сказать о второстепенныхъ лѣтнихъ *maximum*'ахъ: числа, которыя они даютъ, такъ мало отличаются отъ чиселъ *minimum'a*, лежащаго между ними, что для извѣстныхъ періодовъ можно было-бы приписать эти различія почти неизбѣжнымъ уклоненіямъ въ такого рода изслѣдованіяхъ, если-бъ они не проявлялись одинаковымъ образомъ для многихъ лѣтъ кряду и даже въ частныхъ таблицахъ, различающихъ полъ.

Если мы введемъ теперь это послѣднее различіе, то найдемъ, что для разныхъ періодовъ жизни, взятыхъ въ отдѣльности, числа *минимальныя* и *максимальныя*, какъ абсолютныя такъ и второстепенныя, одинаково приходятся въ одни и тѣ-же мѣсяцы, и что ихъ отношенія сохраняютъ почти одинаковое значеніе; но вовсе не то съ абсолютнымъ числомъ смертныхъ случаевъ для каждаго пола. Тàкъ, какъ мы уже видѣли, въ теченіе перваго года послѣ рожденія, мальчиковъ умираетъ бóльше, чѣмъ дѣвочекъ, и отношеніе числа смертныхъ случаевъ для обоихъ половъ почти одно и то-же для каждаго мѣсяца. Впрочемъ, объ этомъ можно будетъ лучше судить, сравнивая смертные случаи, имѣвшіе мѣсто въ одно и то-же время и въ одинаковыхъ мѣстностяхъ. Я довольствовался сравненіемъ главныхъ возрастовъ, и принялъ *за единицу* число смертныхъ случаевъ среди мужчинъ для каждаго періода. Слѣдующая таблица показываетъ, что въ теченіе первыхъ мѣсяцевъ, какъ и между 20 и 25 годами, число смертныхъ случаевъ гораздо больше для мужчинъ, чѣмъ для женщинъ.

Мѣсяцы.	1-ый мѣсяцъ.	1—2 года.	12—16 лѣтъ,	16—20 лѣтъ.	20—25 лѣтъ.	40—50 лѣтъ.	90 лѣтъ и больше.
Январь	0,75	0,95	1,32	1,04	0,83	1,21	1,18
Февраль	0,70	0,91	1,42	1,08	0,83	1,22	1,30
Мартъ	0,79	0,90	1,11	1,17	0,78	1,18	1,50
Апрѣль	0,73	0,94	1,23	1,18	0,80	1,21	1,44
Май	0,75	0,96	1,45	0,97	0,80	1,30	1,40
Іюнь	0,67	0,97	1,28	1,16	0,73	1,18	1,20
Іюль	0,70	1,00	1,32	1,08	0,78	1,17	1,42
Августъ	0,79	0,92	1,20	0,98	0,77	1,08	1,08
Сентябрь	0,79	0,98	1,31	1,01	0,73	1,06	1,47
Октябрь	0,67	0,99	1,22	1,01	0,68	1,11	1,50
Ноябрь	0,76	1,05	1,20	0,99	0,64	1,11	1,08
Декабрь	0,76	1,05	1,20	0,96	0,64	1,18	1,48
Годъ.	0,74	0,96	1,27	1,05	0,76	1,17	1,34

Эта таблица показываетъ, что въ теченіе перваго мѣсяца на 100 мальчиковъ умираетъ ежегодно 74 дѣвочки, и 96—отъ 1 до

2 лѣтъ: эта разница повторяется даже довольно регулярно, изъ мѣсяца въ мѣсяцъ. Отъ 12 до 16 лѣтъ умираетъ больше дѣвочекъ чѣмъ мальчиковъ. Затѣмъ, отъ 20 до 25 лѣтъ смертность мужескаго пола усиливается. Около 40—50 лѣтъ и до конца жизни, смертность женщинъ вновь беретъ перевѣсъ.

Вводя различіе города и деревни, я не находилъ существенной разницы между результатами, касающимися вліянія временъ года на смертность. Я занимался также изслѣдованіемъ того вліянія, которое могутъ оказать времена года на число мертворожденныхъ; выводы, къ которымъ я пришелъ, были уже приведены на стр. 114.

Послѣ моихъ первыхъ изслѣдованій отношеній, существующихъ для разныхъ возрастовъ между временами года и смертностью, появилась подобная же работа Ломбара изъ Женевы *). Я имѣлъ удовольствіе видѣть, что выводы этого ученаго почти въ точности согласны съ тѣми, къ которымъ я пришелъ съ своей стороны: хотя они охватываютъ только 17.623 смертныхъ случая, легко замѣтить, что они доказываютъ почти то-же, что наблюдалось въ Бельгіи. Нѣкоторыя перемѣщенія *maximum'a* могутъ являться слѣдствіемъ вліянія соединенія разныхъ причинъ, естественно измѣняющихся въ зависимости отъ мѣстности. Такъ Женевскія таблицы даютъ, для перваго мѣсяца послѣ рожденія, результаты сходные съ бельгійскими; но второстепеннаго лѣтняго maximum'a не наблюдается, исключая дѣтей отъ одного мѣсяца до 2 лѣтъ. Только этотъ maximum наступаетъ позже, чѣмъ въ Бельгіи,—въ сентябрѣ и октябрѣ мѣсяцѣ. Къ сожалѣнію, Женевскія числа не различаютъ дѣтей ранняго возраста, между тѣмъ какъ ихъ смертность довольно замѣтно отличается, по моимъ наблюденіямъ. Ломбаръ не допускаетъ, что этотъ второстепенный maximum смертныхъ случаевъ, который онъ находитъ въ сентябрѣ и октябрѣ для дѣтей 1—2 лѣтъ, представляетъ слѣдствіе продолжительности жаровъ, какъ это предполагаютъ Виллермэ и Эдвардсъ: онъ думаетъ, что это можно объяснить и разностью дневной и ночной температуры, которая никогда не бываетъ больше, чѣмъ въ это время года".

Эта разность, по его мнѣнію, главнымъ образомъ вліяетъ на пищеварительный каналъ, органъ, отличающійся у дѣтей сильной

---

*) „De l'influence des saisons sur la mortalité à differents âges"

воспріимчивостью къ тяжкимъ заболѣваніямъ. Однако остается объяснить второстепенный сентябрскій maximum, который я нахожу и въ его числахъ. Впрочемъ, обѣ предполагаемыя причины отличаются конечно нѣкоторой вѣроятностью, но наблюденія недостаточно численны, для того чтобы быть авторитетными.

6. Вліяніе часовъ дня.

Разныя части дня оказываютъ кажется на число смертныхъ случаевъ такое-же вліяніе, какое замѣчено нами относительно рожденій на, стр. 99; чтобы опредѣлить это вліяніе съ достаточной точностью, нужно было однако бо́льше наблюденій, чѣмъ я въ состояніи былъ собрать. Единственныя данныя, которыми я могъ воспользоваться, взяты изъ тридцатилѣтнихъ записей Брюссельскаго госпиталя св. Петра; вотъ выводы *).

	Часы смерти.	случаевъ.
По—полуночи	12—6 часовъ	1,397
До—полудня	6—12 „	1,321
По—полудни	12—6 „	1,458
До—полуночи	6—12 „	1,074
		5,250

Разница между днемъ и ночью менѣе рѣзко выражена, чѣмъ для рожденій; напротивъ въ данномъ случаѣ мы видимъ, что днемъ насчитывали больше смертныхъ случаевъ. Впрочемъ, обѣ первыя части дня представляютъ почти одинаковое число ихъ; особенно замѣтна разница между данными за 6 часовъ, слѣдующихъ за полуднемъ, и за 6 часовъ, предшествующихъ полуночи.

Докторъ Бэкъ изъ Гамбурга такъ-же точно изслѣдовалъ вліяніе часовъ на смертность, но его выводы меньше сходятся съ нашими, чѣмъ при изслѣдованіи рождаемости (стр. 100). Вотъ какъ онъ ихъ представилъ, принимая во вниманіе вліяніе временъ года и приводя ихъ сумму къ 1000. (См. таб. на 200 стр.)

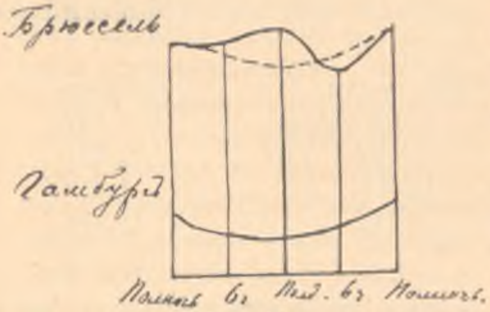
Изъ столбца *среднихъ* видно,что наблюдаемыя ночью величины больше наблюдаемыхъ днемъ. То-же мы видѣли относительно рожденій, въ Брюсселѣ какъ и въ Гамбургѣ (стр. 99). Но для смертныхъ случаевъ въ Брюсселѣ эти выводы не оправдываются:

---

*). Болѣе детально см. „*Correspondance mathématique*“, 1827 г. III т. стр. 42 и „*Recherches sur la reproduction*, etc.

Смертность.	Зима.	Весна.	Лѣто.	Осень.	Среднее.
По полуночи	315	321	292	281	306
До полудня	243	260	236	220	242
По полудни	194	211	220	227	211
До полуночи	248	207	252	272	241

триста—четыреста смертныхъ случаевъ *до полуночи* были можетъ быть записаны *по полудни*, какъ это показываетъ слѣдующая пунктирная линія.



Фиг. 15.

Впрочемъ, я повторяю, для того чтобы заслужить необходимое довѣріе, эти изслѣдованія должны были-бы быть болѣе обширны и покоиться на бóльшихъ числахъ. Мы здѣсь скорѣе намѣчаемъ, чтó остается сдѣлать, чѣмъ тó, чтó уже сдѣлано.

Глава 6-я.

ПРОГРЕССЪ СТАТИСТИКИ ВЪ НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ.

Мы видѣли, какъ располагаются страны относительно числа рожденій; не менѣе любопытно знать, какъ онѣ располагаются по числу смертныхъ случаевъ. Это сравненіе столь-же интересно, какъ и первое, которому оно служитъ дополненіемъ: мы укажемъ главные выводы въ слѣдующей главѣ.

Швеція и Норвегія—двѣ страны, фигурирующія въ началѣ таблицы, относящейся къ увеличенію населенія на стр. 202; съ другой стороны, мы уже видѣли изъ первой таблицы для эпохи, предшествовавшей 1832 году, что плодовитость въ этихъ странахъ была средней. Отъ этого необходимо долженъ происходить приростъ населенія, такъ какъ одинъ индивидуумъ родится на 30 жителей (стр. 120), между тѣмъ какъ умираетъ одинъ приблизительно на 56. Англія находится въ подобномъ—же положеніи; затѣмъ слѣдуютъ Бельгія, Португалія, Франція, Данія, Ганноверъ. Это положеніе кажется доказываетъ истинное благосостояніе страны, такъ какъ вмѣстѣ съ слабой смертностью наблюдается быстрый приростъ населенія.

Франція отличалась наименьшей плодовитостью изъ 16 государствъ, взятыхъ нами для сравненія; однако смертность въ ней почти такая-же точно, какъ и въ тѣхъ странахъ: въ среднемъ тамъ насчитываютъ только одинъ смертный случай на 45—46 индивидуумовъ, между тѣмъ какъ одинъ ребенокъ рождается на 39 жителей; такимъ образомъ, числовые выводы для нея выгодны *).

Если-бы мы могли судить объ этомъ по даннымъ одного только года, то Греція и Португалія дали бы сравнительно значительное число дѣтей.

Нидерланды, Пруссія, Австрія, Саксонское королевство, Испанія, Баварія находятся между собою почти въ такомъ же отношеніи: плодовитость тамъ нѣсколько ниже средней; тамъ рождается одинъ ребенокъ на 27—29 жителей, а одинъ смертный случай насчитываютъ на 32—38 жителей. Приростъ населенія происходитъ въ указанныхъ выше странахъ, но при менѣе благопріятныхъ условіяхъ. 1859 годъ казалось былъ фатальнымъ для Нидерландовъ, и поставилъ-бы эту страну въ довольно плохое положеніе, если-бъ среднія предыдущихъ 10 лѣтъ не привели ее къ положенію, которое кажется и принадлежитъ ей согласно всѣмъ предыдущимъ даннымъ.

Съ другой стороны, средняя смертность, за исключеніемъ Россіи, равна одному почти на 44 жителей; такимъ образомъ, современное европейское населеніе значительно возрастаетъ: на 44 рождающихся человѣкъ она теряетъ ежегодно только 30. Этотъ приростъ, вычисленный въ общемъ, на основаніи наблюденій послѣднихъ 10 лѣтъ, долженъ разсматриваться только какъ приблизительный.

Распредѣляя разныя страны по числу смертныхъ случаевъ, которые онѣ давали въ послѣдніе годы, надо было бы ихъ рас-

---

*). Въ дѣйствительности приростъ населенія, особенно если онъ слишкомъ быстрый, принимая во вниманіе средства государства, въ которомъ онъ наблюдается, не долженъ разсматриваться, какъ дѣйствительный признакъ благосостоянія.

положить въ слѣдующемъ порядкѣ: Англія, Норвегія, Швеція, Данія, Бельгія, Франція, Ганноверъ, Нидерланды, Пруссія, Баварія, Австрія, Испанія, Саксонское королевство. Этотъ порядокъ мало уклоняется отъ установленнаго нами около 30 лѣтъ тому назадъ; относительное число почти то-же, но абсолютное число стало болѣе благопріятнымъ.

Государства.	Населеніе около 1860 г.	Одинъ годъ наблюденій.	Жителей на 1 см. случай по 1 году.	Нѣсколько лѣтъ наблюденій до 1832 г.	Жителей на 1 см. случай по нѣсколькимъ годамъ	Жителей на 1 см случай до 1832 г. *).
Швеція . .	3.859.728	1860	57,18	5 лѣтъ	47,67	41,1
Норвегія . .	1.490.047	1860	54,38	10 „	58,42	41,1
Англія и Уэльсъ . . .	20.066.224	1860	54,28	20 „	53,23	51,0
Бельгія . .	4.529.560	1860	48,77	10 „	44,27	43,1
Португалія .	3.693 363	1860	48,08	—	„	40,0
Франція . .	37.386.313	1860	47,83	4 „	43,14	39,7
Греція . . .	1.196.810	1861	47,72	—	„	30,0
Данія . . .	2.605.024	1859	46,05	5 „	46,64	45,0
Ганноверъ .	1.888.070	1858	42,75	5 „	44,15	„
Баварія . .	4.689 837	1860	38,15	10 „	35,54	„
Испанія . .	15.658,531	1861	37,48	4 „	36,24	40,0
Пруссія . .	18.491.220	1861	37,16	10 „	38,19	36,2
Австрія . .	37.450.883	1857	36,83	3 „	36,34	40,0
Сакс. Кор. .	2.225.240	1861	33,03	10 „	36,02	„
Нидерланды.	3.293.577	1859	31,95	10 „	40,46	38,0
Россія . . .	59,300,246	1858	26,60	—	„	„

Россія потеряла въ 1858 году относительно гораздо болѣе значительное число жителей, чѣмъ другія страны: 1 смертный случай насчитывали на 26,6 жителей. Въ то-же время, число рожденій было такъ же точно больше, чѣмъ всюду въ другихъ странахъ: 1 рожденіе приходилось на 20,5. Правда, эти числа констатируютъ приростъ населенія, потому что 205 смертныхъ случаевъ насчитывается на 266 рожденій; но легко видѣть, при какихъ неблагопріятныхъ обстоятельствахъ долженъ происходить подобный приростъ населенія, если-бъ онъ былъ постояннымъ, и какъ онъ неблагопріятенъ для народа. Этотъ выводъ покоится впрочемъ на данныхъ одного только года, который можетъ быть исключительнымъ, и мы охотно допускаемъ это предположеніе. Съ другой сто-

---

*) См. выше стр. 154.

роны можетъ случиться, что величина населенія недостаточно точно опредѣлена, и что зло больше кажущееся, чѣмъ дѣйствительное. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что эта оцѣнка совершенно ошибочна и что населеніе вдвое больше кажущагося; тогда насчитывался бы 1 смертный случай на 53 человѣка, а 1 рожденіе на 41 человѣка: это поставило бы Россію въ весьма благопріятное положеніе, и она находилась бы на ряду съ Англіей, Швеціей и Даніей. Ясно, какое значеніе имѣетъ здѣсь опредѣленіе величины населенія: точность этой величины могла бы быть провѣрена въ извѣстной мѣрѣ, въ случаѣ недостатка хорошей переписи, при помощи списка возрастовъ умершихъ, если-бы онъ имѣлся *).

Важно знать характеръ прироста населенія, ибо если не ввести величины самаго населенія, то числа рожденій и смертныхъ случаевъ недостаточны. Очевидно, что если въ теченіе 10—20 лѣтъ число рожденій превосходитъ число смертныхъ случаевъ, то это положеніе вещей можетъ имѣть мѣсто только наряду съ дѣйствительнымъ приростомъ населенія; но приростъ можетъ происходить различнымъ образомъ: поэтому интересно знать, какимъ образомъ? Въ самомъ дѣлѣ, какая польза была-бы въ томъ, что

---

*) Я предположу, напримѣръ, что въ нѣсколькихъ странахъ одинаково насчитываютъ 3 смертныхъ случая на 4 рожденія; можно-ли сказать что эти страны находятся въ одинаково благопріятныхъ условіяхъ? Я далекъ отъ этого мнѣнія. Россія давала въ 1858 году 1 рожденіе на 20,5 жителей и 1 смертный случай на 26,6; это составляетъ отношеніе почти равное $\frac{3}{4}$. Бельгія дала то-же отношеніе, такъ какъ въ теченіе 1851—1860 г. она насчитывала въ среднемъ 33,0 смертныхъ случая въ годъ при 44,2 рожденія. Но значеніе этихъ отношеній весьма различно, хотя математическія величины одинаковы: эта послѣдняя наука не видитъ, правда, существенной разницы между дробями $\frac{20,5}{26,6}$ и $\frac{33,0}{44,2}$, которыя она разсматриваетъ какъ примѣрно равныя $\frac{3}{4}$; статистикъ-же принимаетъ во вниманіе характеръ чиселъ и не смѣшиваетъ полезнаго возраста человѣка съ дѣтствомъ. Впрочемъ, есть основаніе полагать, что русское населеніе еще недостаточно точно опредѣлено: если-бы мы предположили, что оно увеличилось въ отношеніи 7 къ 11, то оно было-бы почти такого-же характера, какъ и наше населеніе; а если-бъ увеличеніе его было равно 7 : 12, то Россія неоспоримо занимала-бы первое мѣсто, по крайней мѣрѣ въ настоящій моментъ.

ежегодно рождалось бы на 10 тысячъ дѣтей больше, если-бъ эти 10 тысячъ дѣтей должны были умереть, не успѣвши стать полезными? Очевидно это было-бы съ точки зрѣнія статистики какимъ-то фатальнымъ налогомъ. Въ общемъ можно только сказать, что отношеніе числа рожденій къ числу смертныхъ случаевъ можетъ оставаться однимъ и тѣмъ-же при самыхъ различныхъ обстоятельствахъ.

Необходимо стало быть узнать величину населенія или по крайней мѣрѣ возрасты въ моментъ смерти. Эта двойная цѣль очевидно достигается точной переписью населенія.

Когда народъ вполнѣ сформировался, и его средства существованія соотвѣтствуютъ уровню его потребностей, можно въ общемъ сказать, что стаціонарное его состояніе является его нормальнымъ состояніемъ: въ дроби случаи $\frac{\textit{рожденія}^{*)}}{\textit{смерти}}$ числитель становится равнымъ знаменателю, а коэффиціентъ равняется единицѣ. При обратномъ состояніи населеніе возрастаетъ или убываетъ, т. е. число рожденій больше или меньше числа смертныхъ случаевъ, или продукты будутъ въ избыткѣ или недостаткѣ.

Такимъ образомъ, какъ уже сказано въ другомъ мѣстѣ, современная промышленная жизнь цивилизованныхъ странъ имѣетъ своимъ послѣдствіемъ увеличеніе населенія и стремится доказать, какъ благодѣтельны для жизни всѣ новыя изобрѣтенія, легкость обмѣна и множество другихъ причинъ: всѣ эти приращенія могутъ быть численно равными, не имѣя одинаковаго значенія.

Расположимъ страны по уменьшающимся показателямъ отношенія числа рожденій къ числу смертныхъ случаевъ; общее же количество населенія государствъ оставимъ въ сторонѣ: его можно найти въ предыдущей таблицѣ. (См. таб. на 205 стр.)

Если эта таблица и оставляетъ еще желать чего-нибудь въ отношеніи распредѣленія странъ относительно прироста населенія, она все же сообщаетъ важныя свѣдѣнія объ этомъ предметѣ. Избытокъ рожденій надъ смертными случаями, констатируемый ежегодно, безусловно является доказательствомъ относительнаго благосостоянія, которое можетъ значительно измѣняться отъ одной страны къ другой. Въ дѣйствительности, какъ мы сказали, изъ того, что населеніе возрастаетъ, нельзя сдѣлать вывода о хорошемъ благосостояніи страны, особенно если избытокъ рожденій

---

*) См. выше стр. 160

Страны.	Годы наблюденій.	Число.		Отношеніе числа рожденій къ числу смерт. сл. 1851—1860*)
		Рожденій.	Смертн. сл.	
Норвегія	1851—1860	49.230	25.506	1,93
Англія и Уэльсъ	1851—1860	647.165	376.937	1,72
Португалія . . .	1861	152.250	76.816	1,72
Швеція	1856—1860	125.647	80.966	1,55
Данія	1855—1859	85.673	55.853	1,53
Сакс. Корол. . .	1859—1861	91,677	61.774	1,48
Пруссія . . .	1859—1861	702,676	484.068	1,45
Греція	1860—1861	31 630	22.969	1,38
Австрія	1854—1857	1,379.781	1,030.659	1,34
Бельгія	1851—1861	137.120	102.327	1,34
Ганноверъ . . .	1854—1858	57,245	42.762	1,34
Испанія	1858—1861	571.886	432.067	1,32
Нидерланды . .	1850—1859	107.598	81 397	1,32
Россія	1858	2,896.950	2,229.736	1,30
Баварія	1851—1860	152.236	131.947	1,16
Франція	1851—1860	953.593	866.722	1,11

надъ смертными случаями установленъ только на основаніи наблюденій одного года или только нѣсколькихъ лѣтъ. Если-бъ Англія, напримѣръ, давала ежегодно двойное число рожденій и это компенсировалось-бы двойнымъ числомъ смертныхъ случаевъ, то въ отношеніи прироста не произошло-бы никакого измѣненія; но

---

*) Предположимъ, что у какого-нибудь народа отношеніе числа рожденій къ числу смертныхъ случаевъ будетъ $\frac{n}{d}$: эта величина не измѣнилась-бы, если-бъ обѣ части умножили на одинъ и тотъ-же коэффиціентъ напримѣръ, $\underline{a}$: тогда имѣли-бы $\frac{n.a}{d.a}$ И вотъ эта величина можетъ *численно* измѣняться, давая въ глазахъ статистика различные результаты. Въ Россіи, напримѣръ, 1 рожденіе насчитываютъ на 20 жителей, а 1 смертный случай на—26, что даетъ отношеніе числа рожденій къ числу смертныхъ случаевъ, равное $\frac{26}{20}$, т. е. 1,30, величина болѣе благопріятная чѣмъ отношеніе равное для Франціи, по нашей таблицѣ, 1,11. Но во Франціи насчитываютъ ежегодно 1 рожденіе на 40 жителей и 1 смертный случай на 48: это даетъ $\frac{48}{40}$, или лучше $\frac{24}{20}$, величина ариѳметически меньшая полученной раньше, какъ мы сейчасъ сказали. Но какая огромная разница, когда мы получаемъ тѣ-же результаты при помощи половиннаго числа рожденій и смертныхъ случаевъ, если принять во вниманіе тѣ огромныя непріятности и потери, которыя должны вызывать эти быстрыя перемѣны.

разсудительный человѣкъ присмотрится еще и къ тому, что при подобныхъ обстоятельствахъ страна подвергается большимъ непріятностямъ и несетъ значительныя потери, если при этомъ увеличивается число нищихъ. Произведенное нами вычисленіе не рѣшаетъ вопроса окончательно, но можетъ быть полезнымъ. Можетъ случиться, что плохо опредѣленное число населенія приведетъ и опытный глазъ къ значительнымъ ошибкамъ.

Теперь введемъ различіе половъ въ разныхъ странахъ, разсматривая ихъ въ отношеніи смертности.

Для облегченія сравненій, вычислимъ отношеніе между числомъ смертныхъ случаевъ среди мужчинъ и женщинъ каждой страны и расположимъ ихъ по значенію, отдавая предпочтеніе результатамъ, полученнымъ за нѣсколько лѣтъ, такъ какъ при такомъ способѣ исчисленія всего лучше устраняются случайныя пертурбаціонныя причины (les causes perturbatrices accidentelles). Для трехъ странъ, Россіи, Греціи и Португаліи, пришлось воспользоваться данными одного года *).

Страны.	Нѣсколько лѣтъ.	Отношеніе мужскихъ смертныхъ случаевъ къ женскимъ	1 годъ.	Отношеніе числа см. случ. мужч. къ женщин.
Греція ****)	—	—	1861	1,102
Сакс. Кор. ***)	1859—1860	1,076	1861	1,077
Пруссія	1859—1860	1,074	1861	1,067
Испанія	1858—1861	1,068	1861	1,062
Австрія	1849—1857	1,053	1857	1,053
Данія ***)	1855—1859	1,051	1859	1,075
Баварія	1851—1860	1,043	1860	1,076
Россія ****)	—	—	1858	1,041
Швеція **)	1856—1860	1,032	1860	1,035
Норвегія	1851—1860	1,028	1860	1,028
Англія	1841—1860	1,026	1850	1,022
Нидерланды **)	1850—1859	1,016	1859	1,027
Франція **)	1851—1860	1,011	1860	1,013
Ганноверъ	1854—1858	1,002	1858	1,005
Бельгія **)	1851—1860	1,989	1860	1,024
Португалія***)	—	—	1860	0,970

---

*) Числа, на основаніи которыхъ вычислены эти данныя, приведены въ уже цитированномъ трудѣ: „*Statistique internationale*“ стр. XLVIII Введеніе.

**) Исключая мертворожденныхъ.

***) Включая мертворожденныхъ.

****) Даетъ смертные случаи по поламъ для 1 года.

Число смертныхъ случаевъ среди мужчинъ въ разныхъ странахъ нѣсколько больше, чѣмъ среди женщинъ, какъ это можно было предвидѣть уже и на основаніи числа рожденій. Что-же касается Франціи, Бельгіи и нѣкоторыхъ другихъ странъ, то меньшее число смертныхъ случаевъ среди мужчинъ можетъ быть связано съ смертными случаями, имѣющими мѣсто за границей особенно вслѣдствіе военнаго положенія *).

Посмотримъ теперь, проявляется-ли вліяніе временъ года на числѣ смертныхъ случаевъ одного года **). Какъ мы уже узнали, начало лѣта достаточно даетъ себя знать: смертныхъ случаевъ въ это время вообще меньше; въ концѣ зимы наблюдается обратное. Въ началѣ осени также наблюдается второстепенный maximum смертныхъ случаевъ и почти тотчасъ-же minimum, какъ будто слѣдующій мѣсяцъ долженъ былъ возмѣстить ту довольно слабую потерю, которая была вызвана можетъ быть излишествами вслѣдствіе лѣтнихъ жаровъ и наступленія осени.

Эти результаты указаны въ слѣдующей таблицѣ, вслѣдъ за которой мы укажемъ смертность по триместрамъ или скорѣе по сезонамъ года. (См. таб. на 208 стр.)

Maximum смертныхъ случаевъ, наблюдающійся въ концѣ зимы и тотъ, который замѣчается 6 мѣсяцевъ спустя, въ началѣ осени, заслуживаетъ особаго спеціальнаго вниманія, казалось бы, что излишняя смертность связана только съ недостаточными предосторожностями противъ перемѣнъ погоды. Послѣ зимы опасностей больше и онѣ даютъ мѣсто болѣе продолжительнымъ болѣзнямъ: съ другой стороны, послѣ лѣта гораздо больше внезапныхъ излишествъ, и захватывается часть доли, которую требуетъ отъ

---

*) Не слѣдуетъ смѣшивать неодинаковаго отношенія между лицами обоего пола, взятыми въ моментъ рожденія или въ цѣломъ обществѣ въ какомъ-нибудь возрастѣ. Первое отношеніе, какъ было сказано, даетъ почти постоянную величину 100 : 105, неизмѣнную изъ года въ годъ; но для взрослыхъ людей, напримѣръ, оно уже не такое: вслѣдствіе смертности или эмиграціи или другихъ причинъ, мужское населеніе можетъ быть количественно меньше женскаго. Это имѣетъ мѣсто въ Бельгіи въ настоящій моментъ, какъ это показываетъ предыдущая таблица.

**) Интересно сравнить *мѣсячныя* числа рожденій, браковъ и смертныхъ случаевъ для нѣсколько продолжительнаго ряда лѣтъ: ихъ можно найти въ настоящей работѣ на стр. 134, 142 и 210. Мѣсячное вліяніе, оказывающееся почти одинаковымъ для рожденій и смертныхъ случаевъ, заслужи-ваетъ совершенно особаго вниманія.

Мѣсячная смертность.

	Мѣсяцы.	Австрія. 1856—1857.	Бельгія. 1851—1860.	Франція. 1853—1860.	Нидерланды 1850—1859.	Швеція. 1856—1860.	Норвегія. 1851—1860.
Зима.	Январь .	194.554	123 376	659.990	72 296	37.110	24.522
	Февраль.	191.180	121.265	640.250	69.611	33.997	21.112
	Мартъ *)	215.267	132.788	684.964	75.433	39.074	24.298
Весна.	Апрѣль .	187.920	120.623	623.339	67.195	38.304	24.322
	Май . .	167.626	116.953	582.953	65.630	36.142	23.491
	Іюнь . .	139.522	107.336	518.518	59.398	27.956	19.527
Лѣто.	Іюль . .	143.650	104.467	556.879	58.715	25.484	19.086
	Августъ.	163.684	106.324	672.797	63.826	27.699	18.846
	Сентябрь	161.984	108.311	664 175	70.401	36.579	19.240
Осень.	Октябрь.	159.326	109.531	620.497	72.543	34.187	19.653
	Ноябрь .	179.863	106.944	570.808	67.695	33.060	20.352
	Декабрь.	185.409	113.279	595.784	71.233	35.237	20.496
	Всего . .	2.089.045	1.371.197	7.390.954	813.972	404.829	254.945
	Зима	601.001	377.429	1.985.204	217.340	110.181	69.932
	Весна	495.068	314.912	1.724.810	192.218	102.402	67.340
	Лѣто	469.278	319.102	1.893.851	192.943	89.762	57.172
	Осень	524.598	329.754	1.787.089	211.471	102.484	60.501

явленій смерти слѣдующій мѣсяцъ. Въ теченіе зимы и начал весны человѣкъ какъ-будто наталкивается на преграду, котору онъ и не старается перешагнуть, особенно при болѣзняхъ, от которыхъ предосторожности могли-бы еще его предохранить и сдѣлать годовую смертность болѣе однообразной. Этотъ minimu находится кажется для Бельгіи по крайней мѣрѣ, въ мѣсяцѣ іюл или августѣ, и непосредственно сопровождается очень незначительнымъ второстепеннымъ maximum'омъ въ сентябрѣ.

---

*) Мы принимали во вниманіе длину мѣсяцевъ: въ февралѣ, напримѣръ, только 28 дней, исключая высокосныхъ лѣтъ, когда онъ имѣет 29 дней, между тѣмъ какъ смежные мѣсяцы имѣютъ по 31 дню; увеличеніе, которое испытываетъ вслѣдствіе этого февральское число, перемѣщаетъ maximum между февралемъ и мартомъ. То-же самое съ сентябрем имѣющимъ 30 дней и находящимся между 2 мѣсяцами по 31 дню: этот maximum, впрочемъ, совершенно второстепенный.

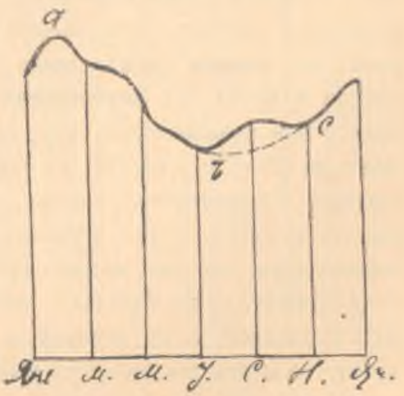
Слѣдующая таблица укажетъ главные результаты, полученные для смертности въ теченіе 15 лѣтъ, съ 1851 по 1865 годъ, по наблюденіямъ, произведеннымъ въ Бельгіи.

Вліяніе временъ года на смертность по бельгійскимъ наблюденіямъ.

Годъ	Январь.	Февраль.	Мартъ.	Апрѣль.	Май.	Іюнь.	Іюль.	Августъ.	Сентябрь.	Октябрь.	Ноябрь.	Декабрь.
1851	1,07	1,19	1,29	1,19	1,13	0,98	0,85	0,79	0,83	0,79	0,91	0,98
1852	1,08	1,12	1,27	1,20	1,05	0,91	0,89	0,87	0,91	0,92	0,85	0,93
1853	0,99	1,30	1,33	1,21	1,08	0,91	0,80	0,75	0,75	0,77	0,90	1,21
1854	1,11	1,07	1,07	1,04	1,93	0,86	0,82	0,85	1,19	1,10	0,99	0,97
1855	1,35	1,51	1,16	1,09	0,99	0,87	0,77	0,80	0,81	0,80	0,84	1,01
1856	1,10	1,14	1,26	1,17	1,06	0,90	0,84	0,84	0,89	0,82	1,00	0,98
1857	1,04	1,14	1,10	1,01	0,94	0,84	0,82	0,93	1,04	1,02	0,98	1,14
1858	1,44	1,38	1,31	1,09	0,95	0,88	0,78	0,76	0,77	1,81	0,98	0,90
1859	0,97	1,02	1,05	1,02	0,90	0.81	0,87	1,13	1,19	1,11	0,92	1,01
1860	1,11	1,25	1,27	1,14	1,02	0,92	0,81	0,74	0,80	0,84	1,02	1,08
1861	1,23	1,05	1,07	1,08	1,05	0,89	0,84	0,93	0,99	0,93	0,97	0,97
1862	1,25	1,21	1,26	1,12	0,99	0,87	0,82	0,79	0,85	0,82	0,97	1,05
1863	1,03	1,08	1,18	1,11	1,03	0,94	0,89	0,94	0,89	0,85	0,97	1,09
1864	1,39	1,24	1,11	1,06	0,98	0,87	0,80	0,81	0,83	0,86	0,96	1,09
1865	1,18	1,22	1,24	1,15	1,01	0,92	0,92	0,87	0,85	0,90	0,84	0,90
Въ среднемъ .	1,12	1,24	1,22	1,15	1,04	0,91	0,83	0,81	0,90	0,88	0,90	1,02
31 день . . .	1,12	1,35	1,22	1,19	1,04	0,94	0,83	0,81	0,93	0,88	0,93	1,02

Подъ послѣдними числами, дающими *среднія* значенія таблицы, мы помѣстили во второй строкѣ величины, найденныя нами при предположеніи, что всѣ мѣсяцы одинаковой длины, въ 31 день.

Если мы разсмотримъ затѣмъ человѣка въ моментъ его вступленія въ жизнь, то найдемъ въ слѣдующей таблицѣ результаты 15-лѣтнихъ наблюденій надъ дѣтьми, которыхъ



Фиг. 16.

принесли мертвыми въ гражданское бюро Бельгіи, вводя три важныхъ различія: 1) мертворожденные до родовъ, 2) умершіе во время родовъ; 3) умершіе непосредственно вслѣдъ за родами и до заявленія въ гражданское бюро. Записи велись тщательно, принимая во вниманіе законность и незаконность рожденія вмѣстѣ съ поломъ. Эти записи требуютъ большей тщательности чѣмъ другія свѣдѣнія, собираемыя гражданскимъ бюро: есть однако основаніе полагать, что эти записи выполняются съ достаточной точностью, почему и получились удовлетворительные и сравнимые результаты. Сходство данныхъ, доставленныхъ разными бюро въ теченіе длиннаго ряда лѣтъ, служитъ доказательствомъ въ пользу ихъ точности. См. таб. на 211 стр.)

Предыдущая таблица показываетъ, какъ мы сказали, сколько было дѣтей мертвыхъ до, во время или непосредственно вслѣдъ за родами, а послѣдній столбецъ даетъ сумму этихъ трехъ чиселъ, т. е. число дѣтей, представленныхъ въ гражданское бюро мертвыми. Такимъ образомъ, видно изъ послѣдней горизонтальной строки, что въ среднемъ, въ году, представлено гражданскому бюро 3.510 мертвыхъ законнорожденныхъ дѣтей мужескаго пола; а среди нихъ было 2.056 умершихъ до родовъ, 638 во время родовъ и 817 умершихъ непосредственно вслѣдъ за родами. Хотя вполнѣ полагаться на точность чиселъ такой таблицы и трудно, однако она заслуживаетъ довѣрія, такъ какъ записи бельгійскаго гражданскаго бюро вообще отличаются точностью.

Есть другой родъ данныхъ, также требующихъ точнаго веденія записей гражданскаго бюро для полученія удовлетворительныхъ выводовъ; они приведены въ слѣдующей таблицѣ, обнаруживающей вліяніе, оказываемое проживаніемъ въ городѣ или деревнѣ на данныя гражданскаго бюро, каковы рожденія, смертные случаи и браки. 11 внутреннихъ европейскихъ государствъ, какъ видно, всѣ показываютъ, что въ среднемъ насчитываютъ 1 рожденіе на 29—30 жителей въ городахъ какъ и въ сельскихъ общинахъ. Существуетъ, правда, разница, такъ какъ для городовъ находятъ 29,12, а для деревень 29,80, но эта разница столь незначительна, что ею можно пренебречь. Для смертности разница болѣе замѣтна: въ городахъ насчитываютъ 1 смертный случай на 33,57 жителей, а въ деревняхъ 1 на 41,95. Эта разница находится, кажется, въ связи съ городскимъ оживленіемъ и страстями, менѣе благопріятными для жизни, чѣмъ деревенскій покой. При

Годы. (Бельгія).	Мертворожденныхъ до родовъ.				Умершихъ во время родовъ.				Умершихъ послѣ родовъ.				Дѣтей представленныхъ мертвыми.			
	Законнорож.		Незаконнор.		Законнорож.		Незаконнор.		Законнорож.		Незаконнор		Законнорож		Незаконнор.	
	муж.	жен.	муж.	жен.	муж.	жен.	муж.	жен.	муж.	жен.	муж.	жен.	муж	жен.	муж.	жен.
1855 . . .	1,762	1.290	190	181	522	326	50	38	714	510	57	48	2 998	2.126	297	267
1856 . . .	1.857	1.481	231	192	506	370	37	44	763	518	73	64	3 126	2.369	341	300
1857 . . .	2 125	1.528	286	211	619	429	58	50	778	576	79	77	3.522	2.533	423	338
1858 . . .	2.126	1.591	288	223	626	444	62	56	848	641	96	67	3.593	2.676	453	346
1859 . . .	2.189	1.659	303	239	727	536	73	80	898	637	62	71	3 814	2.832	438	390
1860 . . .	2.152	1.604	240	195	635	443	58	56	844	635	66	30	3 631	2.682	364	301
1861 . . .	2.173	1.589	250	240	636	408	60	59	804	589	86	71	3.613	2.586	396	370
1862 . . .	2 125	1.642	233	241	687	410	41	43	825	554	73	65	3.587	2.606	347	349
1863 . . .	2.367	1.685	278	245	707	488	62	45	852	619	88	76	3.926	2.792	428	366
1864 . . .	2.394	1.697	269	237	789	563	70	48	892	682	95	78	4 075	2.942	434	363
1865 . . .	2.391	1.715	251	216	713	492	52	62	919	636	91	60	4.023	2.843	394	338
1851—1855	8.936	6.672	1.048	972	2.972	1.982	337	259	3.831	2.764	361	297	15.739	11.418	1.746	1.528
1856—1860	10 449	7.863	1.348	1.060	3.113	2.222	288	286	4.131	3.007	376	309	17.686	13.092	2.019	1.675
1861—1865	11.450	8.328	1.281	1.179	3.482	2.361	285	257	4.292	3.080	433	350	19.224	13.769	1.999	1.786
1851—1865	30.835	22 863	3,677	3.211	9.567	6,565	910	802	12.254	8.851	1.170	956	52.649	38.279	5.764	4.989
Средній годъ . .	2.056	1.525	245	214	638	438	60	53	817	590	78	64	3.510	2.552	384	333

прочихъ равныхъ условіяхъ, смертные случаи такъ-же какъ и браки многочисленнѣе внутри городовъ.

Число жителей на 1 бракъ, 1 рожденіе и 1 смертный случай, съ различеніемъ городовъ и деревень.

Страны *).	Годы.	Браковъ.		Рожденій.		Смертн. случ.	
		Городъ. 1 къ	деревня 1 къ	Городъ. 1 къ	деревня 1 къ	Городъ. 1 къ	деревня 1 къ
Франція . .	1853—54	121,77	134,42	32,74	39,19	31,51	42,21
Нидерланды	1850—54	114,80	127,69	27,11	28,70	35,55	43,03
Бельгія . .	1851—55	131,01	148,53	29,47	33,52	34,35	44,31
Швеція . .	1851—55	126,82	137,83	30,82	30,41	28,95	46,86
Данія . . .	1850—54	103,89	112,63	28,73	30,29	37,41	49,77
Шлезвигъ .	1845—54	131,63	128,72	34,41	32,67	35,17	48,49
Голштинія .	1845—54	120,85	125,18	30,26	29,43	38,73	44,15
Вюртембергъ	1843—52	—	—	24,74	24,67	30,06	32,31
Саксонія . .	1846—49	132,93	119,05	24,44	24,58	31,10	34,70
Ганноверъ .	1854—55	116,32	126,49	32,86	31,52	38,52	41,17
Пруссія . .	1849	109,87	108,40	24,79	22,80	27,97	34,46
Въ средн.	—	121,09	126,89	29,12	29,80	33,57	41,95

Не забудемъ при подобныхъ сравненіяхъ, что есть разница между жителями разныхъ странъ, которая должна отзываться и на записяхъ соотвѣтствующихъ гражданскихъ бюро: эта разница, впрочемъ, постепенно уменьшается. Въ Россіи, напримѣръ, существующее особаго рода рабство должно породить въ числахъ, относящихся къ высшимъ и низшимъ классамъ населенія, различія, неизвѣстныя центральной Европѣ. Эти неравенства все больше и больше исчезаютъ въ силу постепенной отмѣны различій въ гражданскомъ состояніи разныхъ классовъ общества. Если-бъ законы и привычки были повсюду одинаковы, то слѣдовало-бы ожидать одинаковыхъ результатовъ: вполнѣ очевидно, что государство опредѣляетъ состояніе общества, но различія, связанныя съ кли-

---

*) *„Allgemeine Bevölkerungsstatistik Vorlesungen von D-r I. E.— Wappäus. 2-й т. 481 стр. in. 8°. Leipzig, 1861.*

матомъ, будутъ естественно господствовать надъ соціальными результатами *).

Глава 7-я.

О ВЛІЯНІИ ПЕРТУРБАЦІОННЫХЪ ПРИЧИНЪ НА ЧИСЛО СМЕРТНЫХЪ СЛУЧАЕВЪ.

1). Вліяніе профессій, степени зажиточности и т. п.

При современномъ состояніи науки почти невозможно точно опредѣлить различную степень вѣроятности смертности, которой

---

*) Чтобы облегчить сравненіе таблицы, помѣщенной на предыдущей страницѣ съ данными новѣйшихъ наблюденій, мы обратились къ многимъ изъ нашихъ почтенныхъ сотоварищей сосѣднихъ странъ: они дали намъ возможность составить нижеслѣдующую таблицу, извлеченную изъ гораздо болѣе обширныхъ таблицъ, напечатанныхъ въ концѣ этой книги, которыя и позволятъ составить правильное представленіе объ основѣ современной статистики.

Страны.	Годы.	Жителей на 1.		
		рожденіе.	смерт. случ.	бракъ.
Англія	1866—1847	29,3	44,2	119,1
Англія и Уэльсъ .	1866—1852	28,9	45,1	118,9
Шотландія	1866—1855	28,8	46,5	142,3
Австрія	1866—1863	24,6	30,9	120,6
Баварія	1866—1847	29,1	35,4	143,6
Бельгія	1866—1847	33,4	43,3	140,1
Нидерланды . . .	1866—1847	28,5	36,5	127,4
Данія	1855—1859	29,5	45,6	118,2
Испанія	1866—1861	26,5	36,0	—
Италія	1866—1862	26,4	33,6	135,6
Франція	1866—1847	37,7	42,4	125,8
Швеція	1867—1848	31,0	48,9	137,3
Пруссія	1855—1844	26,6	36,0	115,2
Въ среднемъ. . .		29,2	40,3	128,7

Изъ предыдущей таблицы слѣдуетъ, что въ среднемъ надо считать больше рожденій чѣмъ смертныхъ случаевъ; ихъ отношеніе равно 40.3 : 29,2, или проще какъ 4 : 3. *Стало быть на 4 рожденія приходится 3 смертныхъ случая.* Съ другой стороны на 1 бракъ насчитываютъ почти точно 3 смертн. случая и 4 рожденія.

подвергается человѣкъ при томъ или иномъ положеніи его въ данномъ соціальномъ строѣ; данныя, которыя удалось собрать по этому вопросу, еще слишкомъ малочисленны и недостаточно опредѣлены; однако ихъ уже достаточно много, для того чтобы доказать, что подъ вліяніемъ профессій значительно измѣняется степень смертности. То-же можно сказать и о достаткѣ, которымъ пользуется населеніе, и способахъ и средствахъ питанія. Для того, чтобы остановиться на этихъ важныхъ вопросахъ, приведемъ нѣкоторые изъ главныхъ выводовъ, къ которымъ пришли въ настоящее время.

Мы считаемъ нужнымъ предпослать нашимъ наблюденіямъ одно важное замѣчаніе, подсказываемое теоріей *вѣроятностей*, которая такъ часто упоминается въ наше время, и принципы которой такъ-же часто нарушаются. Для того, чтобы тотъ или иной выводъ, сдѣланный на основаніи чиселъ представленныхъ наблюденіемъ, заслуживалъ нѣкотораго довѣрія, необходимо чтобы *использованныя наблюденія были точны и достаточно численны.* Число необходимыхъ наблюденій при подобномъ вычисленіи неодинаково для разнаго рода явленій, каковы рожденія, смертные случаи, болѣзни, опасности сопряженныя съ профессіей и т. п. ихъ надо имѣть много; однако, въ глазахъ публики вѣроятности идентичны; обыкновенно даже не разбираются въ томъ, есть-ли какая-нибудь разница между той и иной вѣроятностью. Отсюда и происходитъ то огромное разногласіе, которое замѣчается иногда между утвержденіями извѣстныхъ лицъ, которые признаютъ существованіе истины и необходимость науки, для того чтобы прійти къ такимъ или инымъ заключеніямъ. Такихъ любителей статистики и подобныхъ цѣнителей ея выводовъ лучше всего сравнить съ людьми, полагающими, что они умѣютъ играть и понимаютъ оттѣнки музыки, постоянно ударяя однообразно по одному и тому-же музыкальному инструменту, не зная нотъ и не понимая ихъ значенія. Какъ-бы странно ни казалось съ перваго взгляда такое сравненіе, однако, бываетъ такъ: при такихъ условіяхъ можно спросить себя, какова стоимость оцѣнокъ, произведенныхъ съ такимъ малымъ знаніемъ?

Вообще, явленія зарождаются благодаря двоякаго рода вліяніямъ, оказываемымъ съ одной стороны природой, а съ другой стороны человѣкомъ или случайными причинами (causes accidentelles). Вліяніе, оказываемое природой, бываетъ или постояннымъ или періодическимъ, а послѣдствія его поддаются болѣе или менѣе легкому измѣренію; вліяніе же, оказываемое человѣкомъ или иными случайными причинами, почти не отличается достаточно выраженной періодичностью, особенно въ томъ случаѣ, когда оно вызываетъ постоянные эффэкты: оно не поддается исчисленію, и порождаемыя имъ явленія можно разсматривать только какъ случайныя: вычисленія допускаютъ скорѣе *возможность*, нежели *математическую вѣроятность*.

Съ болѣе общимъ значеніемъ дѣйствуютъ силы природы одновременно съ случайными причинами, и великое искусство наблюдателя заключается въ томъ, чтобы съумѣть опредѣлить ихъ соотвѣтствующее дѣйствіе: одну часть можно было-бы назвать *вѣчной*, такъ какъ она періодически возрождается, подъ вліяніемъ постоянныхъ силъ; а другую—*случайной*, такъ какъ она случайно и всяческими способами нарушаетъ дѣйствіе природы.

Всѣ наши усилія должны быть направлены къ рѣшенію этихъ двухъ великихъ вопросовъ: надо умѣть опредѣлять дѣйствіе, оказываемое природой, человѣкомъ и тѣми случайными факторами, которые постоянно измѣняютъ это дѣйствіе. Опредѣленіе естественныхъ силъ и изученіе пертурбаціонныхъ силъ составляетъ самый важный вопросъ статистики или соціальной физики. Геніальные люди, столько содѣйствовавшіе разъясненію законовъ нашей планетной системы, очень хорошо предвидѣли эту другую физику земного шара, о которой я говорю, и они вполнѣ поняли, что она представляетъ можетъ быть еще большія трудности, чѣмъ та проблема, рѣшеніемъ которой они занимались, такъ какъ къ силамъ, которыя имъ приходилось изучать, присоединялись пертурбаціонныя силы человѣка и общества. Паскаль, Декартъ, Ферматъ, Ньютонъ, Гюйгенсъ, Лейбницъ, Бернулли, Лапласъ, Фурье, Пуассонъ и др.—всѣ они очень хорошо видѣли то широкое поле изслѣдованій, которое раскрылось предъ ними, а многіе изъ этихъ ученыхъ знаменитостей посвятили ему даже свои наиболѣе прекрасные труды.

Статистики, кажется, вполнѣ установили въ настоящее время, что шансы смертности больше въ промышленныхъ странахъ, чѣмъ въ сельско-хозяйственныхъ, а въ окрестностяхъ города, чѣмъ въ деревняхъ. У насъ уже есть много доказательствъ тому, и мы могли-бы привести новыя, особенно обращая свои взоры на Англію.

Но какъ мало опытныхъ судей, которые могутъ оцѣнить истинное значеніе этихъ доказательствъ!

Въ Нидерландахъ, въ странѣ наиболѣе занятой сельскимъ хозяйствомъ, есть провинція Гельдръ; смертность равна тамъ только 1 на 53,7 человѣкъ; между тѣмъ какъ въ торговыхъ областяхъ Голландіи она равна 1 на 35 душъ населенія.

Въ Бельгіи меньше всего смертныхъ случаевъ насчитываютъ въ общемъ въ провинціяхъ Люксембургъ, Намюръ и Гэннэгау; эти области также существенно земледѣльческія, хотя въ двухъ послѣднихъ есть нѣсколько промышленныхъ городовъ.

Франція даетъ подобные же результаты, но они могутъ казаться менѣе убѣдительными, такъ какъ наиболѣе подвержены смертности вообще промышленныя области; но такъ какъ онѣ захватываютъ въ то-же время наибольшіе города королевства, то невозможно различить, является-ли причиной излишней смертности дѣйствительно профессія жителей или ихъ скопленіе.

Наиболѣе благопріятнымъ для человѣка состояніемъ, является правильная жизнь, удовлетворяющая всѣмъ нуждамъ, не волнуемая ни страстями ни городскимъ распутствомъ. Въ земледѣльческомъ быту человѣкъ вообще находитъ довольство; онъ не подвергается, какъ въ промышленныхъ городахъ, превратностямъ излишествъ или нужды; онъ меньше знаетъ эти двѣ крайности, подвергающія его лишеніямъ или толкающія его на излишества.

Нищета и лишенія, которыя онѣ влекутъ за собою, являются одной изъ наиболѣе вліяющихъ на смертность причинъ. Многіе статистики хотѣли сдѣлать это наблюденіе очевиднымъ; Бэнуастонъ-де-Шатонэфъ привелъ подтвержденіе этому въ одной замѣткѣ названной: „*Sur la durée de la vie chez le riche et le pauvre*" *). Этотъ авторъ, которому мы обязаны цѣлымъ рядомъ драгоцѣнныхъ изслѣдованій о смертности человѣка въ различныхъ соціальныхъ положеніяхъ, записалъ съ одной стороны 1600 случаевъ смерти лицъ наивысшихъ классовъ, среди которыхъ фигурируетъ 157 царей и князей; съ другой стороны, онъ взялъ, на основаніи записей гражданскаго бюро, 2000 случаевъ смерти жителей 12-го округа Парижа, населеніе котораго состоитъ изъ разнаго рода рабочихъ, тряпичниковъ, метельщиковъ, землекоповъ,

---

*) См. „*Moniteur*" de France, 11 мая 1829 г.

поденщиковъ и т. п., словомъ—класса людей, обреченныхъ на страданія и труды, живущихъ въ нуждѣ и умирающихъ въ богадѣльнѣ. Эти изслѣдованія, сравнившія такимъ образомъ крайнее богатство съ крайней бѣдностью, дали слѣдующіе результаты:

Возрасты.	Смертность.		
	Общая *).	Богатыхъ.	Бѣдныхъ.
Отъ 25 до 30 лѣтъ	1,41	—	2,22
„ 30 „ 35 „	1,56	0,85	1,43
„ 35 „ 40 „	1,71	1,20	1,85
„ 40 „ 45 „	1,91	0,85	1,87
„ 45 „ 50 „	2,21	1,59	2,39
„ 50 „ 55 „	2,68	1,81	2,58
„ 55 „ 60 „	3,39	2,68	4,60
„ 60 „ 65 „	4,41	3,06	5,76
„ 65 „ 70 „	5,85	4,31	9,25
„ 70 „ 75 „	7,80	6,80	14,14
„ 75 „ 80 „	10,32	8,09	14,59
„ 80 „ 85 „	13,15	11,58	—
„ 85 „ 90 „	13,55	16,29	—
„ 90 „ 95 „	14,05	—	—

Записи страховыхъ обществъ такъ-же очевидно показываютъ наибольшую смертность среди бѣдныхъ. Общество Equitable всегда пользовалось таблицами смертности Нортгэмптона; но секретарь Морганъ показалъ въ 1810 году, что 83.000 случаевъ смерти застрахованныхъ лицъ, происшедшіе въ теченіе 30 лѣтъ, относились ко всѣмъ записямъ страховыхъ таблицъ, какъ 2 къ 3. Среди этихъ *отборныхъ* лицъ, смертность женщинъ еще меньше смертности мужчинъ, такъ какъ въ среднемъ классѣ женщины свободны отъ трудовъ и заботъ, какъ и отъ гибельныхъ послѣдствій страстей и распутнаго поведенія. Въ общемъ, среди застрахованныхъ въ обществѣ Equitable лицъ ежегодно, съ 1800 по 1820 годъ, умиралъ только 1 на 81,5 **).

Съ другой стороны возьмемъ такую же крайность и разсмотримъ человѣка наибольшей нищеты и самаго глубокаго физиче-

---

*) По таблицѣ Duvillard'а

**) D'Ivernois привелъ нѣсколько поразительныхъ примѣровъ долговѣчности застрахованныхъ лицъ, выбранныхъ изъ зажиточнаго класса Женевы (*Bibliothèque universelle*, октябрь 1833. 139 и сл. стр.)

скаго и нравственнаго упадка,—тутъ найдемъ, что ежегодно умираетъ 1 рабъ-негръ на 5—6, между тѣмъ какъ свободные Африканцы, служившіе въ англійскихъ войскахъ, теряли только 1-го на 33,3 *).

Слѣдуетъ впрочемъ хорошо условиться о значеніи слова богатство, когда идетъ рѣчь о населеніи: большое изобиліе благъ служитъ часто только легкимъ средствомъ, для того чтобы удовлетворить свои страсти и предаваться всякаго рода излишествамъ. Наиболѣе благопріятнымъ для народа состояніемъ является то, въ которомъ онъ находитъ средства удовлетворить всѣ свои дѣйствительныя потребности, не выходя за предѣлы умѣренности и не создавая искусственныхъ потребностей. Надо замѣтить, какъ это вполнѣ правильно подмѣтилъ Траси **), что почти всегда богаче люди, принадлежащіе къ націи, называемой *бѣдной*, чѣмъ тѣ, которые принадлежатъ къ *богатой* націи. Такъ, нѣтъ націи, обладающей большими богатствами чѣмъ Англія, и однако большая часть ея населенія вынуждена пользоваться общественной помощью. Богатыя области Фландріи насчитываютъ конечно больше бѣдняковъ, чѣмъ Люксембургъ, гдѣ такъ рѣдки крупныя богатства, но населеніе котораго живетъ въ общемъ въ достаткѣ, и находитъ средства добыть себѣ непосредственный заработокъ, который не измѣняется отъ одного дня къ другому, какъ въ промышленныхъ странахъ. То-же можно было-бы сказать о Швеціи и въ извѣстной мѣрѣ о всѣхъ земледѣльческихъ странахъ вообще.

По Гоукинсу смертность для всего англійскаго флота, въ разныхъ частяхъ свѣта, не исключая даже населенія госпиталей, равнялась въ 1813 году 1 на 42. Тотъ же авторъ думаетъ также, что смертность среди сухопутныхъ войскъ была еще меньше, чѣмъ во флотѣ.

Бэнуастонъ-де-Шатонэфъ также занимался изслѣдованіемъ смертности французской арміи; она отличается отъ смертности населенія, и его изслѣдованіе привело его къ нѣсколькимъ любопытнымъ выводамъ, которые я постараюсь вкратцѣ намѣтить ***).

---

*) *Elements of medical statistics*, 208 и слѣд. стр.

**) *Commentaire sur l'Esprit des Lois*, m XVI.

***) Essai sur la mortalité de l'infanterie française (Annales d'Hygiène т. X, 2-я часть). См. также мемуаръ графа Moroso „*Sur la mortalité des troupes piemontaises*", въ „*Memoires de l'Academie de Turin*".

Этотъ ученый находитъ, что привиллегированный классъ лучше питается и меньше страдаетъ отъ трудовъ; такимъ образомъ, согласно французскимъ даннымъ смертность солдатъ была нѣсколько меньше общей смертности; въ гвардіи умирало меньше чѣмъ въ арміи, а унтеръ-офицеры—меньше солдатъ, какъ въ гвардіи, такъ и въ арміи.

Изслѣдуя вліяніе временъ года на смертность солдатъ, получили слѣдующіе выводы относительно смертныхъ случаевъ во французской пѣхотѣ съ 1820 по 1826 г.

Времена года	Мѣсяцы	См. случ.
Зима	(Янв., Февр., Мартъ) . . .	4.168
Весна	(Апр., Май, Іюнь)	4.182
Лѣто	(Іюль, Авг. Сент.)	4.463
Осень	(Октябрь, Ноябрь, Дек.) . . .	4.279
		17.092

Maximum смертныхъ случаевъ приходится въ концѣ лѣта. Но, если не принимать астрономическаго опредѣленія временъ года и опредѣлять времена года только по ихъ вліянію на атмосферу, по примѣру многихъ нѣмецкихъ и итальянскихъ докторовъ, то получимъ слѣдующее новое дѣленіе.

Времена года	Мѣсяцы	См. случ.
Зима	(Дек., Янв., Февр.)	3.996
Весна	(Мартъ, Апр., Май)	4.357
Лѣто	(Іюнь, Іюль, Авг.)	4.143
Осень	(Сент., Окт., Ноябрь	4.596
		17,092

Здѣсь *maximum* смертныхъ случаевъ не наблюдается уже больше лѣтомъ, а осенью. Такимъ образомъ, какъ ни дѣлить годъ, по полугодіямъ-ли, по триместрамъ или временамъ года,—интенсивность смертности достигаетъ своего minimum'а зимой.

Если въ послѣднемъ примѣрѣ взять числа для каждаго мѣсяца, то найдемъ два *minimum'a* и два *maximum'a*: эти результаты, для военнаго сословія, уклоняются отъ гражданскихъ данныхъ: впрочемъ, Бэнуастонъ-де Шатонэфъ, когда писалъ свой мемуаръ, не зналъ еще о вліяніи, оказываемомъ временами года въ разные возрасты. Легче будетъ судить объ этомъ, когда сравнимъ французскія числа съ найденными мною для Бельгіи. *См. выше* стр. 196.

Мѣсяцы.	Смертность во франц. пѣхотѣ съ 1820 по 1826 г.		Гражданская смертность въ Бельгіи.	
			Отъ 16 до 20.	Отъ 20 до 25.
Январь	1,402	0,98	0,93	0,97
Февраль	1,334	0,94	0,94	1,00
Мартъ	1,432	1,00	1,07	1,09
Апрѣль	1,475	1,04	1,18	1,02
Май	1,450	1,02	1,15	1,09
Іюнь	1,257	0,88	1,03	0,96
Іюль	1,279	0,90	1,00	0,90
Августъ	1,607	1,13	0,99	0,92
Сентябрь	1,577	1,11	0,89	0,96
Октябрь	1,638	1.15	0,87	0,95
Ноябрь	1,381	0,97	0,15	1,03
Декабрь	1,260	0,88	1,01	1,11
Всего . . .	17,092	12,00	12.00	12,00

Ясно, что послѣ сильныхъ лѣтнихъ жаровъ солдатъ подверженъ смертности, вообше не наблюдаемой въ гражданской жизни.

Разсматривая разныя области Франціи, находимъ, что жители сѣверныхъ областей болѣе выносливы, чѣмъ жители юга; но наименѣе способными являются жители центральныхъ департаментовъ.

Шатонэфъ занимался также изслѣдованіемъ того, что можетъ вызвать увеличеніе смертности среди солдатъ, и послѣдовательно изучалъ вліяніе нѣсколькихъ причинъ, каковы: дуэли, венерическія болѣзни, самоубійства, тоска по родинѣ (ностальгія), чахотка и т. п. Уже этотъ опытный статистикъ изслѣдовалъ, въ другомъ трудѣ, вліяніе извѣстныхъ профессій на развитіе легочнаго туберкулеза *) и пришелъ къ многимъ интереснымъ выводамъ. Докторъ

---

*) „*Annales d'Hygiène*", VI томъ, 1-я часть, іюль 1831 г.—Впрочемъ, надо принять во вниманіе *качество* и *число* наблюденныхъ случаевъ. Въ настоящее время пользуются только нѣсколькими недостаточными наблюденіями, для того чтобы дѣлать изъ нихъ выводы, разсматриваемые какъ *вѣроятные* выводы, между тѣмъ какъ они, самое большее только *возможны*.

Полугодовыя или даже мѣсячныя записи болѣзней и смертныхъ случаевъ относятся скорѣе къ медицинѣ, чѣмъ къ статистикѣ. Скоро и талантливо составленныя, онѣ приносятъ огромнѣйшую пользу, указывая

Ломбаръ изъ Женевы занимался впослѣдствіи тѣмъ-же вопросомъ*), и ему удалось собрать большое число фактовъ, изъ которыхъ мы напомнимъ главные выводы.

Разобравъ данныя 4 различныхъ записей, составленныхъ для Парижа, Гамбурга, Вѣны и Женевы, Ломбаръ свелъ ихъ воедино и раздѣлилъ профессіи на три класса, смотря по тому, благопріятны-ли онѣ, безразличны или не благопріятны для развитія туберкулеза или, другими словами, насчитываютъ-ли онѣ чахоточныхъ больше, столько-же или меньше, чѣмъ въ среднемъ. Вотъ этотъ списокъ.

1°. Профессіи, превышающія среднюю.

А. Среди мужчинъ.

1°. *Во всѣхъ спискахъ.* Скульпторы, типографы, шляпочники, полировщики, жандармы, щеточники, солдаты, ювелиры, портные, мельники, набивающіе матрацы, басонщики, лимонадчики, комнатные служители и парикмахеры.

2°. *Въ большинствѣ списковъ.* Переписчики, повара, токари, столяры, цирульники, сапожники и бочары.

3°. *Въ одномъ только спискѣ.* Кузнецы, виноградари**), торговые приказчики, лоскутники, жестяники, носильщики бѣлья для стирки, мостовщики, граверы, механики, миткальщики, привратники, монтеры ящиковъ для часовъ, рессорные мастера, эмалеровщики, живописцы-рисовальщики, чистильщики улицъ, пирожники, складывающіе часы, учителя, карточники, маклеры, циферблатные мастера, приготовляющіе стойки для часовъ, перевозчики мебели, протестантскіе пасторы***), торговцы желѣзными издѣліями, мастера готовящіе напилки, корзинщики, пастухи, учителя ариеметики, полицейскіе чиновники, домашняя прислуга, печники, при-

---

искуснымъ людямъ число, характеръ и продолжительность болѣзней. Статистикъ-же, съ своей стороны, скорѣе констатируетъ зло, причиненное обществу, не останавливаясь ни на родѣ болѣзней, ни на примѣненныхъ способахъ леченія. Это—способъ очень хорошо понятый докторомъ Янсеномъ въ его статистическихъ таблицахъ для Брюсселя.

*) *„Annales d'Hygiène"*, XI томъ. 1-я часть, январь 1834 г.

**) Этотъ выводъ основанъ только на 6 смертныхъ случаяхъ и требуетъ подтвержденія (примѣчаніе Ломбара).

***) Число чахоточныхъ увеличилось смертью нѣсколькихъ англійскихъ церковнослужителей, прибывшихъ больными въ Женеву.

готовляющіе страусовыя перья, хрустальные каменотесы, ткачи газовыхъ матерій и фабриканты лентъ.

В. Среди женщинъ.

1°. *Во всѣхъ спискахъ.* Бѣлошвейки, башмачницы, перчаточницы, золотошвейки.

2°. *Въ большинствѣ списковъ.* Полировщицы.

3°. *Въ одномъ только спискѣ.* Мастерицы, приготовляющія стрѣлки для часовъ, часовщицы, модистки, учительницы, гладильщицы бѣлья, лоскутницы, продавщицы полотна и мелкаго товара, шляпочницы, переплетчицы, футлярщицы, вязальщицы, ювелирщицы, торгующія страусовыми перьями, цвѣточницы, щеточницы и кружевницы.

2°. Профессіи, то превышающія, то оказывающіяся ниже средней.

А. Среди мужчинъ.

Учащіеся, обжигатели гипса, каменотесы, сѣдельные мастера, землекопы, часовщики, извозчики, ключники *), золотыхъ дѣлъ мастера, чулочники, угольщики, позолотчики, музыканты, пильщики и стекольщики **).

В. Среди женщинъ.

Экономки, поденщицы, прядильщицы, ткачихи газовыхъ матерій, позолотчицы, штопальщицы и портнихи.

3°. Профессіи, дающія меньше средней.

А. Среди мужчинъ.

1°. *Во всѣхъ спискахъ.* Кучера, каменоломщики, плотники кабатчики, мясники, рыночные носильщики и поденщики, дворники

---

*) Первыя восемь состояній могутъ быть разсматриваемы какъ принадлежащія къ 1-му классу, т. е. тому, который насчитываетъ чахоточныхъ нѣсколько больше средняго, и дѣйствительно, они поставлены выше средняго въ женевскомъ спискѣ, который можетъ разсматриваться какъ гораздо болѣе точный, нежели другіе. (Ломбаръ).

**) Замѣчаніе, сдѣланное въ предыдущей выноскѣ относится и къ этимъ профессіямъ, помѣщеннымъ въ женевскомъ спискѣ ниже средняго (Ломбаръ) кожевники, бѣлильщики, лодочники, кондитеры, кровельщики, литейщики, больничные служители и сидѣльцы.

2°. *Въ большинствѣ списковъ.* Пекари, кузнецы, подковщики, слесари, каменщики и ткачи.

3°. *Въ одномъ только спискѣ.* Хирурги, мѣдники, ножовщики, разные торговцы, дровосѣки, адвокаты, носильщики стульевъ, выдѣлыватели замши, земледѣльцы, литераторы, негоціанты, бакалейные торговцы, правительственные чиновники, переплетчики, директора гимназій, коммиссіонеры, нагрузчики, дѣлающіе деревянные башмаки, торгующіе сукнами, фармацевты, рантье, отставные офицеры, конюхи, посыльные, бухгалтеры, судьи, красильщики, доктора медицины, угольщики, нотаріусы, узорщики, юристы, биржевые маклера, торгующіе кожаными товарами, изготовляющіе свѣчи, табачные торговцы, книгопродавцы, шорники, одѣяльщики, мастера обдѣлывающіе холодное оружіе, строители фонтановъ, лѣсоторговцы, профессора, торгующіе шоколадомъ, погребальщики, трактирщики, продавцы сыровъ, скорняки, мѣховщики, трубочисты, подрядчики, архитекторы, оружейники, упаковщики, булавочники, мѣряльщики, литейщики, вермишельщики, преподаватели иностранныхъ языковъ, игольщики, прядильщики, обрабатывающіе хлопчатникъ, полировщики мрамора, изготовляющіе крахмалъ, тряпичники, водоносы, токари, занятые въ производствѣ тканей, магазинные мальчики, рудокопы, коробейники и фабриканты гребней.

В. Среди женщинъ.

1°. *Во всѣхъ спискахъ.* Чесальщицы и набивающія матрацы, больничныя сидѣлки, перепродавщицы, прачки и садовницы.

2°. *Въ большинствѣ списковъ.* Закройщицы.

3°. *Въ одномъ только спискѣ.* Бахромщицы, басонщицы, мотальщицы, ткачихи газовыхъ и ситцевыхъ матерій, тряпичницы, обрабатывающія хлопчатникъ, изготовительницы цѣпочекъ для часовъ, набойщицы, кухарки, прислуга, рантье, прачки-гладильщицы, бакалейныя торговки, стегальщицы одѣялъ, мясничихи, акушерки, булочницы, ставящія пьявки, привратницы.

Переходя затѣмъ къ изслѣдованію причинъ, могущихъ повліять на учащеніе заболѣваній чахоткой при разныхъ профессіяхъ, Ломбаръ приходитъ къ слѣдующимъ выводамъ:

1°. Слѣдующія причины вызываютъ болѣе часто чахотку: нищета, сидячій образъ жизни и отсутствіе мускульнаго труда, потрясеніе помѣщенія, согнутое положеніе, нечистый воздухъ въ мастерской, вдыханіе извѣстныхъ минеральныхъ и растительныхъ паровъ и наконецъ воздухъ, полный мелкой и крупной пыли или легкихъ упругихъ или волокнистыхъ тѣлъ.

2°. Обстоятельства предохраняющія: богатство, дѣятельная жизнь на чистомъ воздухѣ, регулярное упражненіе всѣхъ частей тѣла, вдыханіе водяныхъ паровъ или животныхъ или растительныхъ испареній.

Переходя къ оцѣнкѣ степени вліянія каждаго изъ этихъ обстоятельствъ на развитіе чахотки, найдемъ, что среднее число чахоточныхъ рабочихъ можетъ быть разсматриваемо въ слѣдующемъ порядкѣ:

Среднее число чахоточныхъ 114 на 1000.

1°. Вредныя вліянія.

1). Минеральныя и растительныя испаренія	0,176
2). Разнаго рода пыль	0,145
3). Сидячій образъ жизни	0,140
4). Жизнь проведенная въ мастерской	0,138
5). Горячій и сухой воздухъ	0,127
6). Согнутое положеніе	0,122
7). Движеніе рукъ, вызывающее сотрясеніе груди	0,116

2°. Предохраняющія вліянія.

1). Дѣятельная жизнь (физическій трудъ)	0,089
2). Упражненіе голоса	0,075
3). Жизнь, проведенная на чистомъ воздухѣ	0,073
4). Животныя испаренія	0,060
5). Водяные пары	0,035

Существуетъ еще много другихъ данныхъ, имѣющихъ въ виду опредѣленіе вліянія профессій на смертность *); было бы довольно трудно представить здѣсь краткій обзоръ ихъ, тѣмъ болѣе что собранныхъ фактовъ еще мало. Авторъ, составившій

---

*) Въ особенности см. въ „*Annales d'Hygiène*", разныя замѣтки г.г. Parent-Duchatelet, d'Arcet, Leuret, Marc, Villermé, Benoiston de Chateauneuf и др.

эти таблицы, слишкомъ разсудителенъ для того, чтобы не понять этого самому: онъ ихъ составилъ не для того, чтобы указать точные выводы, а больше для того, чтобъ намѣтить путь, слѣдуя которому можно ихъ найти. Понятно, что подобные списки составляютъ первый опытъ, а различныя числа выражаютъ только *возможность* или *тенденцію*, а не *вѣроятность*. Впрочемъ, всегда необходимо присовокуплять къ выводу, который хотятъ превратить въ законъ, число наблюденій, на основаніи котораго онъ сдѣланъ. Списки, подобные нашимъ, составлялись для разныхъ странъ, но почти никогда не указывали, какія предосторожности должно принять. Однако я не могу обойти молчаніемъ изслѣдованій доктора Каспера изъ Берлина *); онъ находитъ, что профессія врача быть можетъ больше всякой другой подвержена смертности, вопреки очень распространенному предубѣжденію, и сверхъ того замѣчаетъ, что теологи занимаютъ на лѣстницѣ смертности противоположное крайнее мѣсто. Безъ сомнѣнія здѣсь надо понимать подъ названіемъ теологовъ министровъ вѣроисповѣданій, а не ученыхъ, углубляющихся въ теологическія изслѣдованія; это можетъ составить довольно значительную разницу, такъ какъ дѣятельность ума на извѣстной степени можетъ стать такъ-же вредной, какъ наоборотъ правильный и сидячій образъ жизни можетъ оказаться выгоднымъ для сохраненія человѣка. Это довольно хорошо показываетъ слѣдующая таблица, составленная Касперомъ.

Дожили до 70 лѣтъ и больше:

на 100 теологовъ	42
„ „ земледѣльцевъ и лѣсничихъ	40
„ „ высшихъ чиновниковъ	35
„ „ торговцевъ и промышленниковъ	35
„ „ военныхъ	32
„ „ низшихъ чиновниковъ	32
„ „ адвокатовъ	29
„ „ артистовъ	28
„ „ учителей и профессоровъ	27
„ „ докторовъ	24

Изъ этой таблицы слѣдуетъ, кажется, что умственный трудъ вреднѣе для человѣка, чѣмъ физическій, но наиболѣе вреднымъ

---

*) *Gazette medicale hebdomadaire de Berlin*, 3 января 1834 г. и *Annales d'Hygiène*, апрѣль 1834 г.

состояніемъ является то, при которомъ физическій трудъ присоединяется къ умственному. Сидячій образъ жизни, не подвергающій лица какимъ-либо крайностямъ, напротивъ, кажется самымъ благопріятнымъ. Слѣдующей краткой таблички достаточно будетъ для оцѣнки крайностей.

На 1000 смертныхъ случаевъ приходилось:

Возрастъ	A. Врачей.	B. Теологовъ	$\frac{A}{B}$. Отношеніе.
Отъ 23 до 32 лѣтъ . .	82	43	1,91
„ 33 „ 42 „ . .	149	58	2,57
„ 43 „ 52 „ . .	160	64	2,50
„ 53 „ 62 „ . .	210	180	1,17
„ 63 „ 72 „ . .	228	328	0,70
„ 73 „ 82 „ . .	141	257	0,55
„ 83 „ 92 „ . .	30	70	0,43
	1.000	1.000	

Я не знаю, есть-ли достаточно точныя изслѣдованія вліяній, оказываемыхъ на организмъ дѣтей и молодыхъ людей ихъ обученіемъ. Этотъ вопросъ заслуживалъ-бы серьезнаго изученія, особенно въ настоящее время, когда многіе родители изъ-за превратно понятаго стремленія къ просвѣщенію, а иногда вслѣдствіе эгоистическихъ мотивовъ и очень предосудительнаго корыстолюбія, воспитываютъ дѣтей, какъ растенія, выращиваемыя въ теплицѣ для скорѣйшаго полученія цвѣтовъ и плодовъ. Многочисленные примѣры показали, насколько недолговѣчны такіе плоды и насколько такіе родители подвергаютъ своихъ дѣтей преждевременной смерти; немногіе изъ такихъ Wunderkinder переживали дѣтскій возрастъ или выдерживали тѣ чрезмѣрныя усилія, которыя приходилось переносить такимъ слишкомъ слабымъ организмамъ. Мы еще будемъ имѣть случай, говоря объ умопомѣшательствѣ, изслѣдовать, до какой степени слишкомъ усиленныя занятія, особенно точными науками, могутъ предрасполагать къ этой ужасной болѣзни или всецѣло разрушить самый здоровый организмъ.

Существуютъ болѣе или менѣе тяжкія болѣзни, неразрывно связанныя съ привычками людей и качествомъ употребляемой пищи и напитковъ. Къ такого рода болѣзнямъ принадлежитъ, кажется каменная болѣзнь, свирѣпствующая въ нѣкоторыхъ мѣстностяхъ.

Сивіаль сообщилъ мнѣ разныя свѣдѣнія объ этомъ жестокомъ бичѣ человѣчества, съ которымъ ему удавалось успѣшно бороться: я полагаю, что разсмотрѣніе, въ какомъ возрастѣ она проявляется чаще, будетъ не безынтересно въ трудѣ, трактующемъ о развитіи человѣка. Хотя наблюденія въ этой сферѣ малочисленны, однако вполнѣ достовѣрнымъ кажется то, что предрасположеніе къ каменной болѣзни сильнѣе всего въ теченіе дѣтства; объ этомъ можно будетъ судить по слѣдующему.

Возрастъ.	Пораженные каменной болѣзнью.						Таблица населенія.
	Люне-вилль.	Бристоль	Норвичъ и Норфолькъ.	Лидсъ.	Сумма предыдущихъ чиселъ	Сумма приведенная къ 1.000.	
0—10 лѣтъ.	943	146	255	83	1.427	524	239
10—20 „	377	65	99	21	562	205	183
20—30 „	106	41	47	21	215	77	168
30—40 „	38	34	46	12	130	46	134
40—50 „	23	37	41	28	129	46	101
50—60 „	18	28	92	21	159	57	89
60—70 „	16	18	63	9	106	39	51
70 и больше.	5	2	6	2	15	6	35
Всего .	1,526	371	649	197	2.743	1,000	1.000

До 5 лѣтъ число пораженныхъ каменной болѣзнью бываетъ наибольшимъ, принимая, конечно во вниманіе таблицу населенія, указанную въ послѣднемъ столбцѣ. Въ теченіе первыхъ десяти лѣтъ оно превосходитъ обычное больше чѣмъ вдвое. До періода зрѣлости средняя каменной болѣзни еще выше общей средней; затѣмъ она уменьшается, увеличиваясь какъ-будто около 60-ти 70-ти лѣтъ. Но эти послѣднія числа слишкомъ незначительны для того, чтобы ихъ можно было принять въ соображеніе.

Въ Люневиллѣ наблюдали изъ года въ годъ, отъ рожденія до 10 лѣтъ, слѣдующія числа: 0, 17, 79, 131, 145, 143, 116, 119, 84 и 75. Пятилѣтній возрастъ представлялъ стало быть больше всего опасностей. Впрочемъ, эти числа невелики и требуютъ повѣрки.

Послѣ періода зрѣлости, кажется, разница возрастовъ не оказываетъ большого вліянія на предрасположеніе къ болѣзни, особенно, если принять во вниманіе число индивидуумовъ каждаго возраста, входящихъ въ составъ всего населенія.

Различіе половъ, напротивъ, оказываетъ замѣтное вліяніе: на 1 женщину насчитываютъ въ общемъ 21 мужчину или приблизительно столько пораженныхъ каменной болѣзнью; объ этомъ можно судить по слѣдующей таблицѣ:

Страны.	Больные каменной болѣзнью.		Мужчинъ на 1 женщину.
	Мужчины.	Женщины.	
Люневилль	1,463	63	23
Бристоль	348	7	49
Парижъ	423	16	26
Ульмъ	123	4	31
Лидсъ	188	9	21
Норвичъ и Норфолькъ	618	31	20
Ломбардскія королевства	758	36	41
Медицинскій словарь	312	44	7
Практика Сивіаля	419	10	42
	4,652	220	Ср. 21

Женщины, какъ и мужчины, отличаются большимъ предрасположеніемъ къ каменной болѣзни въ дѣтствѣ, чѣмъ въ поздніе возрасты. Что касается опасности умереть отъ нея, то надо считать 10 смертныхъ случаевъ приблизительно на 53 больныхъ, въ разныхъ странахъ, когда прибѣгаютъ къ операціи. Впрочемъ, опасность операціи меньше во время дѣтства.

2. Вліяніе нравственности.

До настоящаго времени мы обладаемъ очень немногими изслѣдованіями, касающимися того вліянія, которое можетъ оказать нравственность на число смертныхъ случаевъ націи, исключая однако число случаевъ насильственной смерти. Это—обширное поле, открытое для изслѣдованій статистиковъ, которые могутъ найти тамъ данныя, столь-же интересныя для охраненія общества, какъ и для нравственныхъ и политическихъ изслѣдованій.

Изъ всѣхъ предыдущихъ изслѣдованій уже видно было, что въ вопросѣ о силѣ смертности положеніе промышленнаго и предусмотрительнаго народа гораздо выше, чѣмъ положеніе другого народа, живущаго въ скотствѣ и бездѣліи. Проводя параллель между Англіей и несчастнымъ государствомъ Гуанахуато, я показалъ, что въ послѣднемъ относительное число смертныхъ случаевъ почти въ 3 раза больше чѣмъ въ первой. Мы видѣли также, что смертность высшихъ классовъ общества гораздо меньше, чѣмъ въ низшихъ слояхъ народа; и это положеніе вещей связано не только съ тѣмъ, что у однихъ—достатокъ, а у другихъ—лишенія, но и отъ привычки къ чистотѣ и умѣренности, отъ того, что страсти возбуждаются не такъ часто, а перемѣны въ образѣ жизни менѣе рѣзки.

Пылкость страстей кажется оказываетъ большое вліяніе на сокращеніе продолжительности жизни. Такъ, когда человѣкъ вполнѣ физически развитъ, и когда послѣ 20 лѣтъ онъ долженъ былъ-бы энергичнѣе всего сопротивляться всякимъ разрушающимъ силамъ, въ это время иногда обнаруживается напротивъ—minimum его жизнеспособности. Эта чрезмѣрная смертность, не замѣчаемая у женщинъ, продолжается иногда до 30-лѣтняго возраста, когда страсти уже нѣсколько укрощаются. Мы будемъ имѣть случай точнѣе опредѣлить эту критическую для мужчинъ эпоху, когда мы изслѣдуемъ все, относящееся къ развитію нравственности.

Во время эпидемій можно особенно хорошо опредѣлить вліяніе нравственности на число смертныхъ случаевъ. О томъ, насколько фатальна невоздержанность для предающихся ей, въ особенности можно было судить во время опустошеній, произведенныхъ холерой въ Европѣ. Мнѣнія о характерѣ и способахъ леченія этого бича были весьма различны, но всѣ соглашались относительно факта, который я сейчасъ отмѣтилъ.

Изъ многочисленныхъ наблюденій слѣдуетъ также, что боязнь той или иной болѣзни можетъ особенно предрасположить къ ней: нравственность оказываетъ здѣсь замѣчательное дѣйствіе, которое заслуживаетъ величайшаго вниманія. Этотъ вопросъ служилъ уже предметомъ многихъ изслѣдованій, но къ разрѣшенію его не приступали съ строгимъ анализомъ, который наукѣ удалось выработать только впослѣдствіи. Иныхъ поражала смерть вслѣдствіе слишкомъ сильнаго возбужденія одной какой-либо страсти; другіе чрезвычайно занятые мыслью о своей смерти, дѣйствительно умирали, такъ какъ ихъ экзальтированное воображеніе заставляло ихъ опасаться ея. Интересно было-бы опредѣлить, какія страсти опаснѣе всего возбуждать до крайности, и до какой степени страхъ можетъ вызвать смерть. Эти изслѣдованія могли-бы привести къ существеннымъ измѣненіямъ нашихъ привычекъ и учрежденій. Напримѣръ, обычай, согласно которому больного, находящагося въ безнадежномъ состояніи, окружаютъ извѣстными религіозными обрядами, при извѣстныхъ обстоятельствахъ рѣшаетъ смерть; и можно только одобрить предосторожности, принятыя въ извѣстныхъ странахъ, гдѣ эти обряды совершаютъ въ началѣ болѣзни, когда она не обнаруживаетъ еще тяжелыхъ симптомовъ. Тогда религіозные обряды теряютъ свой роковой характеръ.

Къ пертурбаціоннымъ причинамъ, увеличивающимъ смертность, я причисляю также склонность человѣка къ уничтоженію ближнихъ, или самого себя, хотя эту склонность раздѣляютъ и животныя, подчиняющіяся только простымъ законамъ природы. Но здѣсь эта склонность проявляется въ самыхъ разнообразныхъ формахъ; такъ, уничтоженіе человѣка человѣкомъ есть преступленіе или добродѣтель, смотря по тому, какъ оно совершается; было-бы довольно трудно установить предѣлы этихъ двухъ столь противоположныхъ положеній вещей, особенно если принимать во вниманіе различія времени и мѣста. Исторія перемѣщенія этого предѣла у разныхъ народовъ составила-бы сама по себѣ высоко-интересную работу и показала-бы намъ, черезъ какія фазы должно было пройти человѣчество.

Впрочемъ, изслѣдованіе такого рода вопросовъ будетъ болѣе умѣстно, когда я буду говорить о развитіи нравственныхъ свойствъ человѣка и о дуэли и человѣкоубійствѣ. Можетъ быть было бы умѣстнѣе говорить объ уничтоженіи однихъ людей другими, когда это дѣлается въ большомъ масштабѣ и въ формахъ, освященныхъ нашими обычаями и учрежденіями, ибо и наши понятія о войнѣ также связаны съ нравственной статистикой.

Я показалъ сейчасъ на разныхъ примѣрахъ, насколько нравственность можетъ вліять на человѣческую смертность; другой, не менѣе поразительный примѣръ этого вліянія представляютъ мертворожденные, когда различаютъ законно-и незаконнорожденныхъ. Пагубное наслѣдство порока поражаетъ ребенка не только до его рожденія; оно его преслѣдуетъ долго послѣ того, какъ онъ избѣгъ первой опасности; а нищета очень часто еще болѣе отягчаетъ это зло. Такъ, изъ изслѣдованій Бауманна и Зюссмильха слѣдуетъ, что смертность даетъ, при равенствѣ прочихъ условій, слѣдующія отношенія:

Мертворожденные	1 зак.	2,0 незак.
1-й мѣсяцъ послѣ рожденія	1 „	2,4 „
2-й и 3-ій мѣсяцъ послѣ рожденія .	1 „	2,0 „
4-ый, 5-ый и 6-й мѣсяцъ послѣ рожд.	1 „	1,7 „
Остальная часть года „ „	1 „	1,5 „
2-й годъ	1 „	1,4 „
3-ій и 4-ый годъ	1 „	1,3 „

Разница эта еще рѣзче до 7-го года, такъ что, по Бауману, только десятая часть незаконнорожденныхъ достигаетъ зрѣлости. Этотъ выводъ вполнѣ пригоденъ для объясненія того, что наблюдаютъ въ Гуанахуато „гдѣ ничто не можетъ сравниться съ массой физической, нравственной и политической грязи“ *).

Каспэръ даетъ таблицу смертности дѣтей въ Берлинѣ **). изъ которой онъ выводитъ, что на 28.705 дѣтей, умершихъ до 15 лѣтъ, въ теченіе десяти лѣтъ, съ 1813 по 1822 годъ, было 5.598 незаконныхъ дѣтей; это давало ежегодно 2.311 смертныхъ случаевъ законнорожденыхъ и 560 незаконнорожденныхъ, умершихъ до 15 лѣтъ. Но, согласно тому-же ученому, около того-же времени, ежегодно рождалось 5.663 законныхъ дѣтей и 1.080 незаконныхъ. Слѣдовательно, отношеніе смертныхъ случаевъ равнялось 1 : 2,5 для первыхъ, а 1 : 1,9—для вторыхъ.

Особенно содѣйствуетъ увеличенію смертности незаконнорожденныхъ то, что огромное число ихъ предоставляется вообще общественной благотворительности. Лишеніе материнскаго ухода, являющееся необходимымъ послѣдствіемъ подброса, и всякаго рода другія лишенія, въ такой моментъ, когда они могли быть весьма полезны, достаточно объясняютъ огромную смертность, царящую обыкновенно въ пріютахъ для подкидышей.

Для опредѣленія этой смертности, Бэнуастонъ-де-Шатонэфъ опредѣляетъ въ своихъ „*Considérations sur les enfants trouvés*“ ***) смертность дѣтей въ Европѣ въ теченіе XVIII в.

	Minimum.	Maximum.	Разница.
Отъ 0 до 1 года	19 на 100	$45^{1}/_{2}$ на 100	$26^{1}/_{2}$
„ 0 „ 3 „	$26^{3}/_{8}$ „	50 „	$23^{5}/_{8}$

---

*) Sor. F. D'Ivernois „*Sur la mortalité proportionelle*“.

**) *Beiträge*, 173 стр.

***) Paris, 1824 г. 1 m. in 8⁰.

Отъ 0 до 4 лѣтъ	30 на 100	53 на 100	23
„ 0 „ 10 „	35 „	$55^6/_7$ „	$20^6/_7$

Согласно этому ученому, смертность подкидышей во многихъ городахъ Европы въ теченіе перваго года ихъ существованія равнялась:

Въ Петербургѣ,	въ 1788 г.	40 на 100
„ Флоренціи,	. тогда-же	40 „
„ Барцелонѣ,	въ 1780 г.	60 „
„ Парижѣ,	. въ 1789 г.	80 „
„ Дублинѣ,	. въ 1791 г.	91 „

Отъ 0 до 4 лѣтъ умирало ихъ въ Римѣ, Мадридѣ, Дублинѣ и Парижѣ—50, 62, 76 и 98 на 100 *).

Наконецъ, по истеченіи 20 лѣтъ, изъ 19,420 дѣтей, принятыхъ въ Дублинскій пріютъ, оставалось въ живыхъ только 2 тысячи, а въ Москвѣ—7 тысячъ на 37,600. Какое страшное истребленіе! Война и эпидеміи производятъ менѣе ужасныя опустошенія въ родѣ человѣческомъ... И пусть не думаютъ, что новѣйшія времена привели къ лучшимъ результатамъ, что этотъ печальный списокъ, который можно было-бы еще дальше расширить, даетъ въ настоящее время (1834) меньшія числа. По подлиннымъ свѣдѣніямъ, которыя мы имѣемъ, въ 1817 г. въ Мадридѣ, въ пріютахъ и въ деревняхъ, умирало 67 дѣтей на 100; въ Вѣнѣ въ 1811 году—92, Брюсселѣ съ 1812 до 1817 г.—79. Въ это время недостаточно обширный, плохо—провѣтриваемый и нездоровый пріютъ былъ переведенъ въ другую часть города, и съ тѣхъ поръ замѣчено пониженіе средняго числа смертныхъ случаевъ, которое все еще равно 56 на 100 **).

---

*) Г. de Gerando опредѣляетъ въ своемъ прекрасномъ трудѣ: „*Le visiteur du pauvre*", отношеніемъ 1 къ 7, смертность дѣтей, которыхъ парижскіе гражданскіе пріюты высылаютъ на кормленіе (стр. 295); надо замѣтить, что этимъ дѣтямъ было отъ 0 до 12 лѣтъ; и въ этомъ отношеніи эти числа сходны съ результатами, приводимыми Бэнуастономъ, на 76 стр. его „*Considérations, etc*".

**) По среднимъ даннымъ за 8 лѣтъ, отъ 1815 до 1822, я опредѣлилъ, что смертность въ Брюссельскомъ пріютѣ равнялась 66,38 на 100; это была наибольшая смертность въ это время, какую только наблюдали въ 19 пріютахъ королевства; пріюты давали среднюю смертность 45,07 на 100 (см. *Recherches sur les naissances, etc.* par. A. Quetelet 1 и 8⁰).

Предыдущее показываетъ достаточно ясно, какое вліяніе могутъ оказать на жизнь и смерть подкидышей заботы администраціи. Здѣсь не мѣсто разбирать, въ какой мѣрѣ можно одобрить учрежденія, куда принимаются эти несчастные; но можетъ быть интересно узнать, насколько размножились подкидыши и оставленные со времени появленія этихъ учрежденій. Въ Парижѣ, напримѣръ, отношеніе числа такихъ дѣтей къ числу рожденій въ теченіе столѣтія представляло слѣдующую прогрессію: *)

Годы	Отношеніе на 100
Отъ 1710 до 1720 г.	9,73
„ 1720 „ 1730 „	11,37
„ 1730 „ 1740 „	14,48
„ 1740 „ 1750 „	18,21
„ 1750 „ 1760 „	23,71
„ 1760 „ 1770 „	30,75
„ 1770 „ 1780 „	33,06
„ 1780 „ 1790 „	28,70
„ 1790 „ 1800 „	17,69
„ 1800 „ 1810 „	20,95
„ 1810 „ 1820 „	22,88

Ясно, что отношеніе быстро возрастаетъ въ послѣдніе годы царствованія Людовика XV; оно уменьшается больше чѣмъ на $^{2}/_{3}$ при Конвентѣ, вновь увеличивается во время Имперіи и по видимому остается неизмѣннымъ со времени революціи 1834 года.

Бэнуастонъ-де-Шатонэфъ, у котораго я заимствовалъ большую часть предыдущихъ свѣдѣній, указываетъ слѣдующія отношенія для нѣкоторыхъ главныхъ европейскихъ городовъ:

	Подкидышей.	
Лиссабонъ, отъ 1815 до 1819	26,28	на 100 рожд.
Мадридъ	25,58	„
Римъ, 1801—1807	27,90	„
Парижъ, 1815—1821	20,91	„
Брюссель, 1816—1821	14,68	„
Вѣна, 1815—1821	23,43	„
Петербургъ, 1820	45,00	„

---

*) *Considérations sur les enfants trouvés*, 29 стр.

	Подкидышей.	
Москва	27,94	„
Въ графствѣ Ниццѣ	6,06	„
„ Савойѣ	5,83	„

Такимъ образомъ, въ большинствѣ вышеназванныхъ городовъ подкидываютъ приблизительно четвертую часть дѣтей. Это положеніе вещей можетъ навести на печальныя размышленія о нищетѣ и деморализаціи въ большихъ городахъ. Парижъ даетъ ежегодно около 21 подкидыша на 100 рожденій; между тѣмъ какъ остальная часть Франціи даетъ только 3,52. Правда, это неравенство было бы гораздо меньше, если-бъ во всей Франціи было такъ-же легко отправлять дѣтей въ пріютъ, какъ и въ Парижѣ; вѣрно также и то, что въ Парижъ посылаютъ много дѣтей, не живущихъ въ городѣ. Въ Бельгіи нашли слѣдующія величины, по даннымъ за 10 лѣтъ, предшествовавшихъ 1833 году *):

Области.	Рожденій (средняя годовая).	Подкидышей и оставленныхъ дѣтей.	Подкидышей на 100 рожденій.
Антверпенъ	11.018	2.156,5	19,6
Брабантъ	18.893	2.307,4	12,2
Фландрія западная	20.315	480,5	2,3
Фландрія восточная	24.148	693,8	2,9
Геннэгау (Гено)	20.016	1.830,2	9,1
Льежъ (Люттихъ)	11.837	212,2	1,9
Намюръ	6.399	844,9	13,2
Королевство **) . . .	112.626	8.525,5	7,6

Довольно трудно объяснить себѣ тѣ различія, которыя представляютъ провинціи одной такой страны, какъ Бельгія, по крайней мѣрѣ, если искать причинъ этого въ доступности для матерей подбрасыванія своихъ дѣтей въ извѣстныхъ мѣстностяхъ. По этому вопросу мы можемъ отмѣтить наблюденія Гурова, одного изъ тѣхъ, кто чрезвычайно тщательно занимался всѣмъ, что касается

---

*) См. „*Corresspondance mathématique et physique*" VIII т. 20-й выпускъ. 135 стр.

**) Безъ областей Льежъ и Люксембургъ.

подкидышей *). „Въ городѣ Лондонѣ, населеніе котораго равно 1.250.000 человѣкъ, говоритъ этотъ авторъ, въ теченіе 5 лѣтъ, съ 1819 по 1823 годъ, было только 151 подкидышей, а число незаконнорожденныхъ, находившихся въ рабочихъ домахъ (work—houses) не превышало въ теченіе того-же времени 4.668; а приблизительно пятая часть этихъ дѣтей содержалась за счетъ отцовъ. Поразительный контрастъ. Парижъ, населеніе котораго составляетъ только $^2/_3$ населенія Лондона, насчитывалъ въ тѣ-же пять лѣтъ 25.277 подкидышей, воспитываемыхъ за счетъ государства“.

„Нужно-ли еще болѣе вѣрное доказательство вліянія, которое оказали пріюты на увеличеніе числа подкидышей? Въ Майнцѣ не было учрежденій такого рода, и тамъ нашли только 30 подкидышей за время съ 1799 по 1811 годъ. Наполеонъ приказалъ учредить пріютъ (tour) въ этомъ городѣ. Онъ былъ открытъ 7 ноября 1811 года и существовалъ до марта 1815 года, когда великій герцогъ Гессенъ-Дармштадтскій велѣлъ его закрыть. Въ теченіе этихъ 3 лѣтъ и 4 мѣсяцевъ было принято 516 подкидышей. Когда этотъ пріютъ былъ закрытъ, все вошло въ свою колею, такъ какъ привычка подкидывать дѣтей еще не вкоренилась въ народѣ; въ теченіе слѣдующихъ девяти лѣтъ оказалось только 7 подкидышей.“

Предлагая реформировать пріюты для подкидышей, Гуровъ не хочетъ, чтобы поступали опрометчиво. „Наоборотъ, говоритъ онъ, нужны обдуманность, время и терпѣніе для подготовленія и постепеннаго приведенія въ исполненіе мѣръ, которыя должны предшествовать этому, а не повторять ошибки нѣкоторыхъ городовъ Бельгіи, которые, желая избавиться отъ приносимыхъ извнѣ дѣтей, уничтожили пріюты въ 1823 году. Многимъ новорожденнымъ угрожала смерть, и общественный ропотъ заставилъ правительство издать приказъ объ ихъ возстановленіи.“

Главные выводы работы Гурова слѣдующіе:

1°. Въ католическихъ странахъ или лучше въ тѣхъ, гдѣ открыты пріюты для всякаго рода дѣтей, покинутыхъ послѣ ихъ рожденія, эти несчастные малыши болѣе обычны и болѣе многочисленны, чѣмъ въ другихъ мѣстахъ.

2°. Въ этихъ пріютахъ царитъ ужасающая смертность и совершенно несоразмѣрная съ самой сильной смертностью, похи-

---

*) *Essai sur l'histoire des enfants trouvés*, in 8°, Paris 1829.

щающею другихъ маленькихъ дѣтей, даже среди самыхъ нищихъ классовъ.

3⁰. Дѣтоубійство почти не предупреждается пріютами для подкидышей, или вѣрнѣе: для того чтобы помѣшать нѣсколькимъ случаямъ дѣтоубійства, прямого или косвеннаго, не оставляя безъ помощи подкинутыхъ, эти дома сами губятъ несравненно большее число дѣтей *).

3. Вліяніе просвѣщенія, религіозныхъ и политическихъ учрежденій.

Цивилизація, смягчивъ условія существованія человѣка, сдѣлала его также болѣе продложительнымъ; развитіе наукъ способствовало оздоровленію частныхъ жилищъ и городскихъ окрестностей, постепенному уничтоженію болотистыхъ мѣстъ и причинъ

---

*) Въ послѣднее время много занимались изученіемъ смертности новорожденныхъ, и въ особенности значительной смертностью молодыхъ дѣтей, вскармливаемыхъ вдали отъ своихъ родителей. Въ особенности сильный ропотъ былъ во Франціи, главнымъ образомъ въ Императорской Медицинской Академіи. Этому почтенному собранію правительство поручило высказать свое мнѣніе: изъ 32-го тома его *Бюллетеня* 1866—67 г. видно, что изслѣдованію этого важнаго вопроса было посвящено нѣсколько засѣданій сряду, на которыхъ выслушаны были разумныя и человѣколюбивыя рѣчи, произнесенныя нѣсколькими его членами, г.г. Будэ, Гюссономъ, Моно, Бронгаромъ, Робикэ, Бльо, Бэртильономъ, Дэвильеромъ, Девержи, Брока, Гереномъ, Пьорри и др. Этотъ вопросъ, въ высшей степени заслуживающій вниманія ученыхъ, къ несчастью разсматривается еще съ весьма различныхъ точекъ зрѣнія, даже въ самыхъ просвѣщенныхъ государствахъ.

Въ засѣданіи 15 января 1867 г., Жюль Геренъ изложилъ Королевской Медицинской Академіи въ Парижѣ слѣдующія жалобы, сообщенныя ему однимъ изъ его коллегъ: другой докторъ того-же округа, д-ръ Галопэнъ, писалъ слѣдующее: „Я знаю только чрезвычайно немногихъ хорошихъ кормилицъ; но знаю много очень плохихъ. Есть такія, которыя дѣлаютъ изъ этого ремесло уже 10, 12, 15 лѣтъ, которыя *всегда* имѣютъ питомцевъ, и которыя я думаю, *никогда не возвращали* ихъ родителямъ. Это заставляло меня часто говорить, что я нахожу въ Парижѣ очень глупыхъ дѣвушекъ, привлекавшихся съ поникшей головой по уложенію о наказаніяхъ за убійство своихъ дѣтей, въ то время какъ онѣ могли-бы избѣжать сѣтей закона, передавъ ихъ на воспитаніе въ Монтиньи, или въ извѣстные дома общины Д'Ильеръ". Я воспроизвелъ эти слова во всей ихъ наготѣ, потому что, когда идетъ рѣчь о такого рода вещахъ, то для нихъ не хватаетъ слишкомъ сильныхъ и рѣзкихъ выраженій.

столь частыхъ эпидемій, губившихъ нашихъ предковъ. Развивая торговыя сношенія между народами, просвѣщеніе сдѣлало также менѣе частымъ и менѣе страшнымъ голодъ, возможность котораго уменьшилась съ другой стороны благодаря улучшенію культуры земель и увеличенію разнообразія средствъ существованія. Медицина и общественная гигиена такъ-же нашли цѣнные способы борьбы съ смертностью, между тѣмъ какъ развитіе промышленности и гарантіи, полученныя обществомъ благодаря болѣе свободнымъ учрежденіямъ, способствовали распространенію достатка и болѣе дѣйствительныхъ средствъ сохраненія жизни.

Въ настоящее время вполнѣ установлено кажется, что въ странахъ, гдѣ цивилизація наиболѣе развита, наблюдается также наибольшее уменьшеніе смертности. Не слѣдуетъ однако преувеличивать этихъ выгодъ, какъ это дѣлали для нѣкоторыхъ странъ; чѣмъ точнѣе будутъ статистическія данныя, тѣмъ больше предразсудковъ въ этомъ отношеніи мы будемъ открывать ежедневно. Англія заняла выгодное положеніе, всегда привлекавшее вниманіе ученыхъ, занимавшихся теоріей народонаселенія; но къ этому именно государству наиболѣе примѣнимо мое замѣчаніе. Если мы изслѣдуемъ, какова была смертность съ начала XVIII-го вѣка, то найдемъ по данымъ двухъ наиболѣе уважаемыхъ статистиковъ *):

Годы	Жителей на 1 смер. случай.
1700	41
1750	41
1776 – 1800 включительно	48
1806—1810	49
1816 – 1820	55
1826—1830	51

Судя по этимъ числамъ, дѣйствительно произошло очень значительное уменьшеніе смертности; но извѣстно, что въ числахъ умершихъ происходятъ довольно многочисленныя упущенія. Рикманъ самъ полагаетъ, что вслѣдствіе этихъ упущеній слѣдуетъ считать 1 смертный случай только на 49 жителей вмѣсто 1 на 51, для послѣднихъ пяти лѣтъ; между тѣмъ Гоукинсъ говорилъ, что

---

*) Маршаль опредѣляетъ населеніе Англіи и Уэльса въ 1700 и 1750 г. числами 5,475,000 и 6,467,000, а смертн. случаи 132,728 и 154,686. Другія отношенія взяты изъ послѣдняго труда Рикмана.

смертность должна была бы быть въ 1822 году 1 на 60 *). Впрочемъ, перепись могла быть ошибочной; и если-бъ эти неточности были исправлены, то обнаружилась-бы вѣроятно еще большая разница въ смертности, такъ какъ число смертныхъ случаевъ вообще тѣмъ меньше, чѣмъ небрежнѣе ихъ регистрируютъ. При этомъ предполагаютъ однако, что величина населенія точно установлена.

Перемѣны, происходящія въ большихъ городахъ, особенно заслуживаютъ вниманія. Въ 1697 году, напримѣръ, общее число смертныхъ случаеьъ достигало въ Лондонѣ 21.000; однако сто лѣтъ спустя, въ 1797 году, несмотря на увеличеніе населенія, число ихъ было равно только 17.000 **) Эти выгоды были пріобрѣтены въ теченіе 50—60 лѣтъ, съ тѣхъ поръ какъ увеличились съ такой быстротой предѣлы и населеніе города. Восходя къ предыдущимъ вѣкамъ, мы можемъ только съ большими догадками судить о величинѣ городского и деревенскаго населенія даже самыхъ цивилизованныхъ странъ.

Города Манчестеръ, Ливерпуль а Бирмингамъ давали почти такое-же уменьшеніе смертности, какъ и Лондонъ. Трудно однако предполагать, чтобы въ подобныя вычисленія не вкралась какая нибудь ошибка.

Франція, какъ и Англія, испытала уменьшеніе смертности, если можно только довѣрять старымъ документамъ ***). По Виллермэ въ 1781 году насчитывали 1 смертный случай на 29 жителей, въ 1802 г.—30, а въ настоящее время насчитываютъ 1 на 40 ****).

Въ Швеціи отъ 1755 до 1775 года 1 смертный случай приходился на 35 жителей, отъ 1775-до 1795 года 1 на 37, а въ 1823 г.— 1 на 48.

---

*) *Elements of medical Statistics, by* F. Bisset Hawkins, 16 стр.

**) *Elements of medical Statistics,* 18. стр.

***) Финлейзону удалось достать списки участниковъ тонтинъ какъ для Франціи временъ Людовика XV, такъ и для Англіи—Вильгельма III, и онъ убѣдился въ томъ, что жизнь французскихъ участниковъ тонтинъ была тогда продолжительнѣе, чѣмъ англійскихъ (см. замѣчанія объ этомъ Д'Ивернуа въ Bibliotheque universelle de Genève, октябрь 1833 г., 146 стр.

****) Можно однако предвидѣть, что смертность, вычисленная для начала XIX столѣтія, чрезвычайно сомнительна. Основательныя замѣчанія по этому вопрссу можно найти у г. Д'Ивернуа въ *Bibliothèque universelle de Genève.* 1833 г.

Такъ-же точно въ Берлинѣ, съ 1747 по 1755 годъ годовая смертность была 1 на 28, а съ 1816 по 1822—нѣсколько меньшее отношеніе: 1 на 34.

Въ замѣткѣ о смертности въ Европѣ Моро-де-Жонэсъ представилъ слѣдующую таблицу, такъ-же точно доказывающую вліяніе цивилизаціи на число смертныхъ случаевъ для эпохъ, промежутокъ между которыми былъ отмѣченъ соціальными улучшеніями *).

Страны.	Годы.	1 смертный случай на:	Годы.	1 смертный случай на:
Швеція	1754—1768	34	1821—1825	45
Данія	1751 - 1754	32	1819	45
Германія	1788	32	1825	45
Пруссія	1717	30	1821—1824	39
Вюртембергъ . . .	1749—1754	31	1825	45
Австр. Имперія .	1822	40	1825—1830	43
Голландія	1800	26	1824	40
Великобританія . .	1785 - 1789	43	1800—1804	47
Франція	1776	25,5	1825—1827	39,5
Кантонъ де Во .	1756—1766	35	1824	47
Ломбардія	1767—1774	27,5	1827—1828	31
Англія	1690	33	1821	58
Итальянскія госуд	1767	21,5	1829	28
Шотландія . . .	1801	44	1821	50

Я повторяю, что не считаю положеніе столь благопріятнымъ, какъ это показываютъ приведенныя цифры; однако должно признать, что смертные случаи въ общемъ уменьшаются вмѣстѣ съ развитіемъ цивилизаціи и достатка.

Затѣмъ нѣкоторыя страны естественно должны были потерять часть населенія, или по крайней мѣрѣ оно оставалось неподвижнымъ, теряя преимущества, которыми онѣ раньше пользовались. Такъ, богатый городъ Амстердамъ, не знавшій въ теченіе нѣкотораго времени въ своей дѣятельности соперниковъ въ Европѣ, пострадалъ отъ упадка его торговли. Въ 1777 году, смертность

---

*) Можно пожалѣть о томъ, что авторъ не указываетъ источниковъ, откуда онъ взялъ ихъ: тогда его выводы имѣли бы большую цѣнность. Смотрите также таблицы, данныя выше на стр. 154 и 202.

равнялась тамъ 1 на 27, и она сохраняла ту-же величину согласно среднимъ выводамъ за 12 лѣтъ, предшествовавшихъ 1832 году. Число смертныхъ случаевъ дѣйствительно возрасло до 7.336, а населеніе къ 1-му января 1830 года было равно 202.175 человѣкъ, изъ которыхъ 90.292 мужескаго пола и 111.883—женскаго: это даетъ на 1 смертный случай 27,6 жителей, а на 1 рожденіе приходилось 27,8. Населеніе оставалось почти *стаціонарнымъ*. Слѣдующая таблица ознакомитъ насъ съ числомъ смертныхъ случаевъ и рожденій для каждаго года *).

Смертность и рождаемость въ городѣ Амстердамѣ **).

Годы.	Смертные случаи.			Рожденія.
	Мужчинъ.	Женщинъ.	Всего.	Всего.
1821	3.618	3.507	7.125	7.342
1822	4.041	3.957	7.998	7.600
1823	3.279	3.355	6.634	7.182
1824	3.082	2.994	6.076	7.860
1825	3.184	3.118	6.302	7.352
1826 ***).	4.351	4.457	8.808	7.438
1827	4.133	4.107	8.240	6.890
1828	3.562	3.516	7.078	7.208
1829	4.056	3.942	7.998	7.403
1830	3.387	3.427	6.814	7.306
1831	3,479	3.659	7.138	7.342
1832 ****).	4.057	3.765	7.822	6.452
Въ среднемъ	3.686	3.650	7.336	7.282

---

*) *Jaarboekje,* Lobatto, разные годы.

**) Пять лѣтъ, отъ 1816 до 1820 года давали:

1816	6.233	6.615
1817	8.416 а)	7.040
1818	6.300	6.888
1819	6.557	7.154
1820	7.066	6.850

Въ среднемъ . . 6.914 см. случ. 6.909 рожденій.

а) Голодный годъ.

***) Время эпидеміи въ Гронингенѣ. Увеличеніе числа смертныхъ случаевъ и уменьшеніе рожденій.

****) Годъ холеры.

„Извѣстія Кіевскаго Коммерч. Института“

выходятъ 4—6 разъ въ годъ по мѣрѣ накопленія матеріала въ редакціи. Кромѣ оффиціальныхъ свѣдѣній о дѣятельности Института и состоящихъ при немъ учрежденій въ „Извѣстіяхъ“ помѣщаются и научные труды преподавателей Института.

Подписная цѣна на годъ для слушателей Института **2** руб. и для постороннихъ лицъ **3** руб. безъ пересылки (на пересылку 50 коп.).

Цѣна отдѣльной книжки **75** коп. для постороннихъ и **50** коп. для слушателей.

Редакторъ **А. А. Русовъ.**

Изданія Кіевскаго Коммерческаго Института:

	ЦѢНА.
„Извѣстія Кіевскаго Коммерческаго Института“. Выходятъ 4—6 разъ въ годъ; цѣна 2 руб. **для студентовъ К. К. Института** и 3 руб. для постороннихъ; отдѣльныя книги	50 и 75 коп.
В. Г. Бажаевъ. Къ вопросу о законахъ аграрной эволюціи	15
И. В. Егоровъ. Техническій анализъ. Кіевъ 1909 г.	2 р. —
А. А. Русовъ. Краткій обзоръ развитія русской оцѣночной статистики. Кіевъ 1909 г.	50 „
Труды Общества экономистовъ при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ. Кіевъ. Вып. I 1910 г.	50 „
Труды Общества Экономистовъ. Кіевъ. Вып. II. 1910 . . .	1 р. —
И. В. Егоровъ. Объ окиси декаметиленгликоля.	10 „
Записка о Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ изд. **1909** г. .	15 „
Записка о Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ изд. **1910** г. .	25 „
Отчетъ о музеѣ товаровѣдѣнія при Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ г. Кіевъ 1910 г.	25 „
Обозрѣніе преподаванія на 1910—1911 академическій годъ въ Кіевскомъ Коммерческомъ Институтѣ. Кіевъ 1910 г.	20 „
М. В. Довнаръ-Запольскій. На зарѣ крестьянской свободы. Кіевъ. 1911	1 р. —

Означенныя книги продаются у кассира Института; у него же продаются:

М. В. Довнаръ-Запольскій. Изъ ист
теченій въ Россіи, изд. 2-ое.

Его-же. Русская Исторія т.

Его

6.888
7.154
7.066 6.850

Въ среднемъ . . 6.914 см. случ. 6.909 рожденій.

а) Голодный годъ.

***) Время эпидеміи въ Гронингенѣ. Увеличеніе числа смертныхъ случаевъ и уменьшеніе рожденій.

****) Годъ холеры.

90-00